

研究生教材

数理方程 HILBERT空间方法 (下)

李开泰 马逸尘

西安交通大学出版社

研 究 生 教 材

数理方程HILBERT空间方法

（下）

李开泰　马逸尘

西 安 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是数理方程Hilbert空间方法的下册，其内容为抽象椭圆边值问题的变分原理及其应用；半群及其一阶、二阶发展方程；对Navier-Stokes方程给出较系统的讨论，最后讨论了这些方法在弹性力学、电磁场、磁流体动力学、量子力学等领域中的应用。

本书内容新颖，结构紧凑，定性分析和数值分析相结合是本书的特点。它可作为高等院校计算数学、应用数学、计算物理以及计算力学等专业研究生教材，也可作为有关专业高年级大学生、研究生、大学教师和科技工作者教学和科研的参考书。

（陕）新登字007号

数理方程HILBERT空间方法

（下）

李开泰　马逸尘

责任编辑　路江

*

西安交通大学出版社出版

（邮政编码　710049）

陕西省建筑印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本850×1168 1/32　印张16.375　字数412千字

1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN7-5605-0445-0/O·77　定价：8.75元

研究生教材总序

研究生教育是为国家培养高层次人才的，它是我国高等教育的最高层次。研究生必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，具有从事科学研究或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是搞好研究生教学的重要环节。为此，我们组织出版这套以公共课和一批新型学位课程为主的研究生教材，以满当前研究生教学的需要。这套教材的作者都是多年从事教学、科研、具有丰富经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外最新学术动态，使研究学习之后能迅速接近当前科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到应有的基本理论和基本内容，以保持学位课程内容的相对稳定性和系统性，并具有足够的深广度。

这套研究生教材虽然从提出选题、拟定大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的工作，但毕竟是第一次出版这样高层次的系列教材，水平和经验都感不足，缺点和错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院
西安交通大学出版社

前　言

数学物理方程理论是数学科学中最为活跃的分支之一，它不但是很大一部分数学内容的基础，而且也是很大一部分物理内容的基础，它有助于人们对物质运动规律的认识。自然科学基本规律的精确数学表达式大都是微分方程，如 Newton 运动方程、Euler 方程、Navier-Stokes 方程、Lame-Navier 方程、Maxwell 方程、Boltzmann 方程及 Schroedinger 方程等。这些基本方程及其派生出来的方程几乎覆盖了一切科学工程领域。现代大型科学工程计算的主要任务，就是用现代大型计算机求解这些方程。

数学物理方程理论发展到今天，经典的和现代的互相渗透，形成内容十分丰富的分支。当前的任务是如何使应用数学、计算数学、物理和力学专业的研究生在较短的时间内，尽快地了解如此庞大理论体系中的主要结果和方法，以便结合数学和自然科学的各个分支，使它们互相渗透，有所创新。培养和训练研究生的这种能力，是近代科学综合发展趋势的要求，也是培养新一代科学工作者必不可少的环节。

从一个庞大的理论体系中选取一定的材料，使它不仅要包含原体系的主要结果和方法，还要自成体系，满足作为一本教材的种种要求，这不能不说是一件非常困难的事情。自 1980 年以来，我们经过多年的教学探索和实践，多次修改，撰写成本书，较好地达到了这一要求。

本书分两部分。第一部分(第一章到第四章)是广义函数和 Соболев 空间。主要阐述广义函数和 Соболев 空间的性质，尤其是一些有重要应用的 Соболев 空间的性质。第二部分(第五章到第十章)是椭圆边值问题和发展方程的 Hilbert 空间方法，对椭圆型方程着重于变分原理和正则性理论；对发展方程，着重于用

半群理论来讨论它的适定性问题；讨论物理力学中经典的方程，如流体力学中的 Navier-Stokes 方程，弹性力学中的 Navier-Lamé 方程，电磁场中 Maxwell 方程等等，讨论了弱解、强解的存在唯一，解的吸引子以及解的渐近行为等等，其中有些内容是 80 年代刚刚发展起来的。

第一章广义函数和 Fourier 变换。本章系统地阐述了建立 Соболев 空间的泛函基本知识。这样做为的是使学生从本科泛函分析课程中延续过来，起到承上启下的作用，使学生在一进入本课程时不致于太吃力。同时本章的讨论也为全书的展开打下良好的基础。本章结构紧凑，各节的定义、定理及例子环环相扣，较简捷地处理了教材内容。

第二章 $L^p(\Omega)$ 空间。本章内容虽然是经典的，但它是了解 Соболев 空间所必需的。本章既介绍了 $L^p(\Omega)$ 空间的主要内容，又强调了一些常用的基本方法，同时还适当地略去了那些与 Соболев 空间关系不大的内容。

第三章整数阶 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$。本章恰当地处理了庞大而复杂的内容，如内插性质、延拓性质以及嵌入性质等，既阐明了基本方法，使学生对这些性质的来龙去脉有个大致的了解，同时又不拘泥于琐碎的细节，繁简适当。

第四章实数阶 Соболев 空间和迹空间。推广了整数阶 Соболев 空间的性质，同时还讨论了若干向量值 Соболев 空间，它们在弹性力学、流体力学和电磁场中有广泛应用。

第五章抽象的椭圆变分问题。本章对线性椭圆变分问题、混合变分问题、三线性和拟线性变分问题等，讨论了解的存在性、迭代方法、收敛性以及正则性等问题。对它们的理论根据、实际背景均有一定交代，并对内容作了合理的组织和取舍。

第六章在椭圆边值问题中的应用。本章包括在 $2m$ 阶线性椭

圆型方程和拟线性椭圆型方程中的应用。为了更好地理解理论和概念，给出了一些例子，使较短的篇幅包含了较多的内容。

第七章、第八章讨论了一、二阶发展方程。这两章采用了从抽象到具体的方法，不仅讲授了内容，而且展示了整个抽象过程和方法，使得读者很自然地获得较完整的概念。

第五章到第八章是研究数学物理问题的基础。

第九章对定常和非定常的 Navier－Stokes 方程解的存在唯一性、多解、奇异点集、分歧以及吸引子等问题的近代理论及研究方法进行了系统的讨论。它是理论流体力学和非线性偏微分方程研究中的重要进展之一。

第十章应用前面提供的理论工具，系统地讨论了弹性力学中 Navier－Lame 方程、电磁场中 Maxwell 方程、磁流体动力学方程等相应变分问题的适定性问题。

为了内容上的自封闭，我们不得不以附录形式，给出两部分内容。附录 A：非线性泛函分析中若干问题。主要讨论非线性泛函分析中的极值原理、位势型算子和单调算子等性质。这部分内容，多数命题、定理都有严格证明。附录 B：紧算子 Schauder－Riesz 理论，这部分内容是经典的，不加证明。但是很有用。

这里我们应该特别感谢周天孝、黄艾香两位教授，他们仔细地阅读了全部书稿，提出了非常宝贵的意见。我们还要感谢蒋潞教授，她对本书进行了认真严肃、一丝不苟的加工编辑。靖稳锋同志应用自己研制的科技版快速排版系统完成了本书的排版工作。正是由于他（她）们的努力，本书才能够以今天这样的面貌同读者见面。

由于作者水平有限，错误在所难免，热忱欢迎读者提出宝贵意见，谢谢！

作者

1991.8

目 录

第五章　椭圆边值问题的变分原理

这一章将介绍抽象的变分问题，它的解的存在性和正则性，它的有限维逼近以及它们与椭圆边值问题的关系.

§5.1　抽象的变分问题

设 U、V 为两个 Hilbert 空间，U′、V′ 分别为 U、V 的拓朴对偶，$(\cdot,\cdot)_U$、$(\cdot,\cdot)_V$ 分别记为 U、V 的内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle_U$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 分别记 U × U′、V × V′ 的对偶积. 在不致引起混淆处，下标 U 或 V 将略去. $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_V$ 分别记为空间 U 和 V 之范数.

另外，H、G 分别为另外两个 Hilbert 空间，它们可以作为 Hilbert 空间套 (U,H), (V,G) 中的主元空间，即

$$U\subset H=H'\subset U',\ V\subset G=G'\subset V'$$

其中嵌入是稠密和连续的.

1　双线性形式

$B(\cdot,\cdot)$ 称为 U × V → R 的双线性形式，如果 $\forall u\in U$, $v\to B(u,v)$ 是线性的，$\forall v\in V$, $u\to B(u,v)$ 也是线性的，即 $\alpha_i,\beta_i\in R$, $u_i\in U$, $v_i\in V$, $i=1,2$. 那么有

$$B(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\beta_1v_1+\beta_2v_2)=\alpha_1\beta_1B(u_1,v_1)+\alpha_1\beta_2B(u_1,v_2)+\alpha_2\beta_1B(u_2,v_1)+\alpha_2\beta_2B(u_2,v_2)$$

双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 称为是有界的，如果存在 $M>0$ 使得

$$|B(u,v)| \leqslant M\|u\|_{U} \cdot \|v\|_{V} \quad \forall u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}$$

线性算子的有界性和连续性是等价的，所以 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性等价于 $B(\cdot,\cdot)$ 的有界性.

当 $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ 时，如果 $B(\cdot,\cdot)$ 满足

$$B(u,v)=B(v,u) \qquad \forall u,v \in \mathbf{U}$$

则称双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是对称的.

设 $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ 上双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，那么存在 $\mathrm{A} \in \pounds(\mathbf{U},\mathbf{V}')$ 使得

$$B(u,v)=\langle \mathrm{A}u,v\rangle \qquad \forall u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V} \tag{5.1.1}$$

这里 $\pounds(\mathbf{U},\mathbf{V}')$ 记为从 $\mathbf{U}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的一切线性连续算子所组成的空间，并赋以通常的算子范数，根据 Hilbert 空间的 Riesz 定理，必存在唯一的 $\alpha u \in \mathbf{V}$，使得

$$B(u,v)=\langle \mathrm{A}u,v\rangle=(\alpha u,v)_{V} \qquad \forall u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V} \tag{5.1.2}$$

并且 α 是 $\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ 的连续线性算子，同理有

$$B(u,v)=\langle u,\mathrm{A}^{*}v\rangle=(u,\alpha^{*}v)_{U} \qquad \forall u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V} \tag{5.1.3}$$

其中 $\mathrm{A}^{*} \in \pounds(\mathbf{V},\mathbf{U}')$，$\alpha^{*} \in \pounds(\mathbf{V},\mathbf{U})$ 分别称为 A 和 α 的共轭算子.

考察下列变分问题(记为 $V.P.$)：$\forall f \in \mathbf{V}'$

$(V.P.)$ 求 $u \in \mathbf{U}$，使得 $B(u,v)=\langle f,v\rangle_{V} \quad \forall v \in \mathbf{V}$ (5.1.4)

以及它的共轭问题(记为 $V^{*}.P^{*}.$)：$\forall g \in \mathbf{U}'$

$(V^{*}.P^{*}.)$ 求 $v \in \mathbf{V}$，使得 $B(u,v)=\langle g,u\rangle_{U} \quad \forall u \in \mathbf{U}$ (5.1.5)

设 $J_{U} \in \pounds(\mathbf{U}',\mathbf{U})$，$J_{V} \in \pounds(\mathbf{V}',\mathbf{V})$ 分别为 Riesz 映照，那么式 (5.1.4) 和 (5.1.5) 可以表示为

$$\alpha(u)=J_{V}(f) \tag{5.1.6}$$

$$\alpha^{*}(v)=J_{U}(g) \tag{5.1.7}$$

变分问题 $(V.P.)$ 和 $(V^{*}.P^{*}.)$ 的可解性等价于算子 α 和 α^{*} 的可

逆性，通常称 U 为试验空间，V 为检验空间．

定义 5.1.1 双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的，如果它满足

(1) 存在正常数 $\delta>0$，使得

$$\inf_{\|u\|_U=1}\sup_{\substack{\|v\|_V\leq 1\\ v\neq 0}}|B(u,v)|\geq\delta>0 \tag{5.1.8}$$

(2) $\sup\limits_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}}|B(u,v)|>0 \qquad \forall v\in V, v\neq 0$ (5.1.9)

如果 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U\times U$ 上，且存在常数 $\mu>0$ 使得

$$B(u,u)\geq\mu\|u\|_U^2 \qquad \forall u\in U \tag{5.1.10}$$

则称$B(\cdot,\cdot)$是U强制的.

如果 $B(\cdot,\cdot)$ 定义在 $U\times U$ 上，且存在常数 $\mu>0$, $\lambda>0$ 使得

$$B(u,u)\geq\mu\|u\|_U^2-\lambda\|u\|_H^2 \qquad \forall u\in U \tag{5.1.11}$$

称$B(\cdot,\cdot)$是U－H强制的.

命题 5.1.1 若双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，那么由式 (5.1.2) 所定义的算子 α 也是连续的．

证 由下列不等式可立即证得命题

$$\|\alpha(u)\|_V=\sup_{v\in V}\frac{(\alpha(u),v)_V}{\|v\|_V}\leq M\|u\|_U \qquad \forall u\in U$$

证毕.

命题 5.1.2 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U\times U$ 上的双线性形式，如果 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强制的，则 $B(\cdot,\cdot)$ 也是弱强制的．

证 由U强制性，有

$$\sup_{\|v\|_U\leq 1}|B(u,v)|\geq\sup_{v\in U}\frac{|B(u,v)|}{\|v\|_U}\geq\frac{|B(u,u)|}{\|u\|_U}\geq\mu\|u\|_U$$

从而式 (5.1.8) 成立．另外，$\forall v\in U$ 有

$$\sup_{u\in U}|B(u,v)| \geqslant |B(v,v)| \geqslant \mu\|v\|_U^2 > 0 \qquad v\neq 0$$

即得到式 (5.1.9)，证毕．

2　变分问题解的存在唯一

定理 5.1.1　(Lax－Milgram 定理) 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U\times U$ 上的双线性形式，并且

(1) $B(\cdot,\cdot)$是连续的;

(2) $B(\cdot,\cdot)$是U强制的.

那么$\forall f\in U'$，变分问题 $(V.P.)$ 存在唯一解 u，它满足

$$\|u\|_U \leqslant \mu^{-1}\|f\|_{U'} \tag{5.1.12}$$

证　由强制性条件及算子 α 和 α^* 定义，可得

$$\mu\|u\|_U^2 \leqslant B(u,u) = (\alpha(u),u) \leqslant \|\alpha(u)\|_U\|u\|_U$$

即

$$\|\alpha(u)\|_U \geqslant \mu\|u\|_U \tag{5.1.13}$$

同理

$$\|\alpha^*(u)\|_U \geqslant \mu\|u\|_U$$

这说明，算子 α、α^* 均有下界，因而 $u\to\alpha(u)$ 和 $u\to\alpha^*(u)$ 是一对一的．

为了证明 $\alpha(u)$ 也是 U 到 U 的满映照，先证值域 $R(\alpha)$ 是 U 中的闭子空间．实际上，若 $R(\alpha)$ 中有一收敛点列，它们是由 $\{u_i\}$ 产生的，即 $\alpha(u_i)$ 在 U 中收敛．设极限为 $w_o\in U$，现在我们证明 $w_o\in R(\alpha)$. 由式 (5.1.13) 可以推出 $\{u_i\}$ 是 U 中 Cauchy 点列，故有 $\lim\limits_{i\to\infty}u_i = u_o$，由 α 的连续性，有 $\alpha(u_i)\to\alpha(u_o)$，即 $w_o = \alpha(u_o)$，故 $w_o\in R(\alpha)$. 这说明 $R(\alpha)$ 是 U 中的闭子空间，因此，$U = R(\alpha)\oplus R(\alpha)^\perp$. 这里 $R(\alpha)^\perp$ 表示 $R(\alpha)$ 在 U 中的正交补，但是

$$R(\alpha)^\perp = \{v\in U:\ (\alpha(u),v)_U = 0,\ \forall u\in U\}$$

$$= \{v \in \mathbf{U}:\ B(u,v) = 0,\ \forall u \in \mathbf{U}\}$$

若 $R(\alpha)^{\perp} \neq \{0\}$，则必有 $w_o \neq 0$，$w_o \in R(\alpha)^{\perp}$，$B(u,w_o) = 0$ $\forall u \in \mathbf{U}$，取 $u = w_o$，则 $B(w_o,w_o) = 0$ 与 $\mathbf{U}$ 强制性条件相矛盾．因此，我们证明了 $u \to \alpha(u)$ 是 $\mathbf{U} \to \mathbf{U}$ 一对一的满映照，根据 Banach 定理，$\alpha(u) = J_{\mathbf{U}} f$ 有唯一解，并且

$$\|\alpha(u)\|_{\mathbf{U}} = \|J_{\mathbf{U}} f\|_{\mathbf{U}} = \|f\|_{\mathbf{U}'}$$

代入式 (5.1.13)，就可以得到式 (5.1.12). 证毕．

定理 5.1.2 （广义 Lax－Milgram 定理）设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ 上的双线性形式，并且 (1) $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，(2) $B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的．那么，$\forall f \in \mathbf{V}'$ 变分问题 ($V.P.$) 存在唯一解 u，它满足

$$\|u\|_{\mathbf{U}} \leqslant \delta^{-1} \|f\|_{\mathbf{V}'} \tag{5.1.14}$$

证 设 α 为与 $B(\cdot,\cdot)$ 相联系的算子，由 (5.1.8) 得

$$\forall u \in \mathbf{U} \quad \|\alpha(u)\|_{\mathbf{V}} = \sup_{v \in \mathbf{V}} \frac{|(\alpha(u),v)|}{\|v\|_{\mathbf{V}}} \geqslant \delta \|u\|_{\mathbf{U}} \tag{5.1.15}$$

这说明，α 有下界，所以 $u \to \alpha(u)$ 是 $\mathbf{U} \to \mathbf{V}$ 的一对一的映照．由于 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性以及 α 下有界，可知 $\mathrm{R}(\alpha)$ 是 $\mathbf{V}$ 中闭子空间（参看定理 5.1.1 的证明）. 故 $\mathbf{V} = \mathbf{R}(\alpha) \oplus \mathbf{R}(\alpha)^{\perp}$. 为了证明 α 也是 $\mathbf{U}$ 到 $\mathbf{V}$ 上的满映照，只需证明 $R(\alpha)^{\perp} = \{0\}$ 即可．若不然，设有 $v_o \in R(\alpha)^{\perp}$，$v_o \neq 0$，则有

$$(\alpha(u),v_o)_{\mathbf{V}} = 0 \qquad \forall u \in \mathbf{U}$$

或
$$B(u,v_o)_{\mathbf{V}} = 0 \qquad \forall u \in \mathbf{U},\ v_o \neq 0$$

与式 (5.1.9) 矛盾，故 $u \to \alpha(u)$ 是 $\mathbf{U}$ 到 $\mathbf{V}$ 上的一对一的满映照，根据 Banach 定理，存在有界逆 α^{-1}

$$u = \alpha^{-1}(J_{\mathbf{V}} f)$$

由式(5.1.15)有

$$\|\alpha^{-1}(J_V f)\|_U \leqslant \delta^{-1}\|J_V f\|_V = \delta^{-1}\|f\|_{V'}$$

即
$$\|u\|_U \leqslant \delta^{-1}\|f\|_{V'}$$

证毕.

3 Ritz变分和Galerkin变分

当 $U = V$ 时，变分问题 $(V.P.)$ 称为 Galerkin 变分问题，尤其是当 $B(\cdot,\cdot)$ 是对称的时，可以引入泛函 J: $\forall f \in U'$

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - \langle f,u \rangle \tag{5.1.16}$$

在物理上，称 J 为能量泛函.

定理 5.1.3 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $U \times U \to R$ 的连续、对称和 U 强制的双线性形式. 那么，由式(5.1.16)所定义的能量泛函 J 满足

(1) J 在 U 上处处 Frechet 可导，它的导数 $J'(u)$ 满足

$$\langle J'(u),v \rangle = B(u,v) - \langle f,v \rangle \tag{5.1.17}$$

也就是

$$J'(u) = Au - f \tag{5.1.18}$$

其中 A 是由式(5.1.1)所定义的.

(2) J在U上是严格凸的，即$\forall t \in [0,1]$

$$J(tv + (1-t)u) < tJ(v) + (1-t)J(u) \quad \forall u,v \in U,\ u \neq v \tag{5.1.19}$$

(3) $J(v) \geqslant J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle \quad \forall u,v \in U \tag{5.1.20}$

(4) J 在 U 上弱下半连续(见附录 A)，即若 $\{u_n\} \subset U$ 在 U 中弱收敛于 u_o，则

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u_o) \tag{5.1.21}$$

(5) J 在 U 上是强制的，即一致成立

$$\frac{J(u)}{\|u\|_U} \to +\infty \quad 当\|u\|_U \to +\infty \tag{5.1.22}$$

证 $\forall u,v\in U$，利用$B(\cdot,\cdot)$对称性，有

$$B(u,u)-B(v,v)=B(u+v,u-v)$$

故

$$J(u)-J(v)=\frac{1}{2}B(u+v,u-v)-\langle f,u-v\rangle$$

以及它的Gateaux导数

$$\langle J'(u),v\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(J(u+tv)-J(u))=B(u,v)-\langle f,v\rangle$$

由于 $J'(u)$ 关于 u 是连续的，根据熟知的泛函分析定理，可知 $J'(u)$ 等于 Frechet 导数．所以式 (5.1.17) 成立．

另一方面，$J(tv+(1-t)u)=tJ(v)+(1-t)J(u)-\frac{1}{2}t(1-t)B(u-v,u-v)$．利用 $B(\cdot,\cdot)$ 的 U 强制，就可以得到式 (5.1.19).

利用凸性式(5.1.19)有

$$J(v)-J(u)>t^{-1}\{J(u+t(v-u))-J(u)\}$$

令 $t\to 0$，就可得到式 (5.1.20).

为了证明弱下半连续，注意到当u_n在U中弱收敛于u_o时，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,u_n\rangle=\langle f,u_o\rangle,\quad \lim_{n\to+\infty}B(u_n,u_o)=B(u_o,u_o)$$

另外

$$\begin{aligned}0&\leqslant B(u_n-u_o,u_n-u_o)\\&=B(u_n,u_n)-2B(u_n,u_o)+B(u_o,u_o)\end{aligned}$$

从而

$$B(u_n,u_n)\geqslant 2B(u_n,u_o)-B(u_o,u_o)$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\inf J(u_n)\geqslant\frac{1}{2}B(u_o,u_o)-\langle f,u_o\rangle=J(u_o)$$

这就是式(5.1.21).

利用$B(\cdot,\cdot)$的U强制性得

$$J(u)\geqslant\left(\frac{\mu}{2}\|u\|_{\mathbf{U}}-\|f\|_{\mathbf{U}'}\right)\|u\|_{\mathbf{U}}$$

这就不难得到式(5.1.22), 证毕.

定理 5.1.4 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 Hilbert 空间 $\mathbf{U}$ 上的对称、连续双线性形式，且是 $\mathbf{U}$ 强制的，那么 Galerkin 变分问题 $(V.P.)$ 等价于 Ritz 变分问题

求$u\in\mathbf{U}$, 使得$J(u)=\inf\limits_{v\in\mathbf{U}}J(v)$ (5.1.23)

证 设u是Ritz变分问题(5.1.23)的解, 由于$J\in\mathbf{C}^1$, 故

$$\langle J'(u),v\rangle=0\qquad\forall v\in\mathbf{U}\tag{5.1.24}$$

(参看附录 A). 由式 (5.1.17) 可以推出，u 也是 $(V.P.)$ 的解 . 反之，若 u 是 $(V.P.)$ 的解，那么由式 (5.1.17) 推出式 (5.1.24). 再由式 (5.1.20) 可得 u 也是 Ritz 变分问题的解，证毕 .

由附录 A 可以看到，由于 J 在 $\mathbf{U}$ 上弱下半连续，并且是 $\mathbf{U}$ 强制 (有增长性质), 那么极小值问题 (5.1.23) 至少存在一个解 . 由于 J 的严格凸性，这个解也是唯一的 . 这与 Galerkin 变分问题解的存在唯一性的结果是一致的 .

4 有限维逼近

设 $\mathbf{U}_k\subset\mathbf{U}$, $\mathbf{V}_h\subset\mathbf{V}$ 分别为两个有限维子空间，那么变分问题 $(V.P.)$ 的有限维逼近 $(V_h.P_h.)$ 是

求 $u_h\in\mathbf{U}_h$ 使得

$$B(u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle_{\mathbf{V}}\quad\forall v_h\in\mathbf{V}_h\tag{5.1.25}$$

这里 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 的连续双线性形式，$f\in\mathbf{V}'$.

设 u, u_h 分别是 $(V.P.)$ 和 (V_h,P_h) 的解，那么在 $(V.P.)$ 中，令 $v=v_h\in \mathbf{V}_h$，并与式 (5.1.25) 相减，得

$$B(u-u_h,v_h)=0 \qquad \forall v_h\in \mathbf{V}_h \tag{5.1.26}$$

这个等式说明 $u-u_h$ 在 $B(\cdot,\cdot)$ 度量下正交于 $\mathbf{V}_h$.

式 (5.1.25) 还有一个最佳逼近性质．设 $\mathbf{U}=\mathbf{V}$, $\mathbf{U}_h=\mathbf{V}_h$，双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强制和对称的，那么 $\forall v_h\in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned}
&B(u-v_h,u-v_h)\\
&=B(u-u_h+u_h-v_h,u-u_h+u_h-v_h)\\
&=B(u-u_h,u-u_h)+B(u_h-v_h,u_h-v_h)
\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

这里利用了式 (5.1.26)，等式 (5.1.27) 表明，在 $B(\cdot,\cdot)$ 度量下，$\mathbf{V}_h$ 中任一元素 v_h 到 u 的距离均大于 u_h 到 u 的距离．即

$$\begin{aligned}
&B(u-u_h,u-u_h)<B(u-v_h,u-v_h)\\
&\qquad \forall v_h\in \mathbf{V}_h,\ v_h\neq u_h
\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

定理 5.1.5 （Cèa 引理）设 $B(\cdot,\cdot)$ 为定义在 $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ 上的连续、对称和 U 强制的双线性形式，$\mathbf{U}_h\subset \mathbf{U}$ 是有限维子空间．u, u_h 分别为 $(V.P.)$ 和 (V_h,P_h) 的解，那么存在一个与 u_h 无关的常数 c，成立

$$\|u-u_h\|_{\mathbf{U}}\leqslant c\inf_{v_h\in \mathbf{V}_h}\|u-v_h\|_{\mathbf{U}} \tag{5.1.29}$$

证 设 $w_h\in \mathbf{U}_h$ 为任一元素，利用式 (5.1.26) 和 $B(\cdot,\cdot)$ 的强制性及对称性条件，有

$$\begin{aligned}
\mu\|u-u_h\|_{\mathbf{U}}^2&\leqslant B(u-u_h,u-u_h)=B(u-u_h,u-v_h)\\
&\leqslant M\|u-u_h\|_{\mathbf{U}}\cdot\|u-v_h\|_{\mathbf{U}}
\end{aligned}$$

因而可得式 (5.1.29)，这里 $c=M/\mu$，证毕．

附注：如果存在一个单参数有限维空间族 $\{\mathbf{U}_h\}(h \geqslant 0) \subset \mathbf{U}$，使得 $\forall u \in \mathbf{U}$，有

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_U = 0 \tag{5.1.30}$$

那么 $(V_h.P_h.)$ 的解收敛于 $(V.P.)$ 的解

$$\| u - u_h \|_{\mathrm{U}} \leqslant \sqrt{\frac{M}{\mu}} \inf_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_{\mathrm{U}} \tag{5.1.31}$$

定理 5.1.6 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 的双线性连续形式，$\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$，$\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ 分别为有限维子空间，$f \in \mathbf{V}'$. 如果

(1) $$\inf_{\substack{u_h \in \mathbf{U}_h \\ \|u_h\|_{\mathrm{U}} = 1}} \sup_{\substack{v_h \in \mathbf{V}_h \\ \|v_h\|_{\mathrm{V}} \leqslant 1}} |B(u_h, v_h)| \geqslant \delta_h > 0 \quad \delta_h \in \mathbf{R}^+ \tag{5.1.32}$$

(2) $$\sup_{u_h \in \mathbf{U}_h} |B(u_h, v_h)| > 0 \quad \forall v_h \neq 0 \tag{5.1.33}$$

那么 $(V_h.P_h.)$ 有唯一解 u_h，如果

(3) $B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的

那么 $(V.P.)$ 存在唯一解 u，并且有逼近不等式

$$\| u - u_h \|_{\mathrm{U}} \leqslant \left(1 + \frac{M}{\delta_h}\right) \| u - w_h \|_{\mathrm{U}} \quad \forall w_h \in \mathbf{U}_h \tag{5.1.34}$$

证 $\alpha \in \pounds(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ 为 $B(\cdot,\cdot)$ 相应的线性连续算子

$$B(u,v) = (\alpha u, v)_{\mathrm{V}} \qquad \forall u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V}$$

算子 $\mathrm{A} \in \pounds(\mathbf{U}, \mathbf{V}')$

$$B(u,v) = \langle \mathrm{A} u, v \rangle_{\mathrm{V}} \quad \forall u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V}$$

设 $J_{\mathrm{V}} \in \pounds(\mathbf{V}', \mathbf{V})$ 为Riesz同构等距算子，那么

$$\alpha u = J_{\mathrm{V}} \mathrm{A} u \qquad \forall u \in \mathbf{U} \tag{5.1.35}$$

同样，我们有 $\alpha_h \in \pounds(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h)$

$$B(u_h, v_h) = (\alpha_h u_h, v_h)_{\mathrm{V}} \qquad \forall u_h \in \mathbf{U}_h,\ v_h \in \mathbf{V}_h$$

令 P_h 为 V 到 V_h 上的正交投影算子，并且记

$$Q_h \equiv P_h \alpha \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V}_h)$$

由于 P_h 对称的，有 $\forall u_h, v_h \in \mathrm{V}_h$

$$\begin{aligned}(Q_h u_h, v_h)_{\mathrm{V}} &= (P_h \alpha u_h, v_h)_{\mathrm{V}} = (\alpha u_h, P_h v_h)_{\mathrm{V}} \\ &= (\alpha u_h, v_h)_{\mathrm{V}} = B(u_h, v_h)\end{aligned}$$

因而 α_h 是 Q_h 在 U_h 上的限制，$\alpha_h = Q_h|_{\mathrm{U}_h}$.

利用 Riesz 表现定理，令 $v_o \in \mathrm{V}_h$ 使得

$$(v_o, v_h)_{\mathrm{V}} = \langle f, v_h \rangle_{\mathrm{V}} \qquad \forall v_h \in \mathrm{V}_h$$

由于 u_h 是 $(V_h.P_h.)$ 的解，故

$$B(u_h, v_h) = (\alpha_h u_h, v_h)_{\mathrm{V}} = \langle f, v_h \rangle_{\mathrm{V}} = (v_o, v_h)_{\mathrm{V}} \qquad \forall v_h \in \mathrm{V}_h$$

即

$$\alpha_h u_h = v_o$$

同理，u 是 $(V.P.)$ 的解，有

$$B(u, v_h) = (\alpha u, P_h v_h)_{\mathrm{V}} = (P_h \alpha u, v_h)_{\mathrm{V}} = (v_o, v_h)_{\mathrm{V}} \qquad \forall v_h \in \mathrm{V}_h$$

因而 $P_h \alpha u = v_o$. 从而 $u_h = \alpha_h^{-1} P_h \alpha u$. 设 $w_h \in \mathrm{U}_h$ 为任一元素，那么

$$\begin{aligned}u - u_h &= u - w_h - \alpha_h^{-1} P_h \alpha (u - w_h) \\ &= (I - \alpha_h^{-1} P_h \alpha)(u - w_h)\end{aligned}$$

这里用到了 $\alpha_h^{-1} Q_h|_{\mathrm{U}_h} = I$. 由此得

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{\mathrm{U}} &\leqslant \|I - \alpha_h^{-1} P_h \alpha\| \; \|u - w_h\|_{\mathrm{U}} \\ &\leqslant (1 + \|\alpha_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{V}_h, \mathrm{U}_h)} \|\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})}) \|u - w_h\|_{\mathrm{U}} \\ &\qquad \forall w_h \in \mathrm{U}_h\end{aligned}$$

再由 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性可推出

$$\|\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{V})} \leqslant M$$

而根据式(5.1.32), $\forall w_h \in \mathbf{U}_h$, 有

$$\|\alpha_h(w_h)\|_{\mathrm{V}} = \sup_{v \in \mathrm{V}_h} \frac{|(\alpha_h(w_h), v)|}{\|v\|_{\mathrm{V}}}$$

$$= \sup_{v_h \in \mathrm{V}_h} \frac{|B(w_h, v_h)|}{\|v_h\|_{\mathrm{V}}} \geqslant \delta_h \|w_h\|_{\mathrm{U}}$$

故
$$\|\alpha_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{V}_h, \mathrm{U}_h)} \leqslant \delta_h^{-1}$$

最后可得

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{U}} \leqslant (1 + \frac{M}{\delta_h})\|u - w_h\|_{\mathrm{U}} \qquad \forall w_h \in \mathbf{U}_h$$

证毕.

逼近定理表明，变分问题逼近解的精度取决于有限维子空间 $\mathbf{U}_h$ 逼近 $\mathbf{U}$ 的精度. $\inf\limits_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|_{\mathrm{U}}$ 是真解 u 到 $\mathbf{U}_h$ 的最短距离，这个数取决于有限维插值精度.

在式(5.1.34)中，δ_h 依赖于有限维空间 $\mathbf{U}_h$，如果式(5.1.32)有一致均匀下界，那么将存在一个常数 δ_o，使得式(5.1.34)对所有的 u_h 都成立. 如果 $\delta_h \to 0 (h \to 0)$，那么逼近解的误差可能无法控制.

5 约束极小化和不等变分

设 $\mathbf{V}$ 是个 Hilbert 空间，$K \subset \mathbf{V}$ 是一个非空子集，$B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 的连续双线性形式，f 是 $\mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 的连续线性泛函，设能量泛函

$$J(v) = \frac{1}{2} B(v,v) - \langle f, v \rangle$$

于是我们可以构造如下极小值问题

$$求u\in K，使得J(u)=\inf_{v\in K}J(v) \tag{5.1.36}$$

下面的结果是经典的．

定理5.1.7 设V是一个Hilbert空间，并且

(1) K是V中一个闭凸子集

(2) 双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是对称、连续和 V 强制的．即

$$B(u,v)=B(v,u) \qquad \forall u,v\in \mathrm{V}$$

存在 $M>0$，$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_{\mathrm{V}}\|v\|_{\mathrm{V}} \qquad \forall u,v\in \mathrm{V}$

存在 $\mu>0$，$B(u,u)\geqslant \mu\|u\|_{\mathrm{V}}^2 \qquad \forall u\in \mathrm{V}$

那么式(5.1.36)存在唯一的解．

证 由(2)，根据 Lax－Milgram 定理，下列变分问题

$$求u\in \mathrm{V}，使得B(u,v)=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in \mathrm{V}$$

有唯一解u_f，于是能量泛函可以表示为

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-B(u_f,v)=\frac{1}{2}B(v-u_f,v-u_f)-\frac{1}{2}B(u_f,u_f)$$

如果把 $B(\cdot,\cdot)$ 作为 V 的内积，$B(u,u)$ 为 V 的等价范数，那么极小化问题(5.1.36)等价于求 u_f 到 K 的最短距离，也就是求 u_f 到 K 上的投影．由于 K 是 V 中闭凸集，根据投影定理，这样的投影存在且唯一，证毕．

定理 5.1.8 设 u 是抽象极小值问题(5.1.36)的一个解，当且仅当它满足

(1) 如果K是实闭凸集，那么

$$u\in K,\ B(u,v-u)\geqslant \langle f,v-u\rangle \qquad \forall v\in K \tag{5.1.37}$$

(2) 或者，如果 K 是 V 中以 O 为顶点的闭凸锥，那么

$$\begin{aligned}&u\in K \quad B(u,u)=\langle f,u\rangle\\&B(u,v)\geqslant \langle f,v\rangle \qquad \forall v\in K\end{aligned} \tag{5.1.38}$$

(3) 或者，如果 K 是 V 中的闭子空间，那么

$$u \in K \quad B(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in K \tag{5.1.39}$$

证 由定理 5.1.7 的证明过程可知，极小值问题 (5.1.36) 等价于求 u_f 在 K 上的投影 . 设投影为 u，u 可以表述为

$$u \in K,\ B(u_f - u, v - u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{5.1.40}$$

这表明向量 $u_f - u$ 和 $v - u$ 的夹角是钝角，(5.1.40) 也可以写成

$$B(u, v - u) \geqslant B(u_f, v - u) = \langle f, v - u \rangle$$

这就证明了 (5.1.37).

如果 K 是 V 中顶点在 O 的闭凸锥，只要 $v \in K$，那么 $u + v$ 也属于 K，所以在 (5.1.37) 中用 $u + v$ 仍然成立 . 即

$$B(u,v) \geqslant \langle f, v \rangle$$

特别地 $B(u,u) \geqslant \langle f, u \rangle$. 另一方面在式 (5.1.37) 中令 $v = 0$，则得 $B(u,u) \leqslant \langle f, u \rangle$，所以式 (5.1.38) 成立，反之亦然 .

如果 K 是一个闭子空间，那么 (5.1.38) 对 v 和 $-v$ 均成立，于是有 $B(u,v) \geqslant \langle f, v \rangle$ 和 $B(u,v) \leqslant \langle f, v \rangle$，$\forall v \in K$. 故 (5.1.39) 成立 . 反之亦然 . 证毕 .

(5.1.37)—(5.1.39) 称为对应于 (5.1.36) 的变分问题 . 式 (5.1.39) 为 Galerkin 变分问题，(5.1.37) 和 (5.1.38) 称为变分不等式问题 .

利用 J 的可微性质也容易证明式 (5.1.37)—(5.1.39). 事实上，在第 3 小节里也证明了式 (5.1.39)，而且有

$$\langle J'(u), v \rangle = B(u,v) - \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in \mathrm{V}$$

设 u 是极小值问题 (5.1.36) 的解，那么若 $v = u + w \in K$ 是任意一个点，由于 $u + \theta w, \theta \in [0,1]$ 也在 K 内，故

$$0 \leqslant J(u + \theta w) - J(u) = \langle J'(u), w \rangle + \theta \|w\|_{\mathrm{V}} \varepsilon(\theta) \quad \forall \theta \in [0,1]$$

这里 $\lim\limits_{\theta \to 0} \varepsilon(\theta) = 0$，从而 $\langle J'(u), w \rangle \geqslant 0$，这就是 (5.1.37). 反之若式 (5.1.37) 成立，那么

$$\begin{aligned}\langle J'(u),w\rangle &= \langle J'(u),v-u\rangle \\ &= B(u,v-u)-\langle f,v-u\rangle \geqslant 0 \quad \forall v\in K\end{aligned}$$

另一方面

$$J''(u)(v,w)=B(v,w) \qquad \forall v,w\in \mathbf{V}$$

与 u 无关，由 Taylor 展式，对于任何一个点 $v=u+w\in K$

$$J(u+w)-J(u)=\langle J'(u),w\rangle+\frac{1}{2}B(w,w)\geqslant\frac{\mu}{2}\|w\|_{\mathbf{V}}^{2}$$

这说明 u 是 (5.1.36) 的解，(5.1.38) 也可以用类似的方法得到．

§ 5.2　混合问题和对偶原理

1　问题描述

一类相当广泛的带有约束的变分问题，可以归结为下面抽象的混合变分问题．

设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{M}$ 是两个 Hilbert 空间，$\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{M}}$ 分别为它们的范数，$\mathbf{X}'$, $\mathbf{M}'$ 分别为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{M}$ 的对偶空间．记 $\|\cdot\|_{\mathbf{X}'}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{M}'}$ 为对偶范数，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{X}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{M}}$ 分别为 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}'$ 和 $\mathbf{M}\times\mathbf{M}'$ 的对偶积，在不会引起混淆情况下，略去下标．

引入两个连续的双线性形式

$$a(\cdot,\cdot):\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}, \quad b(\cdot,\cdot):\mathbf{X}\times\mathbf{M}\to\mathbf{R}$$

定义范数 $\forall u,v\in\mathbf{X}$, $u\neq 0$, $v\neq 0$,

$$\|a\|=\sup\frac{a(u,v)}{\|u\|_{\mathbf{X}}\|v\|_{\mathbf{X}}}, \quad \|b\|=\sup\frac{b(v,\mu)}{\|v\|_{\mathbf{X}}\|\mu\|_{\mathbf{M}}}$$

考察下列变分问题：$\forall l\in\mathbf{X}',\chi\in\mathbf{M}'$, $\mu\in\mathbf{M}$, $\mu\neq 0$,

求 $(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$　使得

$$(Q)\quad a(u,v)+b(v,\lambda)=\langle l,v\rangle_{\mathbf{X}} \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.1}$$

$$b(u,\mu)=\langle\chi,\mu\rangle_{\mathbf{M}} \qquad \forall\mu\in\mathbf{M} \tag{5.2.2}$$

与 $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ 相应的线性有界算子 $A\in\pounds(\mathbf{X},\mathbf{X}')$, $B\in\pounds(\mathbf{X},\mathbf{M}')$

$$\langle Au,v\rangle_{\mathbf{X}}=a(u,v)\qquad\forall v\in\mathbf{X},\ u\in\mathbf{X}\tag{5.2.3}$$

$$\langle Bv,\mu\rangle_{\mathbf{M}}=b(v,\mu)\qquad\forall v\in\mathbf{X},\ \mu\in\mathbf{M}\tag{5.2.4}$$

记B'为B的转置算子

$$\langle v,B'\mu\rangle_{\mathbf{X}}=\langle Bv,\mu\rangle_{\mathbf{M}}=b(v,\mu)\quad\forall v\in\mathbf{X},\mu\in\mathbf{M}\tag{5.2.5}$$

容易验证

$$\|A\|_{\pounds(\mathbf{X},\mathbf{X}')}=\|a\|,\quad\|B\|_{\pounds(\mathbf{X},\mathbf{M}')}=\|b\|$$

那么问题(Q)可以表示为算子方程形式

$$\begin{cases}\text{求}(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}\text{使得}\\ Au+B'\lambda=l\qquad\text{在}\mathbf{X}'\text{内}\\ Bu=\chi\qquad\text{在}\mathbf{M}'\text{内}\end{cases}$$

引进另一线性算子 $\Phi\in\pounds(\mathbf{X}\times\mathbf{M},\mathbf{X}'\times\mathbf{M}')$:

$$\Phi(v,\mu)=(Av+B'\mu,Bv)\tag{5.2.6}$$

那么问题(Q)是适定的，当且仅当 Φ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{X}'\times\mathbf{M}'$ 上的同构.

设乘积空间 $\Sigma=\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 的对偶空间为 $\Sigma'=\mathbf{X}'\times\mathbf{M}'$, 范数为

$$\|(v,\mu)\|_{\Sigma}^{2}=\|v\|_{\mathbf{X}}^{2}+\|\mu\|_{\mathbf{M}}^{2}$$

若用双线性形式$\mathrm{B}(\cdot,\cdot):\Sigma\times\Sigma\to\mathbf{R}$

$$\mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu))=a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)\qquad\forall(u,\lambda),\ (v,\mu)\in\Sigma\tag{5.2.7}$$

以及线性泛函$F(v,\mu)$: $\Sigma\to\mathbf{R}$

$$F(v,\mu)=\langle l,v\rangle_{\mathbf{X}}+\langle\chi,\mu\rangle_{\mathbf{M}}\quad\forall(v,\mu)\in\Sigma\tag{5.2.8}$$

那么问题(Q)可以表示为

(S)　　求$(u,\lambda)\in\Sigma$, 使得

$$\mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu)) = F(v,\mu) \quad \forall (v,\mu)\in\Sigma \tag{5.2.9}$$

容易验证 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 和 $F(\cdot,\cdot)$ 都是连续的．即

$$\begin{aligned}|\mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu))| &\leqslant \|a\|\|u\|_{\mathbf{X}}\|v\|_{\mathbf{X}} + \|b\|(\|v\|_{\mathbf{X}}\|\lambda\|_{\mathbf{M}} \\ &\quad + \|u\|_{\mathbf{X}}\|\mu\|_{\mathbf{M}}) \\ &\leqslant \max(\|a\|,\|b\|)\|(u,\lambda)\|_{\Sigma}\|(v,\mu)\|_{\Sigma} \\ &\quad \forall (u,\lambda),(v,\mu)\in\Sigma\end{aligned}$$

$$|F(v,\mu)| \leqslant (\|l\|_{\mathbf{X}'} + \|\chi\|_{\mathbf{M}'})\|(v,\mu)\|_{\Sigma} \tag{5.2.10}$$

因此，与双线性形式 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 相对应的线性有界算子恰是由 (5.2.6) 所定义的 Φ，即

$$\langle \Phi(u,\lambda),(v,\mu)\rangle_{\Sigma} = \mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu)) \tag{5.2.11}$$

于是问题(S)等价于下列算子方程

$$\Phi(u,\lambda) = F \qquad 在\Sigma'内 \tag{5.2.12}$$

设

$$\mathbf{V} = \mathrm{Ker}(B) = \{v\in\mathbf{X}, Bv = 0\} = \{v\in\mathbf{X}, b(v,\mu) = 0, \quad \forall \mu\in\mathbf{M}\}$$

$$\mathbf{V}(\chi) = \{v\in\mathbf{X}, Bv = \chi\} = \{v\in\mathbf{X}, b(v,\mu) = \langle\chi,\mu\rangle, \quad \forall\mu\in\mathbf{M}\}$$

$$\mathbf{W} = \mathrm{Ker}(B') = \{\mu\in\mathbf{M}, B'\mu = 0\} = \{\mu\in\mathbf{M}, b(v,\mu) = 0, \quad \forall v\in\mathbf{X}\}$$

再引入商空间

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}/\mathbf{W}, \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{X}/\mathbf{V} \tag{5.2.13}$$

及等价类

$$[\mu] = \{\sigma\in\mathbf{M}, \mu-\sigma\in\mathbf{W}\}, \quad [u] = \{v\in\mathbf{X}, u-v\in\mathbf{V}\}$$

商范数

$$\|[\mu]\|_{Z} = \|\mu\|_{\mathbf{M}/\mathbf{W}} = \inf_{\mu_o\in\mathbf{W}}\|\mu+\mu_o\|_{\mathbf{M}}$$

$$\|[u]\|_{\mathbf{Y}} = \|u\|_{\mathbf{X}/\mathbf{V}} = \inf_{v\in\mathbf{V}}\|u+v\|_{\mathbf{X}}$$

由于 B，B' 均为连续的，所以 $\mathbf{V}$，$\mathbf{W}$ 均为闭子空间，且

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\oplus\mathbf{V}^{\perp}, \ \mathbf{M} = \mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^{\perp}$$

这里 $$\mathbf{V}^{\perp}=\{w\in\mathbf{X},(w,v)_{\mathbf{X}}=0,\ \forall v\in\mathbf{V}\}$$

$$\mathbf{W}^{\perp}=\{q\in\mathbf{M},(q,\mu)_{\mathbf{M}}=0,\ \forall\mu\in\mathbf{W}\}$$

由此，$\forall u\in\mathbf{X}$存在一个$u^{\perp}\in\mathbf{V}^{\perp}$，且

$$\|u^{\perp}\|_{\mathbf{X}}=\inf_{w\in\mathbf{V}}\|u-w\|_{\mathbf{X}} \tag{5.2.14}$$

那么，商范数

$$\|u\|_{\mathbf{Y}}=\|u^{\perp}\|_{\mathbf{X}} \tag{5.2.15}$$

还有$\forall u\in\mathbf{X}$，$u=u_o+u^{\perp}$，$u_o\in\mathbf{V}$，$u^{\perp}\in\mathbf{V}^{\perp}$

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbf{X}}&=(\|u_o\|_{\mathbf{X}}^2+\|u^{\perp}\|_{\mathbf{X}}^2)^{1/2}\leqslant\|u_o\|_{\mathbf{X}}+\|u^{\perp}\|_{\mathbf{X}}\\&=\|u_o\|_{\mathbf{X}}+\|u\|_{\mathbf{X}/\mathbf{V}}\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

同理 $$\begin{aligned}\|\mu\|_{\mathbf{M}}&=(\|\mu_o\|_{\mathbf{M}}^2+\|\mu^{\perp}\|_{\mathbf{M}}^2)^{1/2}\leqslant\|\mu_o\|_{\mathbf{M}}+\|\mu^{\perp}\|_{\mathbf{M}}\\&=\|\mu_o\|_{\mathbf{M}}+\|\mu\|_{\mathbf{M}/\mathbf{W}}\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

与问题(Q)相联系的，可以构造问题(P)

$$(P)\begin{cases}\text{求}u\in\mathbf{V}(\chi)\quad\text{使得}\\a(u,v)=\langle l,v\rangle_{\mathbf{X}}\qquad\forall v\in\mathbf{V}\end{cases} \tag{5.2.18}$$

或表示为 $\forall u_{\chi}\in\mathbf{V}(\chi)$

$$\begin{cases}\text{求}u_o\in\mathbf{V}\quad\text{使得}\\a(u_o,v)=\langle l,v\rangle_{\mathbf{X}}-a(u_{\chi},v)\qquad\forall v\in\mathbf{V}\end{cases} \tag{5.2.19}$$

那么$u=u_o+u_{\chi}$就是问题(P)的解.

显然，问题(Q)有解(u,λ)，则u必是问题(P)的解，但相反的结论要在一定条件下才成立.

2 存在性

根据广义Lax－Milgram定理，问题(Q)解的存在唯一的充分条件是双线性形式在$\Sigma\times\Sigma$上是连续的和弱强制.弱强制意

味着

(1) $\sup\limits_{\substack{\|(v,\mu)\|_\Sigma \leqslant 1 \\ (v,\mu)\in\Sigma}} |\mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu))| \geqslant \delta\|(u,\lambda)\|_\Sigma \quad \forall (u,\lambda)\in\Sigma$

这里$\delta > 0$为常数.

(2) $\sup\limits_{(u,\lambda)\in\Sigma} |\mathrm{B}((u,\lambda),(v,\mu))| > 0 \quad \forall (v,\mu) \neq 0, (v,\mu)\in\Sigma$

如果 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的，那么 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 也是对称的，则 (2) 可以从 (1) 得到，因而如果有

$$\sup_{(v,\mu)\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)|}{\|v\|_{\mathbf{X}}+\|\mu\|_{\mathbf{M}}} \geqslant \delta(\|u\|_{\mathbf{X}}+\|\lambda\|_{\mathbf{M}}) \quad (5.2.20)$$

那么就可以对问题 (S) 应用广义 Lax－Milgram 定理，问题 (S) 解的存在性就可以得到证明.

定理 5.2.1 设双线性形式 $a(\cdot,\cdot):\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 是连续和对称的，且是 V 强制的

$$a(v,v) \geqslant \alpha_o\|v\|_{\mathbf{X}}^2 \qquad \forall v\in\mathbf{V}=\mathrm{Ker}(B) \qquad (5.2.21)$$

而双线性形式 $b(\cdot,\cdot):\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 是连续的，并且满足 Babuska－Brezzi 条件（简称 BB 条件），即存在 $\beta > 0$，使得

$$\sup_{v\in\mathbf{X}\setminus\{0\}} \frac{|b(v,\lambda)|}{\|v\|_{\mathbf{X}}} \geqslant \beta\|[\lambda]\|_{\mathbf{Z}} = \beta \inf_{\lambda_o\in\mathrm{Ker}(B')} \|\lambda+\lambda_o\|_{\mathbf{M}} \qquad (5.2.22)$$

那么$\forall l\in\mathbf{X}'$，$\chi\in R(B)$，问题 (Q) 在 $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$ 中存在唯一解 $(u,[\lambda])$，且存在 $c > 0$ 使得

$$\|u\|_{\mathbf{X}}+\|[\lambda]\|_{\mathbf{Z}} \leqslant c(\|f\|_{\mathbf{X}'}+\|\chi\|_{\mathbf{M}'}) \qquad (5.2.23)$$

即在对于乘子 λ 精确到可加 $\mathrm{Ker}(B')$ 中任一个元素的意义下，是唯一的.

证 BB 条件 (5.2.22) 意味着算子 B' 视为 $\mathbf{Z}\to\mathbf{X}'$ 的线性连续算子时，是下有界的

$$\|B'\lambda\|_{X'} = \sup_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{|b(v,\lambda)|}{\|v\|_X} \geqslant \beta\|[\lambda]\|_Z \quad \forall\lambda\in \mathbf{M} \qquad (5.2.24)$$

正如在定理 5.1.1. 中所证明的，由下有界及连续性可以推出 B' 的值域 $R(B')$ 在 $\mathbf{X}'$ 中是闭的．因而算子 B 的值域 $R(B)\subset \mathbf{M}'$ 也是闭的，那么由算子 B 是 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}/\mathbf{V}\to R(B)\subset\mathbf{M}'$ 的一对一和满的连续映照，根据 Banach 定理，存在有界逆 B^{-1}，因而存在 $\gamma>0$，使得

$$\|Bu\|_{M'} = \sup_{\mu\in M\setminus\{0\}} \frac{|b(u,\mu)|}{\|\mu\|_M} \geqslant \gamma\|[u]\|_{X/\mathrm{Ker}(B)} \quad \forall u\in \mathbf{X} \qquad (5.2.25)$$

由此，$\forall(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$，注意 u_o 的定义有

$$\sup_{(v,\mu)\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)|}{\|v\|_X+\|\mu\|_M} \geqslant \sup_{v_o\in V\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v_o)|}{\|v_o\|_X}$$

$$\geqslant \sup_{v_o\in V\setminus\{0\}} \frac{|a(u_o,v_o)|}{\|v_o\|_X} \geqslant \alpha_o\|u_o\|_X$$

$$\sup_{(v,\mu)\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)|}{\|v\|_X+\|\mu\|_M} \geqslant \sup_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{|b(v,\lambda)|}{\|v\|_X}$$

$$\geqslant \beta\|[\lambda]\|_Z \quad \forall\lambda\in\mathbf{M}$$

$$\sup_{(v,\mu)\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)|}{\|v\|_X+\|\mu\|_M} \geqslant \sup_{\mu\in M\setminus\{0\}} \frac{|b(u,\mu)|}{\|\mu\|_M}$$

$$\geqslant \gamma\|[u]\|_Y \quad \forall u\in\mathbf{X}$$

上面三式相加，并且利用式 (5.2.16)，则有

$$\sup_{(v,\mu)\in\Sigma\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)+b(v,\lambda)+b(u,\mu)|}{\|v\|_X+\|\mu\|_M} \geqslant \frac{1}{3}\{\beta\|[\lambda]\|_Z+\alpha_o\|u_o\|_X$$

$$+\gamma\|[u]\|_Y\} \geqslant \alpha(\|u\|_X+\|[\lambda]\|_Z)$$

这就证明了双线性形式 B(・,・) 满足式 (5.2.20)，因而是弱强制的，应用广义 Lax－Milgram 定理，就可以得到定理的结论．

证毕.

BB 条件 (5.2.22) 表明，算子 B' 在 $\mathbf{Z}\to\mathbf{X}'$ 中是下有界. 为了得到问题 (Q) 在 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 中有唯一解，那么必须加强不等式 (5.2.22)，使得 B' 在 $\mathbf{M}\to\mathbf{X}'$ 中是下有界. 为此我们还须引入集合 $\mathbf{V}$ 之极集 V°，它的定义是

$$V^{\circ}=\{q\in\mathbf{X}',\langle q,v\rangle_{\mathbf{X}}=0,\quad \forall v\in\mathbf{V}\}$$

引理5.2.1 下列三个结论是等价的

(1) 存在一个常数 $\beta>0$ 使得

$$\inf_{\mu\in\mathbf{M}}\sup_{v\in\mathbf{X}}\frac{b(v,\mu)}{\|v\|_{\mathbf{X}}\|\mu\|_{\mathbf{M}}}\geqslant\beta \tag{5.2.26}$$

(2) 算子 B' 是 $\mathbf{M}$ 到 V° 上的同构，并且 B' 下有界. 即

$$\|B'\mu\|_{\mathbf{X}'}\geqslant\beta\|\mu\|_{\mathbf{M}}\qquad\forall\mu\in\mathbf{M} \tag{5.2.27}$$

(3) 算子 B 是 $\mathbf{V}^{\perp}$ 到 $\mathbf{M}'$ 上的同构，并且 B 下有界. 即

$$\|Bv\|_{\mathbf{M}'}\geqslant\beta\|v\|_{\mathbf{X}}\qquad\forall v\in\mathbf{V}^{\perp} \tag{5.2.28}$$

证 先证 (1) 和 (2) 是等价的. 由式 (5.2.5), (2) 意味着

$$\|B'\mu\|_{\mathbf{X}'}=\sup_{\substack{v\in\mathbf{X}\\ v\neq 0}}\frac{\langle B'\mu,v\rangle}{\|v\|_{\mathbf{X}}}\geqslant\beta\|\mu\|_{\mathbf{M}}\quad\forall\mu\in M \tag{5.2.29}$$

这说明 (5.2.26) 与 (5.2.27) 等价，因而 (2) 可以推出 (1). 现在来证 (1) 推出 (2). 由于 B' 是连续的，且由式 (5.2.26) 知 B' 下有界，映照是一对一的和值域 $R(B')$ 是闭的，根据 Banach 定理，B' 在 $R(B')$ 上有有界逆，即 B' 是 $\mathbf{M}$ 到 $R(B')$ 上的同构. 另一方面，由闭值域定理得到 (参考 Yosida[29])

$$R(B')=(\mathrm{Ker}B)^{\circ}=V^{\circ}$$

故由(1)推出(2).

以下证明 (2) 和 (3) 等价的. 设对任一 $v\in\mathbf{X}$，记 $v^{\perp}$ 为 v 在 $\mathbf{V}^{\perp}$ 上的投影，那么 $\forall g\in(\mathbf{V}^{\perp})'$，存在 $\tilde{g}\in\mathbf{X}'$，使得

$$\langle \tilde{g}, v\rangle = \langle g, v^{\perp}\rangle \qquad \forall v \in \mathbf{X}$$

显然，$\tilde{g} \in V^{\circ}$ 且易验证 $g \to \tilde{g}$ 是 $(\mathbf{V}^{\perp})' \to V^{\circ}$ 上的等距同构，故 $(\mathbf{V}^{\perp})'$ 等同于 V°. 因而 B 是 $\mathbf{V}^{\perp}$ 到 $\mathbf{M}'$ 上的同构，并设

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{M}', \mathbf{V}^{\perp})} \leqslant \beta^{-1}$$

当且仅当 B' 是 $\mathbf{M} \to (\mathbf{V}^{\perp})' = V^{\circ}$ 上同构，且有

$$\|(B')^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}', \mathbf{M})} \leqslant \beta^{-1}$$

故(2)和(3)等价. 证毕.

为了以后叙述方便，引入线性连续算子 $\Pi \in \mathcal{L}(\mathbf{X}', \mathbf{V}')$

$$\langle \Pi f, v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall f \in \mathbf{X}',\ v \in \mathbf{V}$$

显然

$$\|\Pi f\|_{\mathbf{V}'} \leqslant \|f\|_{\mathbf{X}'}$$

定理 5.2.2 问题 (Q) 是适定的，即由式 (5.2.6) 定义的 Φ 是 $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$ 到 $\mathbf{X}' \times \mathbf{M}'$ 上的同构，当且仅当

(1) 算子 ΠA 是从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的同构;

(2) 双线性形式 $b(\cdot, \cdot)$ 满足 inf-sup 条件 (5.2.26).

证 充分性 由引理 5.2.1 及式 (5.2.26)，可以推出存在唯一的 $u_o \in \mathbf{V}^{\perp}$，使得

$$Bu_o = \chi, \ \|u_o\|_{\mathbf{X}} \leqslant B^{-1} \|\chi\|_{\mathbf{M}'}$$

因而问题(P)可以表示为

$$\begin{cases} \text{求} \quad w = u - u_o \in \mathbf{V} \text{使得} \\ a(w, v) = \langle l, v\rangle - a(u_o, v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

或写成算子形式

$$\Pi A w = \Pi(l - Au_o)$$

由于 ΠA 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的同构，问题 (P) 有唯一的解 $u = u_o + w \in V(\chi)$，并且有

$$\|w\|_{\mathbf{X}} \leqslant c_1\|\Pi(l-Au_o)\|_{\mathbf{V}'} \leqslant c_1\|(l-Au_o)\|_{\mathbf{X}'}$$

故$\|u\|_{\mathbf{X}} \leqslant \|u_o\|_{\mathbf{X}} + c_1\|l\|_{\mathbf{X}'} + c_1\|Au_o\|_{\mathbf{X}'} \leqslant c_2(\|l\|_{\mathbf{X}'} + \|\chi\|_{\mathbf{M}'})$

由于 $l-Au\in V^\circ$，根据引理 5.2.1 存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{M}$，使得

$$B'\lambda = l - Au$$

且 $$\|\lambda\|_{\mathbf{M}} \leqslant \beta^{-1}\|l-Au\|_{\mathbf{X}'} \leqslant c_3(\|l\|_{\mathbf{X}'} + \|\chi\|_{\mathbf{M}'})$$

因此，问题 (Q) 有唯一解 (u,λ)，且 $(l,\chi)\to(u,\lambda)$ 是从 $\mathbf{X}'\times\mathbf{M}'$ 到 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 上的连续映照，这就意味着 Φ 是从 $\mathbf{X}'\times\mathbf{M}'$ 到 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 上的同构．

必要性　设 Φ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{X}'\times\mathbf{M}'$ 上的同构，先证 inf-sup 条件 (5.2.26) 成立，若 $\chi\in\mathbf{M}'$，$(u,\lambda)=\Phi^{-1}(0,\chi)$，则有 $Bu=\chi$，所以 $R(B)=\mathbf{M}'$．因而 B 是从 $\mathbf{V}^\perp$ 到 $\mathbf{M}'$ 的连续和一对一的满映照，也就是 $\mathbf{V}^\perp$ 到 $\mathbf{M}'$ 上的同构．由引理 5.2.1，条件 (5.2.26) 成立．

现在来证 ΠA 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的同构．事实上，设 $u\in\mathbf{V}$ 使得 $\Pi Au=0$，则 $Au\in V^\circ$．由于 inf-sup 条件成立，从引理 5.2.1 可知，B' 是从 $\mathbf{M}$ 到 V° 上的同构，因而存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{M}$ 使得 $B'\lambda=-Au$．于是 $\Phi(u,\lambda)=(0,0)$，因此 $u=0$．这就证明了 ΠA 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的一对一的映照．还要证 ΠA 也是满映照，设 $g\in\mathbf{V}'$，至少存在一个元素 $l\in\mathbf{X}'$ 使得 $g=\Pi l$，令 $(u,\lambda)=\Phi^{-1}(l,0)$，显然 $u\in\mathbf{V}$ 且 $Au+B'\lambda=l$.

由于对所有的 $v\in\mathbf{V}$ 有

$$\langle\Pi B'\lambda,v\rangle_{\mathbf{V}} = \langle B'\lambda,v\rangle_{\mathbf{X}} = \langle\lambda,Bv\rangle_{\mathbf{M}} = 0$$

得$\Pi B'\lambda=0$，所以

$$\Pi Au = \Pi l = g$$

这说明 ΠA 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的连续一对一满映照，因而是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的同构．证毕．

定理 5.2.3 设双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制的．即存在 $\alpha_o > 0$，使得式 (5.2.21) 成立．亦即

$$a(v,v) \geqslant \alpha_o \|v\|_{\mathbf{X}}^2 \qquad \forall v \in \mathbf{V}$$

那么，问题 (Q) 是适定的充分必要条件是，双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足 inf－sup 条件 (5.2.26).

证 设 $l \in \mathbf{V}'$，由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制的，应用 Lax－Milgram 定理，存在唯一的 $u \in \mathbf{V}$，使得

$$a(u,v) = \langle l,v \rangle \qquad \forall v \in \mathbf{V}$$

或等价地
$$\Pi A u = l$$

并且 $l \to u$ 的映照是连续的，所以 ΠA 是 V 到 V′ 的同构．从定理 5.2.2 就可以推出结论．证毕．

推论 5.2.1 设双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$是 V 强制的，且三重结构 $(\mathbf{X},\mathbf{M},b(\cdot,\cdot))$满足 inf-sup 条件(5.2.26).那么问题(Q)与问题(P)是等价的.即如果(u,λ)是问题(Q)的解，那么 u 也是问题(P)的解.反之，如果问题(P)有解 $u \in \mathbf{X}$,那么必存在唯一的 $\lambda \in \mathbf{M}$，使得 (u,λ)是问题(Q)的解.

证 设 (u,λ) 是问题 (Q) 的解，那么由 $V(\chi)$ 的定义，可知 u 必是问题 (P) 的解．反之，如果问题 (P) 有解 u，由于 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 强制，能够推出 ΠA 是 V 到 V′ 的同构，所以由定理 5.2.2 的证明可知，$l - Au \in V^\circ$，且由引理 5.2.1 知，存在唯一的 $\lambda \in \mathbf{M}$，使得

$$B'\lambda = l - Au$$

故 (u,λ) 问题 (Q) 的解．证毕．

条件 (5.2.26) 式表明，$V(\chi)$ 是非空的．因此条件 (5.2.21) 有意义．定理 5.2.3 表明，当 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制时，问题 (Q) 是否有唯一解，完全依赖于三重结构 $(\mathbf{X},\mathbf{M},b(\cdot,\cdot))$ 的 inf－sup 条件 (5.2.26)，它在研究这类变分问题中起本质作用．

BB 条件 (5.2.26) 成立，则算子 B' 在 M 中下有界，即

$$\|B'\chi\|_{\mathbf{X}'} \geqslant \beta\|\chi\|_{\mathbf{M}} \qquad \forall \chi\in\mathbf{M}$$

这说明，$\mathrm{Ker}(B')=\{0\}$. 这保证了乘子 λ 的唯一性，所以条件 (5.2.26) 保证问题 (Q) 在 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 中的可解性.

3　鞍点方法和对偶原理

双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 的 Galerkin 变分问题在适当条件下，可以等价于一个能量泛函的极小化问题. 同样问题 (P) 和 (Q) 也等价于一个极小化问题. 事实上，正如我们在 § 5.1 中所讨论的，可以引入二次泛函

$$J:\ \mathbf{X}\to\mathbf{R},\ J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle l,v\rangle \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.30}$$

它表示与问题 (P) 相联系的能量泛函. 同时，也可以引入 Lagrange 泛函 $\pounds(v,\mu)$:

$$\pounds(v,\mu)=J(v)+b(v,\mu)-\langle\chi,\mu\rangle \quad \forall v\in\mathbf{X},\ \mu\in\mathbf{M} \tag{5.2.31}$$

它表示与问题(Q)相联系的泛函.由式(5.2.7)得

$$\pounds(v,\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{B}((v,\mu),(v,\mu))-\langle l,v\rangle-\langle\chi,\mu\rangle$$

以下研究问题(L)

$$(L)\begin{cases}\text{求}(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M},\text{使得}\\ \pounds(u,\mu)\leqslant\pounds(u,\lambda)\leqslant\pounds(v,\lambda) \quad \forall v\in\mathbf{X},\mu\in\mathbf{M}\end{cases} \tag{5.2.32}$$

它的解 (u,λ) 称为 Lagrange 泛函 $\pounds$ 的鞍点.

定理 5.2.4　设定理 5.2.2 中条件 (1) 和 (2) 成立，且双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称和在 $\mathbf{X}$ 上半正定的. 即

$$a(u,v)=a(v,u) \qquad \forall u,v\in\mathbf{X}$$
$$a(u,u)\geqslant 0 \qquad \forall u\in\mathbf{X} \tag{5.2.33}$$

那么，问题 (L) 有唯一解 $(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$，它也是问题 (Q) 的解.

证　不等式(5.2.32)中第一个不等式等价于

$$b(u,\mu-\lambda)\leqslant\langle\chi,\mu-\lambda\rangle \qquad \forall\mu\in\mathbf{M}$$

由于 μ 是 $\mathbf{M}$ 中任一元素，这就意味着

$$b(u,\mu) = \langle \chi,\mu \rangle \qquad \forall \mu \in \mathbf{M}$$

而式 (5.2.32) 中第二个不等式等价于

$$\pounds(u,\lambda) = \inf_{v \in \mathbf{X}} \pounds(v,\lambda)$$

由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的，所以 $\pounds(u,\lambda)$ 导数

$$D_v \pounds(u,\lambda) \cdot v = a(u,v) + b(v,\lambda) - \langle l,v \rangle$$

利用 (5.2.33)，二阶导数满足

$$D^2_{vv} \pounds(u,\lambda) \cdot (v,v) = a(v,v) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbf{X}$$

所以 $v \to \pounds(v,\lambda)$ 是凸泛函，它的极小值的解 u 由条件 $D_v \pounds(u,\lambda) \cdot v = 0$ 所刻画．即

$$a(u,v) + b(v,\lambda) = \langle l,v \rangle \qquad \forall v \in \mathbf{X}$$

如此，(u,λ) 是 $\pounds$ 的鞍点，当且仅当它也是问题 (Q) 的解．证毕．

定理 5.2.5 在定理 5.2.4 假设下，问题 (Q) 的解 (u,λ) 是由下列问题所刻画的：

$$\min_{v \in \mathbf{X}} (\sup_{\mu \in \mathbf{M}} \pounds(v,\mu)) = \pounds(u,\lambda) = \max_{\mu \in \mathbf{M}} (\inf_{v \in \mathbf{X}} \pounds(v,\mu)) \tag{5.2.34}$$

这里 min 或 max 意味着可以取到极值．

证 如果我们能证明 Lagrange 泛函有鞍点，当且仅当

$$\min_{v \in \mathbf{X}} (\sup_{\mu \in \mathbf{M}} \pounds(v,\mu)) = \max_{\mu \in \mathbf{M}} (\inf_{v \in \mathbf{X}} \pounds(v,\mu)) \tag{5.2.35}$$

及这个量等于 $\pounds(u,\lambda)$，那么利用定理 5.2.4 及问题 (Q) 的唯一性，就可以得到本定理的结论．

为证明式(5.2.35).设

$$\varphi(v) = \sup_{\mu \in \mathbf{M}} \pounds(v,\mu), \quad \varphi^*(\mu) = \inf_{v \in \mathbf{X}} \pounds(v,\mu)$$

由于 $\qquad \pounds(v,\mu) \leqslant \varphi(v) \qquad \forall v \in \mathbf{X},\ \mu \in \mathbf{M}$

从而有 $$\varphi^*(\mu) \leqslant \inf_{v\in X}\varphi(v) \quad \forall \mu\in M$$

因此 $$\sup_{\mu\in M}\varphi^*(\mu) \leqslant \inf_{v\in X}\varphi(v) \tag{5.2.36}$$

设(u,λ)是$\mathcal{L}$的鞍点，这就意味着

$$\varphi(u) \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda) \leqslant \varphi^*(\lambda)$$

因而有

$$\inf_{v\in X}\varphi(v) \leqslant \varphi(u) \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda) \leqslant \varphi^*(\lambda) \leqslant \sup_{\mu\in M}\varphi^*(\mu)$$

利用式 (5.2.36) 可以推出

$$\inf_{v\in X}\varphi(v) = \mathcal{L}(u,\lambda) = \sup_{\mu\in M}\varphi^*(\mu)$$

从而得式 (5.2.35).

相反地，如果式 (5.2.35) 成立，而 u 是 $\varphi(v)$ 极小化的解，λ 是 φ^* 的极大点，那么，(5.2.35) 就是

$$\varphi(u) = \varphi^*(\lambda)$$

另一方面，由 φ 和 φ^* 的定义可以推出

$$\varphi^*(\lambda) \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda) \leqslant \varphi(u)$$

所以 $$\varphi(u) = \mathcal{L}(u,\lambda) = \varphi^*(\lambda)$$

这说明(u,λ)是$\mathcal{L}$的鞍点.证毕.

注意到

$$\sup_{\mu\in M}\mathcal{L}(v,\mu) = \begin{cases} \infty & \text{如果} v\notin V(\chi) \\ J(v) & \text{如果} v\in V(\chi) \end{cases}$$

因而有

$$\inf_{v\in X}\ \sup_{\mu\in M}\mathcal{L}(v,\mu) = \inf_{v\in V(\chi)} J(v)$$

由于 $b(u,\mu) = \langle \chi,\mu\rangle$，所以 (5.2.35) 第一式，可以表示为

$$J(u)=\inf_{v\in\mathbf{X}}\ \sup_{\mu\in\mathbf{M}}\pounds(v,\mu)=\inf_{\mu\in V(\chi)}J(v)$$

即
$$J(u)=\inf_{v\in V(\chi)}J(v) \tag{5.2.37}$$

这是一个有约束的极小化问题．上述讨论表明，问题 (P) 的解可以用有约束的极小化问题 (5.2.37) 的解来刻画．

以下设双线性形式$a(\cdot,\cdot)$是$\mathbf{X}$强制的，即

$$a(v,v)\geqslant\alpha_o\|v\|_{\mathbf{X}}^2 \qquad \forall v\in\mathbf{X},\ \alpha_o>0 \tag{5.2.38}$$

那么，$\forall\mu\in\mathbf{M}$，定义 $u(\mu)$ 是下列极小化问题的解

$$\pounds(u(\mu),\mu)=\inf_{v\in\mathbf{X}}\pounds(v,\mu)$$

在证明定理 5.2.4 时，业已证明，这个极小化问题等价于变分问题

$$a(u(\mu),v)=\langle l,v\rangle-b(v,\mu) \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.39}$$

由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{X}$ 强制的，所以式 (5.2.39) 有唯一解 $u(\mu)\in\mathbf{X}$. 因为 $u(\lambda)=u$，故

$$\pounds(u(\lambda),\lambda)=\max_{\mu\in\mathbf{M}}\pounds(u(\mu),\mu)$$

注意到

$$\pounds(u(\mu),\mu)=\frac{1}{2}a(u(\mu),u(\mu))-\langle l,u(\mu)\rangle+b(u(\mu),\mu)-\langle\chi,\mu\rangle$$

由式(5.2.39)

$$\pounds(u(\mu),\mu)=-\frac{1}{2}a(u(\mu),u(\mu))-\langle\chi,\mu\rangle$$

令
$$k(\mu)=\frac{1}{2}a(u(\mu),u(\mu))+\langle\chi,\mu\rangle$$

那么极小化问题 (5.2.37) 的对偶问题为

$$k(\lambda)=\min_{\mu\in\mathbf{M}}k(\mu) \tag{5.2.40}$$

所以问题 (Q) 的解中变量 λ 是由无约束极小化问题 (5.2.40) 的解

来刻画．

Lagrange 鞍点问题可以化为两个极小化问题，一个是有约束的极小化问题，另一个则是无约束极小化问题．

4 **正则化**

我们力图给问题 (Q) 以一个适当的扰动，使其得到一个正则问题，它在实践上容易求解．为此，引入一个新的双线性形式

$$c(\cdot,\cdot):\ \mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathbf{R}$$

它的范数

$$\|c\| = \sup_{\lambda,\mu\in\mathbf{M},\ \lambda\neq 0,\mu\neq 0}\frac{c(\lambda,\mu)}{\|\lambda\|_{\mathbf{M}}\|\mu\|_{\mathbf{M}}}$$

并且设 $c(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{M}$ 强制，即存在 $\gamma>0$，使得

$$c(\mu,\mu)\geqslant\gamma\|\mu\|_{\mathbf{M}}^2\qquad\forall\mu\in\mathbf{M}\tag{5.2.41}$$

与 $c(\cdot,\cdot)$ 对应的算子 $C\in\mathcal{L}(\mathbf{M},\mathbf{M}')$：

$$\langle C\lambda,\mu\rangle=c(\lambda,\mu)\qquad\forall\lambda,\mu\in\mathbf{M}\tag{5.2.42}$$

设 $\varepsilon>0$ 是一个任意小的正数，作问题 (Q_ε):

$$\begin{cases}\text{求}(u_\varepsilon,\lambda_\varepsilon)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}\text{使得}\\ a(u_\varepsilon,v)+b(v,\lambda_\varepsilon)=\langle l,v\rangle\quad\forall v\in\mathbf{X}\\ -\varepsilon c(\lambda_\varepsilon,\mu)+b(u_\varepsilon,\mu)=\langle\chi,\mu\rangle\quad\forall\mu\in\mathbf{M}\end{cases}\tag{5.2.43}$$

算子 C 是非奇异的，所以式 (5.2.43) 第二式可以表示为

$$\lambda_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}C^{-1}(Bu_\varepsilon-\chi)\tag{5.2.44}$$

代入 (5.2.43) 第一式后，得

$$\begin{cases}\text{求}u_\varepsilon\in\mathbf{X},\ \text{使得}\\ a(u_\varepsilon,v)+\varepsilon^{-1}\langle C^{-1}Bu_\varepsilon,Bv\rangle=\langle l,v\rangle+\varepsilon^{-1}\langle C^{-1}\chi,Bv\rangle\end{cases}$$

$$\forall v\in\mathbf{X}\tag{5.2.45}$$

定理 5.2.6 设三重结构 $(\mathbf{X},\mathbf{M},b(\cdot,\cdot))$ 满足 BB 条件，双线性 c 是 $\mathbf{M}$ 强制的，而双线性 $a(\cdot,\cdot)$ 满足：存在 $\alpha>0$ 使得

$$a(v,v)+\langle C^{-1}Bv,Bv\rangle \geqslant \alpha\|v\|_{\mathbf{X}}^2 \quad \forall \in \mathbf{X} \tag{5.2.46}$$

那么问题 (Q) 和 $(Q_\varepsilon)(\forall \varepsilon \leqslant 1)$ 在 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 中均有唯一解 (u,λ) 和 $(u_\varepsilon,\lambda_\varepsilon)$，并且存在 $\varepsilon_o>0$，$\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_o$ 充分小，成立

$$\|u_\varepsilon-u\|_{\mathbf{X}}+\|\lambda_\varepsilon-\lambda\|_{\mathbf{M}} \leqslant k\varepsilon(\|l\|_{\mathbf{X}'}+\|\chi\|_{\mathbf{M}'}) \tag{5.2.47}$$

其中常数 k 仅仅依赖于 α, β, $\|a\|$, $\|b\|$ 和 $\|c\|$.

证 显然，由于 $Bv=0$, $\forall v\in\mathbf{V}$. 所以由式 (5.2.46) 可以推出 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}$ 强制的．由定理 5.2.3 可知，问题 (Q) 有唯一解 $(u,\lambda)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$. 由于式 (5.2.28) 和 (5.2.41)，有

$$\begin{aligned}\langle C^{-1}Bv,Bv\rangle &= C(C^{-1}Bv,C^{-1}Bv)\geqslant \gamma\|C^{-1}Bv\|_{\mathbf{M}}^2 \\ &\geqslant \gamma_1\|Bv\|_{\mathbf{M}'}^2 \geqslant \gamma_1\beta\|v\|_{\mathbf{X}}^2 \quad \forall v\in\mathbf{V}^{\perp}\end{aligned}$$

所以

$$\langle C^{-1}Bv,Bv\rangle \geqslant 0 \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.48}$$

令

$$a_\varepsilon(u,v):=a(u,v)+\frac{1}{\varepsilon}\langle C^{-1}Bu,Bv\rangle$$

则

$$a_\varepsilon(u,u)\geqslant \alpha_o\|u\|_{\mathbf{X}}^2 \quad \forall u\in\mathbf{X}$$

因此问题 (P_ε) 有唯一 $u_\varepsilon\in\mathbf{X}$，由 (5.2.44) 可以定 λ_ε，那么 $(u_\varepsilon,\lambda_\lambda)$ 便是问题 (Q_ε) 的唯一解．

为了证明式 (5.2.47)，由式 (5.2.1)，(5.2.2) 和 (5.2.43) 可得

$$\begin{cases} a(u_\varepsilon-u,v)+b(v,\lambda_\varepsilon-\lambda)=0 & \forall v\in\mathbf{X} \\ -\varepsilon c(\lambda_\varepsilon,\mu)+b(u_\varepsilon-u,\mu)=0 & \forall \mu\in\mathbf{M}\end{cases} \tag{5.2.49}$$

由式 (5.2.49) 和 BB 条件，则有

$$\beta\|\lambda_\varepsilon-\lambda\|_{\mathbf{M}} \leqslant \sup_{v\in X\setminus\{0\}}\frac{b(v,\lambda_\varepsilon-\lambda)}{\|v\|_{\mathbf{X}}} \leqslant \|a\|\|u_\varepsilon-u\|_{\mathbf{X}}$$

从而得

$$\|\lambda_\varepsilon-\lambda\|_M\leqslant\|a\|\beta^{-1}\|u-u_\varepsilon\|_X \tag{5.2.50}$$

另外，若在(5.2.49)中取$v=u_\varepsilon-u$，$\mu=\lambda_\varepsilon-\lambda$，则

$$\begin{aligned}a(u_\varepsilon-u,u_\varepsilon-u)&=-\varepsilon c(\lambda,\lambda_\varepsilon-\lambda)-\varepsilon c(\lambda_\varepsilon-\lambda,\lambda_\varepsilon-\lambda)\\&\leqslant-\varepsilon c(\lambda,\lambda_\varepsilon-\lambda)\\&\leqslant\varepsilon\beta^{-1}\|a\|\|c\|\|\lambda\|_M\|u-u_\varepsilon\|_X\end{aligned}$$

利用式 (5.2.49) 第二式有 $B(u_\varepsilon-u)=\varepsilon C\lambda_\varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}\langle C^{-1}B(u_\varepsilon-u),B(u_\varepsilon-u)\rangle&=\varepsilon^2\langle C\lambda_\varepsilon,\lambda_\varepsilon\rangle=\varepsilon^2c(\lambda_\varepsilon,\lambda_\varepsilon)\\&\leqslant\varepsilon^2\|c\|\|\lambda_\varepsilon\|_M^2\end{aligned}$$

与 (5.2.50) 联立，有

$$\begin{aligned}&\langle C^{-1}B(u_\varepsilon-u),B(u_\varepsilon-u)\rangle\\&\leqslant\varepsilon^2\|c\|(\beta^{-1}\|a\|\|u_\varepsilon-u\|_X+\|\lambda\|_M)^2\end{aligned}$$

代入(5.2.46)，并令$\chi=\|u_\varepsilon-u\|_X$，有

$$\alpha\chi^2\leqslant\varepsilon^2c_1(\|\lambda\|_M+\chi)^2+\varepsilon c_2\|\lambda\|_M\chi$$

当ε充分小时，可以推出

$$\|u_\varepsilon-u\|_X\leqslant\varepsilon c_3\|\lambda\|_M$$

从而得到 (5.2.47)，证毕 .

问题 (Q_ε) 存在唯一解，不依赖于 BB 条件，从而 $-\varepsilon c(\lambda_\varepsilon,\mu)$ 扮演了正则化的角色，所以，这个方法也称为正则化方法 .

尤其令人感兴趣的是，当 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $c(\cdot,\cdot)$ 是对称的，则 $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ 也是对称的 . 引入 Ritz 泛函，它是原问题的加罚泛函

$$J_\varepsilon(v)=J(v)+\langle C^{-1}(Bv-\chi),Bv-\chi\rangle/2\varepsilon$$

注意到，当 $\varepsilon \leqslant 1$，$a_\varepsilon(u,v)$ 是 $\mathbf{X}$ 强制的．从而问题 (P_ε) 等价于 Ritz 变分问题

$$J_\varepsilon(u) = \inf_{v\in\mathbf{X}} J_\varepsilon(v)$$

这个极小化问题是无约束问题．

运用逐步迭代，可以改善定理 5.2.6 的逼近结果．实际上设 λ_{n-1} 已知，则(u_n,λ_n)为下列问题的解

$$\begin{cases} a(u_n,v) + b(v,\lambda_n) = 0 & \forall v\in\mathbf{X} \\ b(u_n,\mu) = c(\lambda_{n-1},\mu) & \forall \mu\in\mathbf{M} \end{cases} \tag{5.2.51}$$

显然，由定理 5.2.3 知式 (5.2.51) 有唯一解．

定理 5.2.7 设 5.2.6 的条件满足，则 $\forall N \geqslant 1$，$\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$，有

$$\|u_\varepsilon - u - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i u_i\|_{\mathbf{X}} + \|\lambda_\varepsilon - \lambda - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i \lambda_i\|_{\mathbf{M}} \leqslant K_N \varepsilon^{N+1}(\|l\|_{\mathbf{X}'} + \|\chi\|_{\mathbf{M}'}) \tag{5.2.52}$$

其中 K_N 是只与 $N,\alpha,\beta,\|a\|,\|b\|,\|c\|$ 有关的常数．

证 设 $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i u_i, \rho_\varepsilon = \lambda_\varepsilon - \lambda - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i \lambda_i$，那么

$$\begin{cases} a(w_\varepsilon,v) + b(v,\rho_\varepsilon) = 0 & \forall v\in\mathbf{X} \\ -\varepsilon c(\rho_\varepsilon,\mu) + b(w_\varepsilon,\mu) = \varepsilon^{N+1} c(\lambda_N,\mu) & \forall \mu\in\mathbf{M} \end{cases} \tag{5.2.53}$$

由(5.2.53)的第一式和BB条件，有

$$\|\rho_\varepsilon\|_{\mathbf{M}} \leqslant \beta^{-1}\|a\|\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}} \tag{5.2.54}$$

在 (5,2.53) 中取 $v = w_\varepsilon$，$\mu = \rho_\varepsilon$ 得

$$\begin{aligned} a(w_\varepsilon,w_\varepsilon) &= -\varepsilon c(\rho_\varepsilon,\rho_\varepsilon) - \varepsilon^{N+1} c(\lambda_N,\rho_\varepsilon) \\ &\leqslant -\varepsilon^{N+1} c(\lambda_N,\rho_\varepsilon) \end{aligned}$$

从而 $a(w_\varepsilon,w_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^{N+1}\beta^{-1}\|a\|\|c\|\|\lambda_N\|_{\mathbf{M}}\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}}$.

而由 (5.2.53) 第二式，则有

$$Bw_\varepsilon = \varepsilon C(\rho_\varepsilon + \varepsilon^N \lambda_N)$$

因此

$$\langle C^{-1}Bw_\varepsilon, Bw_\varepsilon\rangle = \varepsilon^2 c(\rho_\varepsilon + \varepsilon^N\lambda_N, \rho_\varepsilon + \varepsilon^N\lambda_N)$$
$$\leqslant 2\varepsilon^2\|c\|(\|\rho_\varepsilon\|_{\mathbf{M}}^2 + \varepsilon^{2N}\|\lambda_N\|_{\mathbf{M}}^2)$$

利用 (5.2.46) 有

$$\alpha\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}}^{2'} \leqslant c_1\varepsilon^2\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}}^2 + c_2\varepsilon^{N+1}\|\lambda_N\|_{\mathbf{M}}\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}} + c_3\varepsilon^{2N+2}\|\lambda_N\|_{\mathbf{M}}^2$$

对于充分小的 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$，有

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathbf{X}} \leqslant c_4\varepsilon^{N+1}\|\lambda_N\| \tag{5.2.55}$$

利用式(5.2.51)和定理5.2.3得

$$\|\lambda_N\|_{\mathbf{M}} \leqslant c_5\|\lambda\|_{\mathbf{M}} \leqslant c_6(\|l\|_{\mathbf{X}'} + \|\chi\|_{\mathbf{M}'})$$

综合上式和 (5.2.54), (5.2.55), 便可得到 (5.2.52). 证毕.

利用正则化理论，同样可以引入增广 Lagrange 泛函 $\pounds_r(v,\mu)$ 和增广能量泛函 J_r:

$$J_r(v) = J(v) + r\langle C^{-1}(Bv-\chi), Bv-\chi\rangle/2 \tag{5.2.56}$$

$$\pounds_r(v,\mu) = J_r(v) + b(v,\mu) - \langle\chi,\mu\rangle_{\mathbf{M}} \tag{5.2.57}$$

这里$r > 0$为参数, 显然

$$J_r(v) = J(v) \qquad \forall v \in V(\chi) \tag{5.2.58}$$

所以，u 仍然是下列有约束的极小化问题的解

$$J_r(u) = \inf_{v\in V(\chi)} J_r(v) \tag{5.2.59}$$

定理 5.2.8 设三重结构 $(\mathbf{X},\mathbf{M},b(\cdot,\cdot))$ 满足条件 (5.2.26),

双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $c(\cdot,\cdot)$ 是对称的，分别是 $\mathbf{X}$ 强制和 $\mathbf{M}$ 强制，并且

$$a(v,v) + r\langle C^{-1}Bv,Bv\rangle \geqslant 0 \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.60}$$

则问题 (Q) 的解 (u,λ) 也是增广 Lagrange 泛函 $\pounds_r$ 的唯一鞍点，也是下列问题的解

$$\min_{v\in\mathbf{X}}(\sup_{\mu\in\mathbf{M}}\pounds_r(v,\mu)) = \pounds_r(u,\lambda) = \max_{\mu\in\mathbf{M}}(\inf_{v\in\mathbf{X}}\pounds_r(v,\mu)) \tag{5.2.61}$$

证 注意

$$D_u\pounds_r(u,\lambda)v = a(u,v) - \langle l,v\rangle + r\langle C^{-1}(Bu-\chi),Bv\rangle + b(v,\lambda)$$

$$D^2_{uu}\pounds_r(u,\lambda)(v,v) = a(v,v) + r\langle C^{-1}Bv,Bv\rangle$$

类似定理 5.2.4, 5.2.5 的证明，可以得到本定理的结论．证毕．

和本节第三部分讨论一样，有

$$\inf_{v\in\mathbf{X}}\sup_{\mu\in\mathbf{M}}\pounds_r(v,\mu) = \inf_{v\in V(\chi)}J_r(v)$$

所以，(5.2.61) 第一个等式等价于 (5.2.60)，而第二个等式为 (5.2.59) 之对偶问题．

令 $$a_r(u,v) = a(u,v) + r\langle C^{-1}Bu,Bv\rangle$$

则 $a_r(\cdot,\cdot)$ 是V强制的：

$$a_r(v,v) \geqslant \alpha_r\|v\|^2_{\mathbf{X}} \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.62}$$

显然极小化问题

$$\pounds_r(u_r(\mu),\mu) = \inf_{v\in\mathbf{X}}\pounds_r(v,\mu) \tag{5.2.63}$$

有唯一解 $u_r(\mu)\in\mathbf{X}$，由 Ritz 变分与 Galerkin 变分之等价性，$u_r(\mu)$ 也是下列 Galerkin 变分问题的解

$$a_r(u_r(\mu),v) = \langle l,v\rangle + rb(v,C^{-1}\chi) - b(v,\mu), \quad \forall v\in\mathbf{X} \tag{5.2.64}$$

所以，$u = u_r(\mu)$，从而

$$\pounds_r(u_r(\lambda),\lambda) = \max_{\mu\in\mathbf{M}} \pounds_r(u_r(\mu),\mu) \tag{5.2.65}$$

但是 $\pounds_r(u_r(\mu),\mu) = -a_r(u_r(\mu),u_r(\mu))/2 - \langle\chi,\mu\rangle$

$$+ r\langle c^{-1}\chi,\chi\rangle/2$$

令 $$K_r(\mu) = a_r(u_r(\mu),u_r(\mu))/2 + \langle\chi,\mu\rangle \tag{5.2.66}$$

则 $$\pounds_r(u_r(\mu),\mu) = -K_r(\mu) + r\langle C^{-1}\chi,\chi\rangle/2$$

由(5.2.65)得

$$K_r(\lambda) = \min_{\mu\in\mathbf{M}} K_r(\mu) \tag{5.2.67}$$

从而有如下定理

定理 5.2.9 在定理 5.2.8 假设及条件 (5.2.62) 下，问题 (Q) 中的解 $\lambda\in\mathbf{M}$ 也是无约束极小化问题 (5.2.67) 的解．

到此，我们得知，问题 (Q) 的解 (u,λ) 也是增广 Lagrange 泛函两个极小化问题 (5.2.63) 和 (5.2.67) 的解．

5 有限维逼近

设有限维 Hilbert 空间 $\mathbf{X}_h\subset\mathbf{X}$，$\mathbf{M}_h\subseteq\mathbf{M}$，其中 h 是一个与维数有关的参数．那么问题 (Q) 之逼近问题是

$$(Q_h)\begin{cases}\text{求}(u_h,\lambda_h)\in\mathbf{X}_h\times\mathbf{M}_h\text{，使得} \\ a(u_h,v_h)+b(v_h,\lambda_h)=\langle l,v_h\rangle \quad \forall v_h\in\mathbf{M}_h \\ \qquad b(u_h,\mu_h)=\langle\chi,\mu_h\rangle \quad \forall\mu_h\in\mathbf{M}_h\end{cases} \tag{5.2.68}$$

与此相应的算子有

$$A_h\in\pounds(\mathbf{X}_h,\mathbf{X}'_h),B_h\in\pounds(\mathbf{X}_h,\mathbf{M}'_h),B'_h\in\pounds(\mathbf{M}_h,\mathbf{X}'_h)$$

$$\langle A_hu_h,v_h\rangle_{\mathbf{X}} = a(u_h,v_h) \qquad \forall u_h,v_h\in\mathbf{X}_h$$

$$\langle B_hu_h,\mu_h\rangle_{\mathbf{M}} = b(u_h,\mu_h) \qquad \forall u_h\in\mathbf{X}_h,\mu_h\in\mathbf{M}_h$$

$$\langle v_h,B'_h\mu_h\rangle_{\mathbf{X}} = b(v_h,\mu_h) \qquad \forall v_h\in\mathbf{X}_h,\mu_h\in\mathbf{M}_h$$

其核空间为

$$\mathrm{Ker}(B_h)=\{v_h\in\mathbf{X}_h, b(v_h,\mu_h)=0,\quad \forall\mu_h\in\mathbf{M}_h\}$$

$$\mathrm{Ker}(B'_h)=\{\mu_h\in\mathbf{M}_h, b(v_h,\mu_h)=0,\quad \forall v_h\in\mathbf{X}_h\}$$

$$Z_h=\mathbf{M}_h/\mathrm{Ker}(B'_h)$$

令 $\chi_h\in\mathbf{M}'_h$ 使得

$$\langle\chi_h,\mu_h\rangle=\langle\chi,\mu_h\rangle\quad\forall\mu_h\in\mathbf{M}$$

因此，问题 (Q_h) 可解的必要条件是 $\chi_h\in R(B_h)$. 通常 Z_h 不满足 $Z_h\subset\mathbf{Z}$.

定理 5.2.10 设连续的双线性形式 $a(\cdot,\cdot):\mathbf{X}_h\times\mathbf{X}_h\to\mathbf{R}$, $b(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{X}_h\times\mathbf{M}_h\to\mathbf{R}$ 分别满足

(1) 存在一个常数 $\alpha_h>0$, 使得

$$\sup_{v_h\in\mathrm{Ker}(B_h)\setminus\{0\}}\frac{|a(v_h,u_h)|}{\|v_h\|_{\mathbf{X}}}\geqslant\alpha_h\|u_h\|_{\mathbf{X}},\quad\forall u_h\in\mathrm{Ker}(B_h)\qquad(5.2.69)$$

(2) 存在常数 $\beta_h>0$, 使得

$$\sup_{v_h\in\mathbf{X}_h\setminus\{0\}}\frac{|b(v_h,\mu_h)|}{\|v_h\|_{\mathbf{X}}}\geqslant\beta_h\|\mu_h\|_{Z_h},\quad\forall\mu_h\in\mathbf{M}_h\qquad(5.2.70)$$

这里商范数

$$\|\mu_h\|_{Z_h}=\inf_{\mu_h^o\in\mathrm{Ker}(B'_h)}\|\mu_h+\mu_h^o\|_{\mathbf{M}}\quad\forall\mu_h\in\mathbf{M}_h\subset\mathbf{M}$$

则 $\forall\chi_h\in R(B_h)$; $l_h\in\mathbf{X}_h$, 问题 (Q_h) 存在唯一解 $(u_h,\lambda_h)\in\mathbf{X}_h\times\mathbf{Z}_h$, 近似的 Lagrange 乘子 λ_h 在精确到 $\mathrm{Ker}(B'_h)$ 的任一可加元素的意义下是唯一的.

这个定理是无限维相应定理的结果. 在有限维空间中, $R(B_h),R(B'_h)$ 都是闭的. 因此, 只要有式 (5.2.69) 就可以保证问题 (Q_h) 有解. 然而, 如果没有离散的 BB 条件 (5.2.70), 就不能

保证问题 (Q_h) 的解收敛于问题 (Q) 的解．问题 (Q_h) 的解依赖于参数 α_h,β_h，而 α_h,β_h 也依赖于 h.

定理 5.2.11 设定理 5.2.10 和 5.2.1 的假设成立．而且 (u,λ) 和 (u_h,λ_h) 分别是问题 (Q) 和 (Q_h) 的解，其中 $\lambda\in\mathbf{Z}$, $\lambda_h\in\mathbf{Z}_h$ 分别是商空间中的等价类，且 $\mathbf{Z}_h\subset\mathbf{Z}$. 那么

$$\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_Z\leqslant\sigma_h\{\inf_{v_h\in\mathbf{X}_h}\|u-v_h\|_{\mathbf{X}}+\inf_{\mu_h\in\mathbf{M}_h}\|\lambda-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\}\tag{5.2.71}$$

这里

$$\sigma_h=1+\max(\|a\|,\|b\|)\max\{(\beta_h^{-1}+\alpha_h^{-1}(1+\|a\|\alpha_h^{-1})+(\beta_h^{-1}+\|a\|\beta_h^{-1})(1+\|a\|\alpha_h^{-1})\}\tag{5.2.72}$$

证 根据定理 5.1.6，只要用 $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$ 代替 $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$，就可以得到式 (5.2.71)，其中 σ_h 为 $1+\|\Lambda\|\|\Lambda_h^{-1}\|$ 的上界，而 Λ，Λ_h 为

$$(\Lambda(u,\lambda),(\sigma,\mu))_\Sigma=B((u,\lambda),(v,\mu)),\qquad\forall(u,\lambda),(v,\mu)\in\Sigma$$

$$(\Lambda_h(u_h,\lambda_h),(v_h,\mu_h))_{\Sigma_h}=B((u_h,\lambda_h),(v_h,\mu_h))\qquad\forall(u_h,\lambda_h),(v_h,\mu_h)\in\mathbf{M}_h$$

这里 $\Sigma_h=\mathbf{X}_h\times\mathbf{M}_h$，$\|\Lambda\|$ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}\to(\mathbf{X}\times\mathbf{Z})'$ 之算子范数，$\|\Lambda_h\|$ 是 $\mathbf{X}_h\times\mathbf{Z}_h\to(\mathbf{X}\times\mathbf{Z}_h)'$ 的算子范数，所以

$$\|\Lambda\|\leqslant\max(\|a\|,\|b\|)$$

设 $(u_h,\lambda_h)=\Lambda_h^{-1}(l,\chi)$. 如果式 (5.2.70) 成立，那么 B'_h 下有界，B_h 也下有界，令 $B_hw_h=\chi_h$，$u_h^o=u_h-w_h$，则 $u_h^o\in\mathrm{Ker}(B_h)$

$$a(u_h^o,v_h^o)=\langle l,v_h^o\rangle-a(w_h,v_h^o)\quad\forall v_h^o\in\mathrm{Ker}(B_h)$$

因此

$$\|u_h^o\|_X \leqslant \alpha_h^{-1}\|l\|_X + \alpha_h^{-1}\beta_h^{-1}\|a\|\|\chi\|_{M'}$$

$$\|u_h\|_X \leqslant \|u_h^o\|_X + \|w_h\|_X \leqslant \alpha_h^{-1}\|l\|_{X'}$$
$$+ \beta_h^{-1}(1+\alpha_h^{-1}\|a\|)\|\chi\|_{M'}$$

类似地，有

$$\beta_h\|\lambda_h\|_Z \leqslant \|B'_h\lambda_h\|_{X'} \leqslant \|l\|_{X'} + \|a\|\|u_h\|_X$$

所以

$$\|\lambda_h\|_Z \leqslant \beta_h^{-1}\|l\|_{X'} + \alpha_h^{-1}\beta_h^{-1}\|a\|\|l\|_{X'}$$
$$+ \beta_h^{-1}(1+\|a\|\alpha_h^{-1})\|a\|\|\chi\|_{M'}$$

从而

$$\|u_h\|_X + \|\lambda_h\|_Z \leqslant (\alpha_h^{-1}(1+\|a\|\beta_h^{-1}) + \beta_h^{-1})\|l\|_X$$
$$+ (1+\alpha_h^{-1}\|a\|)(\beta_h^{-1} + \beta_h^{-2}\|a\|)\|\chi\|_{M'}$$

设 J_X，J_M 分别为 Riesz 等距同构算子，$\|l\|_{X'} = \|J_X l\|_X, \|\chi\|_{M'} = \|J_M\chi\|_M$. 那么

$$\|(u_h,\lambda_h)\|_\Sigma \leqslant \Gamma_h\|(J_X l, J_M\chi)\|_\Sigma$$

其中

$$\Gamma_h = \max[\alpha_h^{-1}(1+\beta_h^{-1}\|a\|) + \beta_h^{-1}, (1+\alpha_h^{-1}\|a\|)(\beta_h^{-1} + \beta_h^{-2}\|a\|)]$$

因此 $$\|\Lambda_h^{-1}\|_{\mathcal{L}((X_h\times Z_h)', X_h\times Z_h)} \leqslant \Gamma_h$$

证毕.

对于Ker$(B')=\{0\}$情况，在BB条件(5.2.26)成立时，有限维逼近有更强的结果

定理5.2.12 设

(1) $V_h(\chi) = \{v_h \in X_h, b(v_h,\mu_h) = \langle\chi,\mu_h\rangle, \forall\mu_h \in \mathbf{M}_h\}$ 非空

(2) 存在常数 $\alpha^* > 0$，使得

$$a(v_h,v_h) \geqslant \alpha^* \|v_h\|_{\mathbf{X}}^2 \qquad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \tag{5.2.73}$$

则问题

$$(P_h)\begin{cases} 求 u_h \in V_h(\chi) 使得 \\ a(u_h,v_h) = \langle l,v_h \rangle \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

有唯一解 $u_h \in V_h(\chi)$，并且存在常数 c_1，它只依赖于 α^*，$\|a\|$，$\|b\|$，使得

$$\|u-u_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant c_1\{\inf_{u_h \in V_h(\chi)} \|u-u_h\|_{\mathbf{X}} + \inf_{\mu_h \in \mathbf{M}_h} \|\lambda-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\} \tag{5.2.74}$$

这里 u 是问题 (P) 的解.

除了上述假设之外，若离散 BB 条件

$$\sup_{v_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|} \geqslant \beta^* \|\mu_h\|_{\mathbf{M}} \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h \tag{5.2.75}$$

成立.那么，存在唯一的 $\lambda_h \in \mathbf{M}_h$，使得 (u_h,λ_h) 是问题 (Q_h) 的唯一解.同时，存在依赖于 α^*，β^*，$\|a\|$，$\|b\|$ 的常数 c_2，使得

$$\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{\mathbf{M}} \leqslant c_2\{\inf_{v_h \in \mathbf{X}_h} \|u-v_h\|_{\mathbf{X}} + \inf_{\mu_h \in \mathbf{M}_h} \|\lambda-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\} \tag{5.2.76}$$

证 因为 $V_h(\chi)$ 非空，取 $u_h^o \in V_h(\chi)$. 由假设 (2)，问题

$$\begin{cases} 求 z_h \in \mathbf{V}_h 使得 \\ a(z_h,v_h) = \langle l,v_h \rangle - a(u_h^o,v_h), \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

有唯一解 z_h. 令 $u_h = u_h^o + z_h$，则 u_h 是问题 (P_h) 的解.

设 $w_h \in \mathbf{V}_h(\chi)$ 为任一元素，$v_h = u_h - w_h \in \mathbf{V}_h$，则

$$a(v_h,v_h) = \langle l,v_h \rangle - a(w_h,v_h) \tag{5.2.77}$$

由于 $v_h \in \mathbf{X}_h$, 在问题 (Q) 中取 $v = v_h$ 和 (5.2.77) 相减得

$$a(v_h, v_h) = a(u - w_h, v_h) + b(v_h, \lambda)$$

又因 $v_h \in \mathbf{V}_h$, 故 $b(v_h, \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h$, 从而

$$a(v_h, v_h) = a(u - w_h, v_h) + b(v_h, \lambda - \mu_h), \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h \tag{5.2.78}$$

因为 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}_h$ 强制以及 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 的连续性，有

$$\|v_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha^{*^{-1}} (\|a\| \|u - w_h\|_{\mathbf{X}} + \|b\| \|\lambda - \mu_h\|_{\mathbf{M}})$$

所以

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant (1 + \alpha^{*^{-1}} \|a\|) \|u - w_h\|_{\mathbf{X}} + \alpha^{*^{-1}} \|b\| \|\lambda - \mu_h\|_{\mathbf{M}}$$

由此得出式(5.2.74).

对问题 (Q_h) 和 Hilbert 空间 $\mathbf{X}_h$, $\mathbf{M}_h$, 应用定理 5.2.3 知问题 (Q_h) 存在唯一解 (u_h, λ_h).

现在, 先证明

$$\inf_{w_h \in \mathbf{V}_h(\chi)} \|u - w_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant (1 + \beta^{*^{-1}} \|b\|) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{\mathbf{X}} \tag{5.2.79}$$

实际上，设 $v_h \in \mathbf{X}_h$ 为任一元素，由 (5.2.75), B_h 是 $\mathbf{V}_h^{\perp}$ 到 $\mathbf{M}'_h$ 上的同构，又因为 $u - v_h \in \mathbf{V}_h$, 所以存在唯一的 $z_h \in \mathbf{V}_h^{\perp}$, 使得 $B_h z_h = B(u - v_h)$ 且

$$\|z_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant \beta^{*^{-1}} \|B_h(u - v_h)\|_{\mathbf{M}'_h} \leqslant \beta^{*^{-1}} \|b\| \|u - v_h\|_{\mathbf{X}}$$

令 $w_h = z_h + v_h$, 则

$$b(w_h, \mu_h) = b(u - v_h, \mu_h) + b(v_h, \mu_h) = \langle \chi, \mu_h \rangle, \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h$$

故 $w_h \in V_h(\chi)$, 而且

$$\|u - w_h\|_{\mathbf{X}} \leqslant \|u - v_h\|_{\mathbf{X}} + \|z_h\|_{\mathbf{X}}$$

$$\leqslant (1+\beta^{*^{-1}}\|b\|)\|u-v_h\|_{\mathbf{X}}$$

由于 v_h 的任意性，可得 (5.2.79).

从问题(Q)和(Q_h)不难推出

$$b(v_h,\lambda_h-\mu_h)=a(u-u_h,v_h)+b(v_h,\lambda-\mu_h)\quad \forall v_h\in\mathbf{X}_h,\mu_h\in\mathbf{M}_h$$

由式(5.2.75)和上式得

$$\|\lambda_h-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\leqslant\beta^{*^{-1}}\sup_{v_h\in\mathbf{X}_h}\{a(u-u_h,v_h)+b(v_h,\lambda-\mu_h)\}/\|v_h\|_{\mathbf{X}}$$

$$\leqslant\beta^{*^{-1}}\{\|a\|\|u-u_h\|_{\mathbf{X}}+\|b\|\|\lambda-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\}$$

利用三角不等式，则有

$$\|\lambda-\lambda_h\|_{\mathbf{M}}\leqslant\beta^{*^{-1}}\{\|a\|\|u-u_h\|_{\mathbf{X}}+(\beta^{*}+\|b\|)\inf_{\mu_h\in\mathbf{M}_h}\|\lambda-\mu_h\|_{\mathbf{M}}\}\tag{5.2.80}$$

由式 (5.2.74), (5.2.79) 和 (5.2.80) 可得到式 (5.2.76). 证毕.

由上述定理证明过程不难得到

$$\|u_h\|_{\mathbf{X}}\leqslant\alpha^{*^{-1}}(\|l\|_{\mathbf{X}'}+\beta^{*^{-1}}(\alpha^{*}+\|a\|)\|\chi\|_{\mathbf{M}'})$$

$$\|\lambda_h\|_{\mathbf{M}}\leqslant\beta^{*^{-1}}(\|l\|_{\mathbf{X}'}+\|a\|\|u_h\|_{\mathbf{X}})$$

由于 $\mathbf{V}_h$ 不一定是 $\mathbf{V}$ 的子空间，所以 $a(\cdot,\cdot)$ 虽然是 $\mathbf{V}$ 强制，但还不足以保证它是 $\mathbf{V}_h$ 强制. 同时，(5.2.73) 和 (5.2.75) 中的常数 α^*，β^* 均是参数 h 的函数，因此，人们在应用定理 5.2.12 时，不得不费大力气来判别定理的条件是否得到满足. 下面，首先给出一个离散 BB 条件的判别法.

定理 5.2.13 设连续的 BB 条件成立. 那么离散 BB 条件 (5.2.75) 中的常数 β^* 不依赖于 h，当且仅当存在一个算子

$\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X}_h)$ 满足

(1) $b(v-\Pi_h v,\mu_h)=0, \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h, \ \forall v \in \mathbf{X}$ (5.2.81)

(2) $\|\Pi_h v\|_{\mathbf{X}} \leqslant c\|v\|_{\mathbf{X}}, \quad \forall v \in \mathbf{X}$ (5.2.82)

这里c是与h无关的常数.

证 充分性 设存在满足式(5.2.81)和(5.2.82)的Π_h，则$\forall \mu_h \in \mathbf{M}_h$，有

$$\sup_{v_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b(v_h,\mu_h)}{\|v_h\|_{\mathbf{X}}} \geqslant \sup_{v \in \mathbf{X}} \frac{b(\Pi_h v,\mu_h)}{\|\Pi_h v\|_{\mathbf{X}}} = \sup_{v \in \mathbf{X}} \frac{b(v,\mu_h)}{\|\Pi_h v\|_{\mathbf{X}}}$$

$$\geqslant c^{-1} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu_h)}{\|v\|_{\mathbf{X}}} \geqslant \beta c^{-1} \|\mu_h\|_{\mathbf{M}}$$

从而式(5.2.75)成立，其中常数βc^{-1}不依赖于h.

必要性. 设式(5.2.75)成立，β^*不依赖于h，$\forall v \in \mathbf{X}$，$b(v,\mu_h)$是$\mathbf{M}_h$上的线性连续泛函，即$b(v,\cdot) \in \mathbf{M}'_h$，然而式(5.2.75)表明$B_h$有不依赖于$h$之下界，它是$\mathbf{V}_h^{\perp}$到$\mathbf{M}'_h$上的同构映照，故存在$\Pi_h v \in \mathbf{V}_h^{\perp}$使得

$$b(\Pi_h v,\mu_h)=b(v,\mu_h), \quad \forall \mu_h \in \mathbf{M}_h$$

$$\|\Pi_h v\|_{\mathbf{X}} \leqslant \beta^{*-1} \|B_h v\|_{\mathbf{M}'_h} \leqslant \beta^{*-1} \|b\| \|v\|_{\mathbf{X}}$$

这里用到

$$\|B_h v\|_{\mathbf{M}'_h} \leqslant \|Bv\|_{\mathbf{M}'} \leqslant \|b\| \|v\|_{\mathbf{X}}$$

显然，$\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X}_h)$，且满足式(5.2.82). 证毕.

§5.3 鞍点问题的迭代法

设 $\mathbf{X}$ 为 Hilbert 空间，$\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$，$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{X}}$ 分别为其范数和内积．J 是 $\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 的 $\mathbf{C}^2$ 泛函，$D^*\subset\mathbf{X}$ 为一子集，且存在 $C_o>0$ 使得

$$D^*\subset\{v\in\mathbf{X},J(v)\leqslant C_o\} \tag{5.3.1}$$

这里 D^* 是非空而且 D^* 只取括号内单连通域部分．另外，还假设 J 在 D^* 内是严格凸的，即存在 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\forall v\in D^*$，

$$\alpha\|w\|_{\mathbf{X}}^2\leqslant D^2J(v)(w,w)\leqslant\beta\|w\|_{\mathbf{X}}^2,\quad\forall w\in\mathbf{X} \tag{5.3.2}$$

显然，在这样假设下（参看附录 A），极小值问题

$$\inf_{v\in D^*}J(v) \tag{5.3.3}$$

在 D^* 内有唯一解 u，且满足

$$DJ(u)=0 \tag{5.3.4}$$

定义 5.3.1 泛函 J 在 $\mathbf{X}$ 中的梯度 $\mathrm{grad}J(v)\in\mathbf{X}$ 是指

$$(\mathrm{grad}J(v),w)_{\mathbf{X}}=\langle DJ(v),w\rangle_{\mathbf{X}}\qquad\forall w\in\mathbf{X} \tag{5.3.5}$$

有时记 $g(v)=\mathrm{grad}J(v)$. 这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{X}}$ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}'$ 的对偶积．

求解极小值问题 (5.3.3) 的下降迭代法是给定初始点 $u_o\in D^*$

(1) $\forall m\geqslant 0$，设 u_m 已知，选择下降方向 $w_m\in\mathbf{X}$，定义 $\rho_m\in\mathbf{R}_+$ 使得

$$J(u_m-\rho_m w_m)=\inf_{\rho\geqslant 0}J(u_m-\rho w_w)\ \forall u_m-\rho w_m\in D^* \tag{5.3.6}$$

(2) 置 $u_{m+1}=u_m-\rho_m w_m\in D^*$ (5.3.7)

现在，我们来证明这个算法的收敛性．

定理 5.3.1 设 $D^*\subset\mathbf{X}$ 是满足式 (5.3.1) 的非空单连通域，

如果对每个 $m \geqslant 0$，下降方向 $w_m \in \mathbf{X}$ 使得

$$(g(u_m), w_m) \geqslant \gamma \|g(u_m)\|_{\mathbf{X}} \|w_m\|_{\mathbf{X}} \tag{5.3.8}$$

成立．这里 g 是 J 的梯度，γ 是与 m 无关的常数，则由式 (5.3.6) 和 (5.3.7) 构成的下降迭代算法中所得到的序列 u_m 在 $\mathbf{X}$ 中收敛于 (5.3.3) 的唯一解 u.

证 (1) D^*是 $\mathbf{X}$ 上的凸子集．事实上，由于 J 在 D^*中是凸的，故 $\forall v_1, v_2 \in D^*$，有

$$J(\theta v_1 + (1-\theta)v_2) \leqslant \theta J(v_1) + (1-\theta)J(v_2) \leqslant C_o, \theta \in [0,1]$$

由于 D^*是单连通的，所以 $\theta v_1 + (1-\theta)v_2 \in D^*$.

(2) $D' = \{v \in D^*, J(v) \leqslant J(u_o)\}$ 是有界闭凸集．事实上，由于 J 是连续的，所以 D' 在 $\mathbf{X}$ 上是闭的．为了证明 D' 的有界性，利用 Taylor 公式

$$J(v) = J(u_o) + \langle DJ(u_o), v - u_o \rangle + \frac{1}{2} D^2 J(u_o + t(v - u_o)) \cdot (v - u_o, v - u_o)$$

这里 $t \in (0,1)$，为了书写方便，记 $g_m = g(u_m)$，则 $\forall v \in D'$，D' 的凸性和式 (5.3.2) 给出

$$J(v) \geqslant J(u_o) - \|g_o\|_{\mathbf{X}} \|v - u_o\|_{\mathbf{X}} + \frac{\alpha}{2} \|v - u_o\|_{\mathbf{X}}^2 \tag{5.3.9}$$

由 $J(v) \leqslant J(u_o)$，故

$$J(u_o) \geqslant J(u_o) - \|g_o\|_{\mathbf{X}} \|v - u_o\|_{\mathbf{X}} + \frac{\alpha}{2} \|v - u_o\|_{\mathbf{X}}^2$$

即

$$\|v - u_o\|_{\mathbf{X}} \leqslant \frac{2}{\alpha} \|g_o\|_{\mathbf{X}} \tag{5.3.10}$$

故 D' 是有界的.

(3) J 在 D' 中下有界．事实上，由式 (5.3.9) 和 (5.3.10) 给出

$$J(v) \geqslant J(u_o) - \frac{2}{\alpha}\|g_o\|_X^2 \tag{5.3.11}$$

(4) 对于每一对满足 (5.3.8) 的 u_m, w_m 极小值问题 (5.3.6) 存在唯一解 $\rho_m \geqslant 0$. 事实上，由 $\{u_m\}$ 的构造知 u_m 在 D^*的内部，而映照 $\rho \to J(u_m - \rho w_m)$ 对所有使 $u_m - \rho w_m \in D^*$的 ρ 是严格凸的. 因此 $J(u_m - \rho w_m)$ 在 D^*内有唯一极小值，并且这个极小值在 D^*的内点 $u_m - \rho w_m (\rho_m \geqslant 0)$ 上达到. 所以

$$\frac{d}{d\rho}J(u_m - \rho w_m)\Big|_{\rho=\rho_m} = -\langle DJ(u_m - \rho_m w_m), w_m\rangle = 0$$

或
$$\langle DJ(u_{m+1}), w_m\rangle = (g_{m+1}, w_m)_X = 0 \tag{5.3.12}$$

这个式子说明，下一次的梯度方向与上一次的下降方向是正交的. 利用 Taylor 展式，$\forall t \in (0,1)$, (5.3.12) 可以表示为

$$0 = \langle DJ(u_m - \rho_m w_m), w_m\rangle = \langle DJ(u_m), w_m\rangle$$
$$- \rho_m D^2 J(u_m - t\rho_m w_m)(w_m, w_m)$$

也就是

$$(g_m, w_m)_X = \rho_m D^2 J(u_m - t\rho_m w_m)(w_m, w_m) \tag{5.3.13}$$

根据 D^*的凸性及 J 的严格凸 (5.3.2) 和 (5.3.8)，则

$$\gamma\|g_m\|_X\|w_m\|_X \leqslant \beta\rho_m\|w_m\|_X^2$$

从而得

$$\rho_m \geqslant \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\|g_m\|_X / \|w_m\|_X \tag{5.3.14}$$

(5) $J(u_m)$ 是单调下降的和 $\{w_m\} \subset D'$. 事实上，由 u_{m+1} 的构造可知

$$J(u_{m+1}) \leqslant J(u_m - \rho w_m) \qquad \forall \rho \in [0, \rho_m]$$

因此，存在某个 $t \in (0,1)$，利用 Taylor 公式，(5.3.2) 和 (5.3.8)

则有

$$J(u_{m+1}) \leqslant J(u_m) - \rho(g_m, w_m)_X + \frac{1}{2}\rho^2 D^2 J(u_m - t\rho w_m)(w_m, w_m)$$

$$\leqslant J(u_m) - \rho\gamma\|g_m\|_X\|w_m\|_X + \frac{1}{2}\beta\rho^2\|w_m\|_X^2$$

由于 ρ_m 满足 (5.3.14)，可以取

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta}\|g_m\|_X / \|w_m\|_X$$

从而有 $$J(u_{m+1}) - J(u_m) \leqslant \frac{\gamma^2}{2\beta}\|g_m\|_X^2 \tag{5.3.15}$$

即$J(u_m)$单调下降的.

(6) 收敛性 由于 $\{J(u_m)\}$ 是单调下降有界序列，所以它是收敛的，又由式 (5.3.15) 知

$$\lim_{m\to\infty}\|g_m\|_X^2 \leqslant \lim_{m\to\infty}(2\beta/\gamma^2)(J(u_m) - J(u_{m+1})) = 0 \tag{5.3.16}$$

即 $\{g_m\}$ 在 X 中强收敛于零．另一方面，存在 $t\in(0,1)$ 使得

$$DJ(u_{m+p}) - DJ(u_m) = D^2 J(u_m + tu_{m+p})(u_{m+p} - u_m)$$

利用J的严格凸性(5.3.2)得

$$\alpha\|u_{m+p} - u_m\|_X^2 \leqslant \langle DJ(u_{m+p}) - DJ(u_m), u_{m+p} - u_m\rangle$$

$$= (g_{m+p} - g_m, u_{m+p} - u_m)_X$$

$$\|u_{m+p} - u_m\|_X \leqslant \alpha^{-1}\|g_{m+p} - g_m\|_X$$

这就证明，$\{u_m\}$ 是 X 中 Cauchy 序列，因而是收敛的．又因 D' 是闭的，所以存在 $u\in D'$，使得在 X 中 $\lim_{m\to\infty} u_m = u$. 由式 (5.3.16) 和 DJ 的连续性，有 $g(u) = DJ(u) = 0$，即

$$J(u) = \min_{v\in D^h} J(v)$$

证毕.

2 简单梯度法和共轭梯度法

在下降法中应用最广泛的是简单梯度算法和共轭梯度算法．简单梯度法就是取 $w_m = g_m$ 作为下降方向．显然，这样选取的下降方向，满足定理 5.3.1 的条件 (5.3.8)，因而保证了简单梯度法的局部收敛性．

Polack－Ribiere型的共轭梯度法是:

$$w_o = g_o$$

$$w_m = g_m + \sigma_m w_{m-1},\ m \geqslant 1 \tag{5.3.17}$$

$$\sigma_m = \frac{(g_m - g_{m-1}, g_m)_X}{(g_{m-1}, g_{m-1})_X},\quad m \geqslant 1 \tag{5.3.18}$$

定理 5.3.2 设 $u_o \in D^*$，D^*是 (5.3.1) 所定义的．泛函 J 在 D^* 内是 C^2 的且满足 (5.3.2)．那么共轭梯度算法 (5.3.6)，(5.3.7) 和 (5.3.17)，(5.3.18) 在 D^*内是收敛的．

证 实际上，我们只须证明由式 (5.3.17)－(5.3.18) 所构造的下降方向 w_m 满足收敛性定理 5.3.1 的条件 (5.3.8) 就够了．

由式 (5.3.12) 知 $(g_m, w_{m-1})_X = 0$，从而

$$(g_m, w_m)_X = (g_m, g_m + \sigma_m w_{m-1})_X = \|g_m\|_X^2 \geqslant 0 \tag{5.3.19}$$

另一方面，由式(5.3.13)可得

$$\rho_m = \|g_m\|_X^2 / D^2 J(u_m - t\rho_m w_m)(w_m, w_m) \tag{5.3.20}$$

而式(5.3.18)和(5.3.20)给出

$$\sigma_m = \frac{(g_m - g_{m-1}, g_m)_X}{\|g_{m-1}\|_X^2}$$

$$= \frac{\langle DJ(u_m) - DJ(u_{m-1}), g_m \rangle_X}{\|g_{m-1}\|_X^2}$$

$$= -\rho_{m-1} \frac{D^2 J(u_{m-1} - t_o \rho_{m-1} w_{m-1})(w_{m-1}, g_m)}{\|g_{m-1}\|_X^2}$$

$$= -\frac{D^2 J(u_{m-1} - t_o \rho_{m-1} w_{m-1})(w_{m-1}, g_{m-1})}{D^2 J(u_{m-1} - t\rho_{m-1} w_{m-1})(w_{m-1}, w_{m-1})}$$

利用式(5.3.2)，则

$$|\sigma_m| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(\|g_m\|_X / \|w_{m-1}\|_X)$$

$$\|w_m\|_X = \|g_m + \sigma_m w_{m-1}\|_X \leqslant \|g_m\|_X (1 + \frac{\beta}{\alpha})$$

即

$$\|g_m\|_X \geqslant \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \|w_m\|_X$$

所以，利用式(5.3.19)

$$(g_m, w_m) = \|g_m\|_X^2 \geqslant \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \|g_m\|_X \|w_m\|_X$$

这就是(5.3.8)，证毕.

3　在鞍点问题中的应用

应用上述共轭梯度法来求解极小值问题 (5.2.67). 为此，先计算 $K_r(\mu)$ 的梯度及二阶导数，由式 (5.2.64) 得

$$a_r(Du_r \cdot \sigma, v) = -b(v, \sigma) \quad \forall v \in \mathbf{X} \qquad (5.3.21)$$

或

$$Du_r = -A_r^{-1} B' \in \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{X}) \qquad (5.3.22)$$

其中　$A_r \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$.　　$\forall u \in \mathbf{X}$

$$a_r(u, v) = \langle A_r u, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{X}$$

微分式(5.2.66)得

$$DK_r(\mu)\sigma = \langle A_r Du_r \sigma, u_r(\mu)\rangle + \langle \chi,\sigma\rangle = \langle \chi - Bu_r(\mu),\sigma\rangle$$

从而有

$$DK_r(\mu) = \chi - Bu_r(\mu) \in \mathbf{M}' \tag{5.3.23}$$

$$D^2K_r(\mu) = -BDu_r(\mu) = BA_r^{-1}B' \in \pounds(\mathbf{M},\mathbf{M}') \tag{5.3.24}$$

再看二次型

$$D^2K_r(\mu)(\sigma,\sigma) = \langle A_r^{-1}B'\sigma, B'\sigma\rangle = \langle A_r(A_r^{-1}B'\sigma), A_r^{-1}B'\sigma\rangle$$

$$= a_r(A_r^{-1}B'\sigma, A_r^{-1}B'\sigma)$$

故由式(5.2.62)，则

$$\alpha_r \|A_r^{-1}B'\sigma\|_{\mathbf{X}}^2 \leqslant D^2K_r(\mu)(\sigma,\sigma) \leqslant \beta_r \|A_r^{-1}B'\sigma\|_{\mathbf{X}}^2$$

另一方面

$$\gamma\|B'\sigma\|_{\mathbf{X}'} \leqslant \|A_r^{-1}B'\sigma\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_r^{-1}\|B'\sigma\|_{\mathbf{X}'}$$

由于 BB 条件 (5.2.26) 和引理 5.2.1， 可知 B' 是 **M** 到 $\mathbf{V}^\circ$ 上的同构 . 由式 (5.2.27) 得

$$\beta\|\sigma\|_{\mathbf{X}} \leqslant \|B'\sigma\|_{\mathbf{X}'} \leqslant \|b\|\|\sigma\|_{\mathbf{M}}$$

从而

$$\gamma\beta\|\sigma\|_{\mathbf{M}} \leqslant \|A_r^{-1}B'\sigma\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_r^{-1}\|b\|\|\sigma\|_{\mathbf{M}}$$

$$c_1\|\sigma\|_{\mathbf{M}}^2 \leqslant D^2K_r(\mu)(\sigma,\sigma) \leqslant c_2\|\sigma\|_{\mathbf{M}}^2 \quad \forall\sigma\in\mathbf{M} \tag{5.3.25}$$

即 $K_r(\mu)$ 在 **M** 上是严格凸的 .

由于双线性形式 $c(\cdot,\cdot)$ 是对称正定的， 取 $c(\cdot,\cdot)$ 为 **M** 之内积， 则 $K_r(\mu)$ 的梯度 $g_r(\mu)$ 满足

$$c(g_r(\mu),\sigma) = \langle DK_r(\mu),\sigma\rangle = \langle Cg_r(\mu),\sigma\rangle \qquad \forall\sigma\in\mathbf{M}$$

从而有

$$g_r(\mu) = C^{-1}(\chi - Bu_r(\mu)) \tag{5.3.26}$$

鞍点问题之下降法是:

设 λ_o 为初始点，$\{w_m\}$ 为下降方向，那么

$$\rho_m = \underset{\rho\in R}{\mathrm{Arg\,min}}\, K_r(\lambda_m - \rho w_m)$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \rho_m w_m$$

$$u_{m+1} = u_r(\lambda_{m+1}) = A_r^{-1}(l + rB'C^{-1}\chi - B'\lambda_{m+1})$$

注意到，ρ_m 可以直接计算

$$\rho_m = D_r K_r(\lambda_m) w_m / D^2 K_r(\lambda_m)(w_m, w_m)$$

$$= \frac{\langle \chi - Bu_r(\lambda_m), w_m\rangle}{a_r(A_r^{-1}B'w_m, A_r^{-1}B'w_m)}$$

如果令 $z_m = A_r^{-1}B'w_m, g_m = g_r(\lambda_m)$，则由式 (5.3.26) 有

$$\langle \chi - Bu_r(\lambda_m), w_m\rangle = \langle cg_m, w_m\rangle = c(g_m, w_m)$$

$$a_r(A_r^{-1}B'w_m, A_r^{-1}B'w_m) = a_r(z_m, A_r^{-1}B'w_m)$$

$$= \langle B'w_m, z_m\rangle_{\mathbf{X}} = \langle w_m, Bz_m\rangle_{\mathbf{M}} = b(z_m, w_m)$$

从而

$$\rho_m = \frac{c(g_m, w_m)}{b(z_m, w_m)}$$

$$u_{m+1} = A_r^{-1}(l + rB'C^{-1}\chi - B'\lambda_m + B'\rho_m w_m)$$

$$= u_m + \rho_m A_r^{-1}B'w_m = u_m + \rho_m z_m$$

因而下降法可以表示为

(1) 选初值 $\lambda_o \in \mathbf{M}$，计算 u_o

$$A_r u_o = l + B'(rc^{-1}\chi - \lambda_o)$$

(2) $\forall m \geqslant 0$，给出 $w_m \in \mathbf{M}$，设 $(u_m, \lambda_m) \in \mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 已知，那么 $(z_m, g_m) \in \mathbf{X}\times\mathbf{M}, \rho_m \in \mathbf{R}$，$(u_{m+1}, \lambda_{m+1}) \in \mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 由下列方程决

定

$$Cg_m=\chi-Bu_m,\quad A_r z_m=B'w_m,$$
$$\rho_m=c(g_m,w_m)/b(z_m,w_m)$$
$$\lambda_{m+1}=\lambda_m-\rho_m w_m,\ u_{m+1}=u_m+\rho_m z_m$$

简单梯度方法取 $w_m=g_m$，因而 $\forall m\geqslant 0$，设 $(u_m,\lambda_m)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 已知，则 $(u_{m+1},\lambda_{m+1})\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ 由下列方程决定

$$\begin{cases}Cg_m=\chi-Bu_m,A_r z_m=B'g_m\\ \rho_m=c(g_m,g_m)/b(z_m,g_m)\\ \lambda_{m+1}=\lambda_m-\rho_m g_m\quad u_{m+1}=u_m+\rho_m z_m\end{cases}\tag{5.3.27}$$

共轭梯度法则取

$$w_m=g_m+\sigma_m w_{m-1}\qquad \sigma_m=\frac{c(g_m-g_{m-1},g_m)}{c(g_{m-1},g_{m-1})}$$

引用经典的共轭梯度定理可知

$$D^2K_r(w_i,w_j)=0,\ c(g_i,g_j)=0\qquad i\neq j$$
$$c(g_i,w_j)=0\qquad\qquad i>j$$

因而
$$\sigma_m=\frac{c(g_m,g_m)}{c(g_{m-1},g_{m-1})}$$

所以，鞍点问题共轭梯度算法则是

$\forall m\geqslant 0$, $(u_m,\lambda_m)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$已知, u_{m+1},λ_{m+1}如下决定:

$$\begin{aligned}&c(g_m,\mu)=\langle\chi,\mu\rangle-b(u_m,\mu)\qquad\forall\mu\in\mathbf{M}\\&\sigma_m=c(g_m,g_m)/c(g_{m-1},g_{m-1})\\&w_m=g_m+\sigma_m w_{m-1}\\&a_r(z_m,v)=b(v,w_m)\qquad\forall v\in\mathbf{X}\\&\rho_m=c(g_m,g_m)/b(z_m,g_m)\end{aligned}\tag{5.3.28}$$

$$\lambda_{m+1}=\lambda_m-\rho_m w_m, u_{m+1}=u_m+\rho_m z_m$$

最后，我们得到下列定理

定理 5.3.3 设双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足 BB 条件 (5.2.26)，而 $a_r(\cdot,\cdot)$，$c(\cdot,\cdot)$ 为对称的，且分别是 **X** 强制和 **M** 强制的双线性形式，那么简单梯度算法 (5.3.27) 和共轭梯度算法 (5.3.28) 所产生序列 $\{\lambda_m,u_m\}$ 收敛于问题 (Q) 的解 (λ,u)，它也是鞍点问题 (L) 的解，而且

$$\lim_{m\to\infty}\{\|u_m-u\|_{\mathbf{X}}+\|\lambda-\lambda_m\|_{\mathbf{M}}\}=0$$

§ 5.4 三线性和拟线性变分问题

设 V 是一个 Hilbert 空间，$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{V}},\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ 分别为其内积和范数，引入非线性形式

$$a(\cdot;\cdot,\cdot):(u,v,w)\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to a(w;u,v)\in\mathbf{R}$$

如果 $\forall w\in\mathbf{V}$，$(u,v)\to a(w;u,v)$ 是 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ 上连续的双线性形式，则称 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 为拟双线性形式．特别，若 $a(w;u,v)$ 是拟双线性形式，并且 $\forall(u,v)\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}$，则 $w\to a(w;u,v)$ 是 $\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 的线性形式，则称 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 的三线性形式．

与拟双线性或三线性形式 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 对应的，可以引入线性算子，$\forall w\in\mathbf{V}$，

$$A(w)\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}'),\ \langle A(w)u,v\rangle_{\mathbf{V}}=a(w;u,v),\quad \forall u,v\in\mathbf{V}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}}$ 是 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}'$ 的对偶积．

现在，考察拟双线性或三线性变分问题

$$(P)\begin{cases}\text{求}u\in\mathbf{V},\text{使得}\quad \forall l\in\mathbf{V}',\text{有}\\ a(u;\ u,v)=\langle l,v\rangle\qquad \forall v\in\mathbf{V}\end{cases}\tag{5.4.1}$$

问题 (P) 等价的算子形式为

$$A(u)u = l \qquad 在V'内 \tag{5.4.2}$$

为了证明问题 (P) 解的存在性，这里引入一个不动点定理.

1 不动点定理和它的应用形式

下面，我们不加证明引用 Brouwer 不动点定理.

定理 5.4.1 设 D 是有限维空间中一个非空、凸的紧子集 .F 是 $D \to D$ 内的连续映照 . 那么，F 至少在 D 内有一个不动点 .

应用定理 5.4.1，可以得到下面有用的解的存在性定理 .

定理 5.4.2 设 $\mathbf{H}$ 是一个有限维 Hilbert 空间，$(\cdot,\cdot)$，$|\cdot|$ 分别为内积和范数 .Φ 是 $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$ 内的连续映照，且满足：存在常数 $\mu > 0$，使得

$$(\Phi(f), f) \geqslant 0 \qquad \forall f \in \mathbf{H},\quad |f| = \mu \tag{5.4.3}$$

则存在一个元素 $f \in \mathbf{H}$，使得

$$\Phi(f) = 0,\quad |f| \leqslant \mu \tag{5.4.4}$$

证 用反证法.设

$$\Phi(f) \neq 0,\quad \forall f \in S,\quad S = \{f,\ |f| \leqslant \mu, f \in \mathbf{H}\}$$

则 $f \to -\mu\Phi(f)/|\Phi(f)|$ 是 $S \to S$ 的连续映照．由于 $\mathbf{H}$ 是有限维的，S 是非空和凸的紧子集，所以由定理 5.4.1 知，存在 $f \in S$，使得

$$f = -\mu\Phi(f)/|\Phi(f)|,\quad |f| = \mu$$

且

$$(\Phi(f), f) = -\mu|\Phi(f)| < 0$$

这与式(5.4.3)矛盾.证毕.

2 存在性和唯一性定理

定理 5.4.3 设 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是拟双线性或三线性形式，满足

(1) 存在常数$\alpha > 0$, 使得

$$a(v;v,v) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \tag{5.4.5}$$

(2) V 是可分和自反的，$\forall v \in V$, 映照 $u \to a(u;u,v)$ 在 V 中序列弱连续的，即序列 u_m 在 V 中弱收敛于 u, 则

$$\lim_{m \to \infty} a(u_m;u_m,v) = a(u;u,v), \quad \forall v \in V \tag{5.4.6}$$

那么问题 (P) 至少有一个解 $u \in V$.

证　由于 V 是可分的，故存在 $\{w_m\}_{m \geqslant 1} \subset V$ 使得

(1) $\forall m \geqslant 1$, $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 是线性独立的；

(2) 线性组合$\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i\right\}_{m \geqslant 1}$ 在 V 中稠密 .

记　$V_m = \text{span}\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$. 考察 (P) 之逼近问题

$$(P_m)\begin{cases} \text{求} u_m \in V_m \text{使得} \\ a(u_m, u_m v) = \langle l, v \rangle \qquad \forall v \in V_m \end{cases} \tag{5.4.7}$$

令 $u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j$, 那么 (P_m) 为 m 个未知量的非线性代数方程组 . 定义映照 Φ_m: $V_m \to V_m$ 使得

$$(\Phi_m(v), w_i) = a(v;v,w_i) - \langle l, w_i \rangle, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \forall v \in V_m$$

因而 u_m 是问题 (P_m) 的解，当且仅当 $\Phi_m(u_m) = 0$. 为此，从 (5.4.5) 可以推出

$$(\Phi_m(v), v) \geqslant (\alpha \|v\|_V - \|l\|_{V'}) \|v\|_V$$

取 $\mu = \alpha^{-1} \|l\|_{V'}$, 则 $\forall v \in V_m$, $\|v\|_V = \mu$, 有

$$(\Phi_m(v), v) \geqslant 0$$

此外，Φ_m 在 V_m 中是连续的，V_m 是有限维的 . 故由定理 5.4.2 知问题 (P_m) 至少存在一个解 $u_m \in V_m$, 且

$$0=(\Phi_m(u_m),u_m)\geqslant(\alpha\|u_m\|_V-\|l\|_{V'})\|u_m\|_V$$

$$\|u_m\|_V\leqslant\alpha^{-1}\|l\|_{V'}\tag{5.4.8}$$

从而得知 $\{u_m\}$ 在 V 中有界，故可选出一个序列，不妨仍记 $\{u_m\}$，使得在 V 内 u_m 弱收敛于 u^*. 由假设 (2)，有

$$\lim_{m\to\infty}a(u_m;u_m,v)=a(u^*;u^*,v),\quad\forall v\in V$$

在式(5.4.7)中取 $v=w_i$，有

$$a(u^*;u^*,w_i)=\langle l,w_i\rangle,\quad\forall i\geqslant1$$

由于 w_i 之线性组合在 V 中稠密，故有

$$a(u^*;u^*,v)=\langle l,v\rangle,\quad\forall v\in V$$

这就证明了 u^* 是问题 (P) 的解. 证毕.

我们也可用另一种形式来表达定理 5.4.3，这就是

定理 5.4.4 设 V 是一个可分的 Hilbert 空间，$(u,v)\to a(u,v)$ 是 $V\times V\to\mathbf{R}$ 的映照，且满足

(1) 存在常数 $\alpha>0, a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|_V^2\quad\forall v\in V$；

(2) $\forall u\in V, v\to a(u,v)$ 是 V 上的线性连续泛函；

(3) $\forall v\in V$，$u\to a(u,v)$ 是 V 上序列弱连续泛函，即如果 $\forall\{u_m\}_{m\geqslant1}$，$u_m$ 在 V 中弱收敛于 u，就有

$$\lim_{m\to\infty}a(u_m,v)=a(u,v)\quad\forall v\in V$$

那么，$\forall l\in V'$，至少存在一个元素 $u\in V$ 使得

$$a(u,v)=\langle l,v\rangle\quad\forall v\in V\tag{5.4.9}$$

下面我们给出存在唯一解的条件：

定理 5.4.5 设 V 是一个可分的 Hilbert 空间，$\forall w\in V$，双线性形式 $a(w;\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V$ 的一致 V 强制，即存在常数 α

>0，使得

$$a(w;v,v) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{5.4.10}$$

另外，算子 $w \to A(w)$

$$\langle A(w)u,v\rangle = a(w;u,v) \quad \forall u,w,v \in \mathbf{V}$$

在 V 中局部 Lipschitz 连续，即存在一个连续和单调增函数 L: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$，使得 $\forall \mu > 0$，$D_\mu = \{v \in \mathbf{V}, \|v\|_V \leqslant \mu\}$，成立

$$|a(w_1;u,v) - a(w_2;u,v)| \leqslant L(\mu)\|u\|_V \|v\|_V \|w_1 - w_2\|_V$$

$$\forall u,v \in \mathbf{V},\ w_1,w_2 \in D_\mu \tag{5.4.11}$$

那么，在条件

$$\|l\|_{V'} L(\alpha^{-1}\|l\|_{V'})\alpha^{-2} < 1 \tag{5.4.12}$$

下，问题 (P) 有唯一解 $u \in \mathbf{V}$.

证 由式 (5.4.10) 和 Lax - Milgram 定理，算子 $A(w) \in \pounds(\mathrm{V},\mathrm{V}')$ 对每一个 $w \in \mathbf{V}$ 是可逆的，并且 $T(w) = A^{-1}(w) \in \pounds(\mathrm{V}',\mathrm{V})$ 以及

$$\|T(w)\|_{\pounds(V',V)} \leqslant \alpha^{-1} \tag{5.4.13}$$

如此，问题 (P) 可以表示为算子形式

$$u = T(u)l$$

现在我们来估计 $\|T(w_1) - T(w_2)\|_{\pounds(V',V)}$. 为此，利用 (5.4.13) 有

$$T(w_1) - T(w_2) = T(w_1)(A(w_2) - A(w_1))T(w_2)$$

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{\pounds(V',V)} \leqslant \alpha^{-2}\|A(w_2) - A(w_1)\|_{\pounds(V,V')} \tag{5.4.14}$$

但是

$$\|A(w_1) - A(w_2)\|_{\pounds(V,V')} = \sup_{u,v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle (A(w_1) - A(w_2))u,v\rangle|}{\|u\|_V \|v\|_V}$$ 、

$$= \sup_{u,v\in V\setminus\{0\}} \frac{|a(w_1;\ u,v) - a(w_2;\ u,v)|}{\|u\|_V \|v\|_V}$$

$$\leqslant L(\mu)\|w_1 - w_2\|_V \quad \forall w_1, w_2 \in D_\mu$$

代入式 (5.4.14)，得

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leqslant \alpha^{-2} L(\mu)\|w_1 - w_2\|_V$$

$$\forall w_1,\ w_2 \in D_\mu$$

从而，$\forall l \in V'$

$$\|(T(w_1) - T(w_2))l\|_V \leqslant (\alpha^{-2} L(\alpha^{-1}\|l\|_{V'})\|l\|_{V'})\|w_1 - w_2\|_V$$

若令 $\mu = \alpha^{-1}\|l\|_{V'}$，那么

$$\|(T(w_1) - T(w_2))l\|_V \leqslant (\alpha^{-2} L(\mu)\|l\|_{V'})\|w_1 - w_2\|_V$$

利用式 (5.4.13)，$\forall w \in V,\ l \in V'$，有

$$\|T(w)l\|_V \leqslant \mu$$

故，映照 $w \to T(w)l$ 是 $D_\mu \to D_\mu$ 的映照，且由式 (5.4.12) 知，$T(w)$ 是压缩映照

$$\|(T(w_1) - T(w_2))l\|_V < \|w_1 - w_2\|_V$$

由不动点原理可知，$w \to T(w)l$ 在 D_μ 内有唯一动点

$$u = T(u)l$$

u就是问题(P)的唯一解，且

$$\|u\|_V = \|T(u)l\|_V \leqslant \mu = \alpha^{-1}\|l\|_{V'}$$

证毕。

定理 5.4.5 告诉我们，如果唯一性条件 (5.4.12) 得到满足，那么简单迭代

$$u_{m+1} = T(u_m)l$$

即
$$a(u_m; u_{m+1}, v) = \langle l, v\rangle \quad \forall v \in V$$

是收敛的，只要初始点 $u_0 \in D_\mu$，那么 $\|u_m\|_V \leqslant \mu$，且 u_m 在 V 中强收敛于问题 (P) 的解 u.

3　问题(Q)

考察 Hilbert 空间 X, M 上的两个连续双线性形式

$$(w,u,v) \to a(w;u,v) \in \mathbf{R}, \quad (v,\mu) \to b(v,\mu) \in \mathbf{R}$$

并且假设，$\forall w \in \mathbf{X}$, $(u,v) \to a(w;u,v)$ 是连续的双线性形式.

考察问题(Q):

$$(Q)\begin{cases} \forall l \in \mathbf{X}', \quad \text{求}(u,\lambda) \in \mathbf{X} \times \mathbf{M} \quad \text{使得} \\ a(u;\ u,v) + b(v,\lambda) = \langle l,v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{X} & (5.4.15) \\ \qquad b(u,\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in \mathbf{M} & (5.4.16) \end{cases}$$

引入算子 $A(w) \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X}')$ 和 $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{M}')$

$$\langle A(w)u,v \rangle = a(w;u,v) \qquad \forall u,v \in \mathbf{X} \tag{5.4.17}$$

$$\langle Bu,\mu \rangle = b(u,\mu) \qquad \forall u \in \mathbf{X},\ \mu \in \mathbf{M} \tag{5.4.18}$$

则问题(Q)的算子形式为

$$\begin{cases} \text{求}(u,\lambda) \in \mathbf{X} \times \mathbf{M}\text{使得} \\ A(u)u + B'\lambda = l \qquad \text{在}X'\text{内} & (5.4.19) \\ \qquad Bu = 0 \qquad \text{在}M'\text{内} & (5.4.20) \end{cases}$$

设 $\mathbf{V} = \mathrm{Ker}(B) = \{v \in \mathbf{X}; b(v,\mu) = 0, \forall \mu \in \mathbf{M}\}$，则和问题 (Q) 对应的问题 (P) 是

$$(P)\begin{cases} \text{求}u \in \mathbf{V}\text{使得} \\ a(u;\ u,v) = \langle l,v \rangle \qquad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases} \tag{5.4.21}$$

若引入算子 $\Pi \in \mathcal{L}(\mathbf{X}',\mathbf{V}')$，$\langle \Pi l,v \rangle = \langle l,v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}$，则 (5.4.21) 的算子形式为

$$\Pi A(u)u = \Pi l \qquad \text{在}\mathbf{V}'\text{内} \tag{5.4.22}$$

显然，若 (u,λ) 是问题 (Q) 的解，则 u 也是问题 (P) 的解. 反之，若 u 是问题 (P) 的解，那么是否可以找到一个 λ，使得 (u,λ) 也是问题 (Q) 的解？回答是肯定的.

定理 5.4.6　设双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足 BB 条件 (5.2.26).

那么对问题 (P) 的每一个解 u，总存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{M}$，使得 (u,λ) 是问题 (Q) 的解．

证 由 (5.4.22) 知 $\Pi(l-A(u)u)\in V^\circ$ (V 之极集)．根据引理 5.2.1，B' 是从 M 到 V° 上的同构，所以存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{M}$，使得 $B'\lambda=l-A(u)u$，即 (λ,u) 是问题 (Q) 的解．证毕．

和问题 (P) 一样，问题 (Q) 也可以用下列简单迭代得到近似解，设 $u_o\in\mathbf{V}$，那么

$$\begin{cases}\text{求}(u_m,\lambda_m)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}\text{使得} & \\ a(u_m;\ u_{m+1},v)+b(v,\lambda_{m+1})=\langle l,v\rangle \quad \forall v\in\mathbf{X} & (5.4.23)\\ \qquad b(u_{m+1},\mu)=0 \qquad \forall\mu\in\mathbf{M} & (5.4.24)\end{cases}$$

由于 $u_m\in\mathbf{V}$ 也是问题 (P) 中的迭代解，故 $\lim\limits_{m\to\infty}\|u-u_m\|_{\mathbf{X}}=0$.

由式 (5.4.15) 和 (5.4.23)，有

$$b(v,\lambda_m-\lambda)=a(u;u,v)-a(u_{m-1};u_m,v) \quad \forall v\in\mathbf{X}$$

根据 BB 条件 (5.2.26) 可得

$$\|\lambda_m-\lambda\|_{\mathbf{M}}\leqslant\frac{1}{\beta}\sup_{v\in\mathbf{X}\setminus\{0\}}\frac{|a(u;\ u,v)-a(u_{m-1};\ u_m,v)|}{\|v\|_{\mathbf{X}}}\to 0,m\to\infty$$

这里利用了 u_m 在 X 中强收敛于 u 以及 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 序列弱收敛性．因此，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\{\|u_m-u\|_{\mathbf{X}}+\|\lambda-\lambda_m\|_{\mathbf{M}}\}=0$$

§ 5.5 双线性形式和形式算子

在这一节，将讨论与双线性形式相联系的形式算子的结构，这在将本章所展开的内容应用到椭圆边值问题时，是非常

必要的.

定义 5.5.1 我们说，Hilbert 空间 U 有迹性质，如果

(1) U 包括在一个更大的 Hilbert 空间 H 中，且 H 有比 U 更弱的拓朴；

(2) U 在 H 中稠密，并且 H = H′ 可视为主元空间，满足下列嵌套关系

$$U \subset H = H' \subset U'$$

(3) 存在一个线性算子 $\gamma: U \to \partial U$. 这里 ∂U 是另一个 Hilbert 空间，使得 γ 的核空间 $U_o = Ker(\gamma) \subset U$ 在 H 中稠密，同样有

$$U_o \subset H = H' \subset U'_o$$

通称 γ 为迹算子，∂U 为迹空间.

设 U, V 为两 Hilbert 空间，U′, V′ 分别为 U, V 之拓朴对偶空间，$(\cdot,\cdot)_U$，$(\cdot,\cdot)_V$ 分别为 U，V 之内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle_U$，$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 分别为 U × U′, V × V′ 之对偶积，并且 U, V 都具有迹性质，γ, γ^* 分别为它们之迹算子，∂U, ∂V 分别为其迹空间，H, G 分别为其主元空间，即

$$U \subset H = H' \subset U' \qquad V \subset G = G' \subset V'$$

$$\gamma: U \to \partial U \qquad \gamma^*: V \to \partial V$$

$$Ker(\gamma) = U_o \subset U \qquad Ker(\gamma^*) = V_o \subset V$$

$$U_o \subset H = H' \subset U'_o \qquad V_o \subset G = G' \subset V'_o$$

且嵌入 $U \subset H$, $V \subset G$, $U_o \subset H$, $V_o \subset G$ 均是连续和稠密的.

记商映照 q: $U \to U/U_o$, q^*: $V \to V/V_o$，它们之转置映照为 $q' \in £((U/U_o)', U')$, $q^{*\prime} \in £((V/V_o)', V')$, 对应于 γ, γ^*，引入两个内射$\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^*$:

$$\hat{\gamma}\in \pounds(\mathbf{U}/\mathbf{U}_o,\partial\mathbf{U}),\ \hat{\gamma}^*\in \pounds(\mathbf{V}/\mathbf{V}_o,\partial\mathbf{V})$$

并且映照是到上的．显然

$$\gamma=\hat{\gamma}q,\quad \gamma^*=\hat{\gamma}^*q^*.$$

迹空间 $\partial\mathbf{U}$, $\partial\mathbf{V}$ 的范数分别定义为

$$\|\hat{\gamma}(\hat{\chi})\|_{\partial\mathbf{U}}=\|\hat{\chi}\|_{\mathbf{U}/\mathbf{U}_o},\quad \|\hat{\gamma}^*(\hat{y})\|_{\partial\mathbf{V}}=\|\hat{y}\|_{\mathbf{V}/\mathbf{V}_o}$$

即用商范数来定义．由于$\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}^*$ 是到上的双射，所以 $\partial\mathbf{U}$, $\partial\mathbf{V}$ 中任一元素都可以有 $\mathbf{U}/\mathbf{U}_o$, $\mathbf{V}/\mathbf{V}_o$ 中之等价类与之对应．应该注意到，$\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}^*$ 之转置算子$\hat{\gamma}'\in\pounds(\partial\mathbf{U}',(\mathbf{U}/\mathbf{U}_o)')$, $\hat{\gamma}^{*\prime}\in\pounds(\partial\mathbf{V}',(\mathbf{V}/\mathbf{V}_o)')$ 也都是双射的．

考察连续的双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$, 那么$\forall u\in\mathbf{U}$, $v\to l_u(v)=B(u,v)$ 是 $\mathbf{V}$ 上线性有界泛函．特别，也是 $\mathbf{V}_o$ 上线性有界泛函

定义5.5.2 算子A: $A\in\pounds(\mathbf{U},\mathbf{V}'_o)$

$$\forall u\in\mathbf{U},\ \langle Au,v\rangle_{\mathbf{V}}=B(u,v)\quad \forall v\in\mathbf{V}_o \tag{5.5.1}$$

称 A 为 $B(\cdot,\cdot)$ 之形式算子．

共轭算子$A^*\in\pounds(\mathbf{V},\mathbf{U}'_o)$

$$\forall v\in\mathbf{V},\ \langle A^*v,u\rangle_{\mathbf{U}}=B(u,v)\quad \forall u\in\mathbf{U}_o \tag{5.5.2}$$

定理 5.5.1 设 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ 分别为两个具有迹性质的 Hilbert 空间，$B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 的连续双线性形式，而 $A\in\pounds(\mathbf{U},\mathbf{V}'_o)$, $A^*\in\pounds(\mathbf{V},\mathbf{U}'_o)$ 分别为 $B(\cdot,\cdot)$ 所对应的形式算子及其共轭算子，其定义域为

$$U_A=\{u\in\mathbf{U},Au\in\mathbf{G}\};\quad V_{A^*}=\{v\in\mathbf{V},A^*v\in\mathbf{H}\} \tag{5.5.3}$$

那么，存在唯一的算子 $\delta\in\pounds(U_A,\partial\mathbf{V}')$, $\delta^*\in\pounds(V_{A^*},\partial\mathbf{U}')$

使得下列公式成立

$$B(u,v)=(Au,v)_{\mathrm{G}}+\langle\delta u,\gamma^{*}v\rangle_{\partial \mathrm{V}},\quad \forall u\in U_{A},v\in \mathbf{V} \tag{5.5.4}$$

$$B(u,v)=(u,A^{*}v)_{\mathrm{H}}+\langle\delta^{*}v,\gamma u\rangle_{\partial \mathrm{U}},\forall u\in \mathbf{U},\ v\in \mathbf{V}_{A^{*}}. \tag{5.5.5}$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial \mathrm{U}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial \mathrm{V}}$分别为$\partial\mathrm{U}\times\partial\mathrm{U}'$, $\partial\mathrm{V}\times\partial\mathrm{V}'$对偶积.

令伴随双线性形式$U_{A}\times \mathbf{V}_{A^{*}}\to\mathbf{R}$:

$$\Gamma(u,v)=\langle\delta u,\gamma^{*}v\rangle_{\partial \mathrm{V}}-\langle\delta^{*}v,\gamma u\rangle_{\partial \mathrm{U}},\ \forall u\in U_{A},\ v\in V_{A^{*}}. \tag{5.5.6}$$

于是成立抽象的 Green 公式

$$(A^{*}v,u)_{\mathrm{H}}-(Au,v)_{\mathrm{G}}=\Gamma(u,v),\quad \forall u\in U_{A},\ v\in V_{A^{*}}. \tag{5.5.7}$$

证 $\forall u\in U_{A}$, 考察泛函$\varphi_{u}\in\mathbf{V}'$

$$\langle\varphi_{u},v\rangle_{\mathrm{V}}=B(u,v)-(Au,v)_{\mathrm{G}},\quad \forall v\in\mathbf{V} \tag{5.5.8}$$

由式(5.5.1)知, $\langle\varphi_{u},v\rangle_{\mathrm{V}}=0\quad \forall u\in U_{A},\ v\in\mathbf{V}_{o}$, 故存在唯一的$f_{u}\in(\mathbf{V}/\mathbf{V}_{o})'$, 使得

$$\langle\varphi_{u},v\rangle_{\mathrm{V}}=\langle f_{u},q^{*}(v)\rangle_{\mathrm{V}/\mathrm{V}_{o}}=\langle q^{*'}f_{u},v\rangle,\quad \forall v\in\mathbf{V}$$

另一方面, $\forall f_{u}\in(\mathbf{V}/\mathbf{V}_{o})$, 存在唯一的$\delta_{u}\in\partial\mathbf{V}'$使得

$$\langle f_{u},q_{v}^{*}\rangle=\langle\gamma^{*'}\delta u,q^{*}v\rangle=\langle\delta u,\hat{\gamma}^{*}q^{*}v\rangle_{\partial\mathrm{V}}\quad \forall v\in\mathbf{V}$$

即 $$\langle\varphi_{u},v\rangle_{\mathrm{V}}=\langle\delta u,\hat{\gamma}^{*}q^{*}v\rangle_{\partial\mathrm{V}}\quad \forall v\in\mathbf{V}$$

利用$\gamma^{*}=\hat{\gamma}^{*}q^{*}$, 并且注意到$\delta u$是$u$的连续映照, 于是有$\forall u\in U_{A}$.

$$B(u,v)-(Au,v)_{\mathrm{G}}=\langle\delta u,\gamma^{*}v\rangle_{\partial\mathrm{V}}\quad \forall v\in\mathbf{V}$$

这就是式(5.5.4). 为了证明式(5.5.5), 只需类似地引入泛函ψ_{v}使得$\forall v\in V_{A^{*}}$,

$$\langle\psi_{v},u\rangle=B(u,v)-(u,A^{*}v)_{\mathrm{H}}\quad \forall u\in\mathbf{U}$$

类似地有 $\delta^* v$ 以及 $\gamma=\hat{\gamma}q$，和 $\langle\psi_v,u\rangle=\langle\delta^* v,\hat{\gamma}qu\rangle_{\partial U}$，于是得到 (5.5.5). 由 (5.5.4) 和 (5.5.5)，不难得到 (5.5.7). 证毕.

如果 $B(\cdot,\cdot)$ 有较强的性质，U_A 相应地也有更好的性质. 比如，当 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ 上的 U 强制时，有

定理 5.5.2 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ 上连续双线形式，并且是 U 弱强制的，则 U_A 在 U 中稠密，从而也在 H 中稠密.

证 实际上，只要证 $\forall w\in\mathrm{U}$，若

$$(u,w)_{\mathrm{U}}=0 \qquad \forall u\in U_A$$

那么 $w=0$ 就可以了.

设 J_{U} 是 $\mathrm{U}'\to\mathrm{U}$ 的 Riesz 映照，故 $(u,w)_{\mathrm{U}}=\langle J_{\mathrm{U}}^{-1}w,u\rangle_{\mathrm{U}'}$.

另一方面，由广义 Lax-Milgram 定理 5.1.2 知，存在唯一解，满足

$$B(\zeta,v)=\langle J_{\mathrm{U}}^{-1}w,\zeta\rangle_{\mathrm{U}'} \qquad \forall\zeta\in\mathrm{U}$$

或者
$$\langle\zeta,\mathrm{A}^* v\rangle_{\mathrm{U}'}=\langle J_{\mathrm{U}}^{-1}w,\zeta\rangle_{\mathrm{U}'} \quad \forall\zeta\in\mathrm{U}$$

故 $\mathrm{A}^* v=J_{\mathrm{U}}^{-1}w$，从而 $\forall u\in U_A$

$$0=(u,w)_{\mathrm{U}}=\langle u,\mathrm{A}^* v\rangle_{\mathrm{U}'}=(u,\mathrm{A}^* v)_{\mathrm{H}}=(Au,v)_{\mathrm{G}}$$

因为 A 是 $U_A\to\mathrm{G}$ 的满映照，所以 $v=0$，从而 $J_{\mathrm{U}}^{-1}w=0$，即 $w=0$，证毕.

由三重结构 $(\mathrm{U},\mathrm{V},B(\cdot,\cdot))$ 产生了空间 U_A，V_{A^*}；形式算子 $A\in\pounds(U_A,\mathrm{H})$，$A^*\in\pounds(U_{A^*},\mathrm{G})$ 和边界形式算子 $\gamma\in\pounds(\mathrm{U},\partial\mathrm{U})$，$\delta\in\pounds(U_A,\partial\mathrm{V}')$. 通常称 γ 为对应于 A 的 Dirichlet 边界算子，δ 为对应于 A 的 Neumann 边界算子；而 $\gamma^*\in\pounds(V,\partial\mathrm{V})$ 和 $\delta^*\in\pounds(V_{A^*},\partial\mathrm{U}')$，则分别称为对应于 A^* 的 Dirichlet 边界算子和 Neumann 边界算子.

例 1 设 $\Omega \subset R^2$ 中的具有光滑边界的有界集合．令 $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H}=\mathbf{G}=\mathbf{L}^2(\Omega)$. $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y) \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$. 而双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbf{R}$ 是

$$B(u,v)=\int_\Omega (a\,\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v+bu_x v+cu_y v)dxdy$$

那么

$$\partial\mathbf{U}=\partial\mathbf{V}=\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega),\ \mathrm{Ker}(\gamma)=\mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

由Green公式

$$B(u,v)=\int_\Omega v(-\mathrm{div}(a\,\mathrm{grad}u)+bu_x+cu_y)dxdy$$
$$+\oint_{\partial\Omega} a\frac{\partial u}{\partial n}vds$$

所以形式算子A为

$$Au=-\mathrm{div}(a\,\mathrm{grad}u)+bu_x+cu_y,$$

如果取 $$U_A=\{u\in\mathbf{H}^1(\Omega):Au\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}$$

$$\forall u\in U_A,\ \delta u=a\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}\quad \gamma^*u=\left.v\right|_{\partial\Omega}$$

类似地，$\forall v\in U_A$，于是有

$$B(u,v)=\int_\Omega u(-\mathrm{div}(a\,\mathrm{grad}v)-\frac{\partial}{\partial x}(bv)-\frac{\partial}{\partial y}(cv))dxdy$$
$$+\oint_{\partial\Omega}(au\frac{\partial v}{\partial n}+buvn_x+cuvn_y)ds$$

$$A^*v=-\mathrm{div}(a\,\mathrm{grad}v)-\frac{\partial}{\partial x}(vb)-\frac{\partial}{\partial y}(vc)$$

$$V_{A^*}=\{v\in\mathbf{H}^1(\Omega):A^*v\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}$$

这里 (n_x,n_y) 为 $\partial\Omega$ 上单位外法线向量，相应地有

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}, \quad \delta^* v = [a\frac{\partial v}{\partial n} + (bn_x + cn_y)v]_{\partial\Omega}$$

伴随双线性形式

$$\Gamma(u,v) = \oint_{\partial\Omega}[av\frac{\partial u}{\partial n} - au\frac{\partial v}{\partial n} - (bn_x + cn_y)uv]ds$$

则相应的Green公式为

$$(A^* v,u) - (Au,v) = \Gamma(u,v) \quad \forall u \in U_A,\ v \in V_A.$$

例 2　区域 Ω 如例 1 所述，双线性形式 :$\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 为

$$B(u,\mathbf{v}) = \int_\Omega \text{grad}u \cdot \mathbf{v}dxdy$$

其中　$\mathbf{U} = \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$; $\mathbf{V} = (\mathbf{H}^1(\Omega))^2$, $\mathbf{G} = (\mathbf{L}^2(\Omega))^2$. 取 $-A = \text{grad}$, $A^* = \text{div}$, $U_A = \mathbf{H}^1(\Omega)$, $V_{A^*} = (\mathbf{H}^1(\Omega))^2$ 则

$$B(u,v) = \int_\Omega u(-\text{div}\mathbf{v})dx + \oint_{\partial\Omega}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})uds$$

因而 $\gamma^* \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$, $\delta u = 0$, $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$, $\delta^* \mathbf{v} = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$

其 Green 公式为

$$\int_\Omega (\text{grad}u \cdot \mathbf{v} + u\text{div}\mathbf{v})dxdy = \oint_{\partial\Omega} u(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})ds$$

对于混合边界条件，相应的算子为

$$\begin{cases} \Pi_1^* \in \pounds(\partial\mathbf{V},\partial\mathbf{V}) & \text{投影算子} \\ \Pi_2^* = I - \Pi_1^*,\ I\text{为}\partial\mathbf{V}\to\partial\mathbf{V}\text{之恒等映照} \\ \gamma_1^* = \Pi_1^*\gamma^*, \gamma_2^* = \Pi_2^*\gamma^*,\ \gamma^* = \gamma_1^* + \gamma_2^*, \\ \mathbf{V}_{o1} = \text{Ker}(\gamma_1^*) = \{v \in \mathbf{V}: \gamma_1^* v = 0\} \end{cases} \tag{5.5.9}$$

显然，$\mathbf{V}_{o1}$ 是 V 的闭线性子空间，且有

$$\mathbf{V}_o \subset \mathbf{V}_{o1} \subset \mathbf{V} \tag{5.5.10}$$

边界空间也分为两部分，即

$$\partial \mathbf{V}_1 = \gamma_1^* (\mathbf{V}),\ \partial \mathbf{V}_2 = \gamma_2^* (\mathbf{V}),\ \partial \mathbf{V} = \partial \mathbf{V}_1 + \partial \mathbf{V}_2 \tag{5.5.11}$$

类似地有

$$\begin{cases} \Pi_1 \in \pounds(\partial \mathbf{U}, \partial \mathbf{U}) \quad \text{投影算子} \\ \Pi_2 = I - \Pi_1,\ I\colon \partial \mathbf{U} \to \partial \mathbf{U} \text{之恒等映照} \\ \gamma_1 = \Pi_1 \gamma,\ \gamma_2 = \Pi_2 \gamma,\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \\ \mathbf{U}_{o2} = \mathrm{Ker}(\gamma_2) = \{u \in \mathbf{U}\colon\ \gamma_2 u = 0\} \\ \mathbf{U}_o \subset \mathbf{U}_{o2} \subset \mathbf{U} \\ \partial \mathbf{U}_1 = \gamma_1(\mathbf{U}),\ \partial \mathbf{U}_2 = \gamma_2(\mathbf{U}),\ \partial \mathbf{U} = \partial \mathbf{U}_1 + \partial \mathbf{U}_2 \end{cases} \tag{5.5.12}$$

利用公式 (5.5.4) 和 (5.5.5)，则

$$B(u,v) = (Au,v)_G + \langle \delta u, \gamma_2^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2},\ \forall u \in U_A,\ v \in \mathbf{V}_{o1} \tag{5.5.13}$$

$$B(u,v) = (u, A^* v)_H + \langle \delta v, \gamma_1 u \rangle_{\partial \mathbf{U}_1},\quad \forall u \in \mathbf{U}_{o2},\ v \in V_A. \tag{5.5.14}$$

另外，$\forall v \in \mathbf{V}_{o1}$，有

$$\begin{aligned} \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}} &= \langle \delta u, \Pi_1^* \gamma^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_1} + \langle \delta u, \Pi_2^* \gamma^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2} \\ &= \langle \delta u, \Pi_2^* \gamma^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2} = \langle \Pi_2^* \delta u, \gamma_2^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2} \\ &= \langle \delta_2 u, \gamma_2^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2} \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

这里 $$\delta_2 = \Pi_2^{*\prime} \delta,\ \delta_2 \in \pounds(U_A, \partial \mathbf{V}_2) \tag{5.5.16}$$

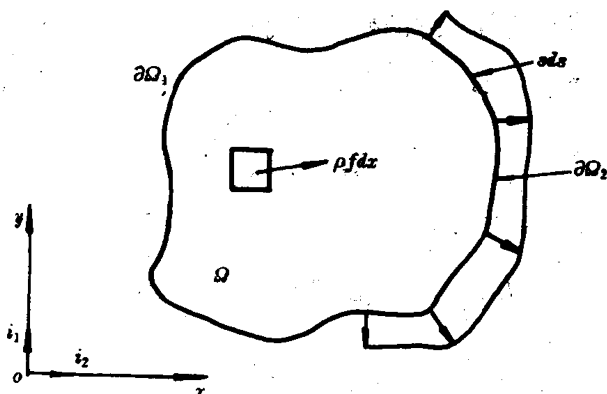
综合 (5.5.13), (5.5.14) 和 (5.5.15) 诸式，则有抽象的 Green 公式

$$(A^* v, u)_U = (v, Au)_V - \langle \delta_1^* v, \gamma_1 u \rangle_{\partial \mathbf{U}_1} + \langle \delta_2 u, \gamma_2^* v \rangle_{\partial \mathbf{V}_2}$$

$$\forall u \in U_A \cap \mathbf{U}_{o2},\ v \in V_A \cap \mathbf{V}_{o1} \tag{5.5.17}$$

例 3　弹性力学中的混合问题

设 Ω 是一光滑的弹性体，f 是作用在 Ω 上的单位质量上的体力密度 .$\partial\Omega$ 为 Ω 之光滑边界，$\partial\Omega=\partial\Omega_1\bigcup\partial\Omega_2$.$\partial\Omega_1\bigcap\partial\Omega_2$ 空集，S 为作用在 $\partial\Omega_2$ 上之面力密度，而在 $\partial\Omega_1$ 上服从刚性条件 $u|_{\partial\Omega_1}=0$，其中 u 为位移向量 .



在外力作用下平衡位置之弹性体

令σ^{ij}为应力张量，ε_{ij}为变形张量

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)$$

其中 ∇_i，∇_j 表示一阶协变导数 . 那么根据 Hooke 定律（线性弹性），有

$$\sigma^{ij}=E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

其中 E^{ijkl} 为四阶弹性系数张量 . 那么平衡方程及边界条件为

$$\nabla_j\sigma^{ij}+\rho f^i=0$$

$$\sigma^{ij}n_j=S^i \qquad 在\partial\Omega_2上$$

$$u=0 \qquad 在\partial\Omega_1上$$

代入 Hooke 定律后，可以得到 Navier－Lame 方程

$$\begin{cases} -\nabla_j(E^{ijkl}\nabla_k u_l)=\rho f^i \\ E^{ijkl}\nabla_k u_l\cdot n_j=S^i & 在\partial\Omega_2 \\ u=0 & 在\partial\Omega_1 \end{cases}$$

在第十章中将推导它的变分形式

$$\int_\Omega \sigma^{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx-\int_\Omega fvdx-\int_{\partial\Omega_2}Svds=0 \quad \forall v\in \mathrm{V}$$

其中
$$\mathrm{V}=\{w;w\in \mathrm{H}^1(\Omega),\ w|_{\partial\Omega_1}=0\}$$

双线性形式和线性形式

$$B(u,v)=\int_\Omega E^{ijkl}\nabla_i u_j\nabla_k v_l dx$$

$$F(v)=\int_\Omega \rho fvdx+\int_{\partial\Omega_2}Svds$$

而形式算子

$$Au=\{-\nabla_j(E^{ijkl}\nabla_k u_l)\}_{i=1,2,3}$$

$$\gamma_1 u=\ u|_{\partial\Omega_1}=0$$

$$\delta_2 u=E^{ijkl}\nabla_k u_l n_j \quad i=1,2,3$$

对于各向同性介质，A 是自共轭的，因为 E^{ijkl} 关于指标 $ijkl$ 具有相应的对称性．

§ 5.6 抽象边值问题

对于算子和 Hilbert 空间，我们沿用上节的一切记号．算子 A 是由双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 产生的，与之相应的，可以有下

列三种类型的边值问题：

(1) Dirichlet问题

设给出$f \in \mathbf{G}$，$g \in \partial\mathbf{U}$

求$u \in U_A$，使得 $$\begin{cases} Au = f \\ \gamma u = g \end{cases} \tag{5.6.1}$$

称这个问题为算子 A 的 Dirichlet 边值问题．

(2) Neumann问题

设给出$f \in \mathbf{G}$，$g \in \partial\mathbf{V}'$，则问题

求$u \in U_A$，使得 $$\begin{cases} Au = f \\ \delta u = g \end{cases} \tag{5.6.2}$$

称为算子 A 的 Neumann 边值问题．

(3) 混合问题

设给出 $f \in \mathbf{G}$，$g \in \partial\mathbf{U}_1$，$s \in \partial\mathbf{V}'_2$，则问题

求$u \in U_A$，使得 $$\begin{cases} Au = f \\ \gamma_1 u = g, \ \delta_2 u = s \end{cases} \tag{5.6.3}$$

称为算子 A 的混合边值问题．

双线性形式 $B(\cdot\,,\cdot)$ 可以用来描述式(5.6.1)－(5.6.3)的变分问题：

(1) 算子 A 的 Dirichlet 边值问题的变分叙述：

给出 $f \in \mathbf{G}$，$g \in \partial\mathbf{U}$，那么问题

求$w \in \mathbf{U}_0 = \mathrm{Ker}(\gamma)$，使得

$$B(w,v) = (f,v)_{\mathbf{G}_1} - B(\gamma^{-1}g,v), \ \forall v \in \mathbf{V}_0 \tag{5.6.4}$$

称为 A 的 Dirichlet 变分问题．这里γ^{-1}为γ之右逆．

(2) 算子 A 的 Neumann 边值问题的变分叙述：

给出$f \in \mathbf{G}$，$s \in \partial\mathbf{V}'$，那么问题

求$u \in \mathbf{U}$，使得

$$B(u,v)=(f,v)_{G}+\langle s,\gamma^{*}v\rangle_{\partial V}\quad \forall v\in V \tag{5.6.5}$$

称为算子 A 的 Neumann 变分问题.

(3) 算子 A 的混合边值问题的变分叙述:

给出 $f\in G$, $g\in\partial U_{1}$, $s\in\partial V'_{2}$,

求 $w\in U_{o1}=\mathrm{Ker}(\gamma_{1})=\mathrm{Ker}(\Pi_{1}\gamma)$, 使得

$$B(w,v)=(f,v)_{G}-B(\gamma_{1}^{-1}g,v)+\langle s,\gamma_{2}^{*}v\rangle_{\partial V_{2}}\quad \forall v\in V_{o1} \tag{5.6.6}$$

称为算子 A 的混合变分问题. 这里 γ_{1}^{-1} 是 γ_{1} 的右逆, 而 $V_{o1}=\mathrm{Ker}(\gamma_{1}^{*})=\mathrm{Ker}(\Pi_{1}\gamma^{*})$.

定理 5.6.1 算子 A 的 Dirichlet 边值问题 (5.6.1) 和 Dirichlet 变分问题 (5.6.4) 在下列意义下是等价的, 设 γ^{-1} 是 γ 的逆映照. 如果 u 是式 (5.6.1) 的解, 那么 $w=u-r^{-1}g$ 是问题 (5.6.4) 的一个解. 反之, 如果 w 是 (5.6.4) 的一个解, 并且 $u=w+\gamma^{-1}g\in U_{A}$, 那么 u 也是 (5.6.1) 的一个解.

Neumann 边值问题 (5.6.2) 在下列意义下和 Neumann 变分问题 (5.6.5) 等价, 即 (5.6.2) 的任意一个解也是 (5.6.5) 的解. 反之, 问题 (5.6.5) 的任意一个解 u, 如果 $u\in U_{A}$, 那么同样也是问题 (5.6.2) 的一个解.

同样地, 对混合边值问题 (5.6.3) 和混合变分问题 (5.6.6) 也有类似的结论.

证 首先我们研究 Dirichlet 边值问题. 设 u 是 Dirichlet 边值问题 (5.6.1) 的解, 那么 $w=u-\gamma^{-1}g$ 满足 $\gamma w=0$, 即 $w\in U_{o}$, 因而应用 Green 公式 (5.5.4), $\forall v\in V_{o}$, $B(u,v)=B(w,v)+B(\gamma^{-1}g,v)=(Au,v)_{G}$, 所以, w 是 Diriehlet 变分问题 (5.6.4)

的解．反之设 w 是(5.6.4)的解，并且使得 $w+\gamma^{-1}g\in U_A$，那么，令 $u=w+\gamma^{-1}g$，有 $B(u,v)=(f,v)_G$ $\forall v\in V_o$，应用 Green 公式(5.5.5)，有 $(Au-f,v)_G=0$，$\forall v\in V_o$，从而 $Au=f$．另外，$\gamma u=\gamma w+\gamma^{-1}g=g$，于是 u 满足式(5.6.1)．

现在考察 Neumann 边值问题．设 u 是 Neumann 变分问题的解，$u\in U_A$，在式(5.6.5)中令 $v\in V_o$，则有 $B(u,v)=(f,v)_G$，$\forall v\in V_o$，因而，如果 $u\in U_A$，则可以应用 Green 公式(5.5.5)，得 $(Au,v)_G=(f,v)_G$，$\forall v\in V_o$，即 $Au=f$；另一方面，由(5.5.5)和(5.6.5)相减后有 $(Au-f,v)_G=\langle s-\delta u,\gamma^* v\rangle_{\partial V}$ $\forall v\in V$．由于 $Au-f$ 在 G 中几乎处处为零，所以 $\langle s-\delta u,\gamma^* v\rangle_{\partial V}=0$，$\forall v\in V$．从而 $\delta u=s$，即 u 是 Neumann 边值问题(5.6.2)的解．反之，如果 u 是 Neumann 边值问题(5.6.2)的解，那么，直接应用式(5.5.5)，有 $B(u,v)=(Au,v)_G+\langle\delta u,\gamma^* v\rangle_{\partial V}=(f,v)_G+\langle s,\gamma^* v\rangle_{\partial GV}$，$\forall v\in V$．对于混合边值问题，证明类似．证毕．

对于椭圆型偏微分方程边值问题，抽象算子方程(5.6.1)、(5.6.2)、(5.6.3)的解通常称为强解，而相应的变分问题(5.6.4)、(5.6.5)、(5.6.6)的解称为弱解．当弱解满足一定的光滑性，就是强解．关于强解的性质将在另一节讨论．

为了讨论抽象边值问题定解数据 (f,g,s) 的相容性问题，我们需要引用泛函分析中若干熟知的结论．

设 U，V 为两个 Banach 空间，$A\in\mathcal{L}(U,V)$，那么它的转置算子 $A'\in\mathcal{L}(V',U')$ 为

$$\langle A'g,u\rangle_U=\langle g,Au\rangle_V \quad \forall g\in V',\ u\in U \tag{5.6.7}$$

如果 U,V 又是 Hilbert 空间，J_U 是 $U \to U'$ 的 Riesz 映照

$$\forall u \in U, \ \langle J_U u, u_o \rangle = (u, u_o) \quad \forall u_o \in U$$

而 J_V 为 $V \to V'$ 之 Riesz 映照，那么

$$A^* = J_V^{-1} A' J_U \quad \in \pounds(V, U) \tag{5.6.8}$$

是A之共轭算子:

$$(Au, v)_V = (A^* v, u)_U \qquad \forall v \in V, \ u \in U \tag{5.6.9}$$

设 $R(A)$ 为 A 之值域，$R(A')$，$R(A^*)$ 为 A'，A^* 之值域.

$$N(A) = A\text{之核空间} = \{u \in U, Au = 0\} \subset U \tag{5.6.10}$$

$$N(A') = A'\text{之核空间} = \{g \in V', A'g = 0\} \subset V' \tag{5.6.11}$$

$$N(A)^{\perp} = \{f \in U', \langle f, u \rangle_U = 0 \quad \forall u \in N(A)\} \subset U' \tag{5.6.12}$$

$$^{\perp}N(A') = \{v \in V, \langle g, v \rangle_V = 0 \quad \forall g \in N(A')\} \subset V \tag{5.6.13}$$

同理可以定义 $R(A)$，$R(A')$ 之正交补

$$R(A)^{\perp} = \{g \in V', \langle g, Au \rangle_V = 0, \quad \forall u \in U\} \subset V' \tag{5.6.14}$$

$$^{\perp}R(A') = \{u \in U, \langle A'g, u \rangle_U = 0 \quad \forall g' \in V'\} \subset U \tag{5.6.15}$$

对于U，V为Banach空间，那么

引理5.6.1

$^{\perp}N(A')$和$^{\perp}R(A')$分别是V和U中之闭集．

证　只须证明$^{\perp}N(A')$是 V 中闭集就够了．事实上，

$$^{\perp}N(A') = \bigcap\{N(g), g \in N(A')\} \tag{5.6.16}$$

这里 $N(g) = \{v \in V, \langle g, v \rangle_V = 0\}$. 而每个 $g \in N(A') \subset V'$ 是 V 上的线性连续泛函，所以

$$N(g) = g^{-1}(\{0\})$$

是 V 中闭集，从而由式 (5.6.16) 知，$^{\perp}N(A')$ 是闭集．证毕．

定理 5.6.2 设 $A\in\pounds(\mathrm{U},\mathrm{V})$ 那么

$$R(A)^{\perp}=N(A'). \tag{5.6.17}$$

证 先证 $N(A')\subset R(A)^{\perp}$，令 $g\in N(A')$，那么 $\langle A'g,u\rangle_{\mathrm{U}}=0$ $\forall u\in\mathrm{U}$，从而 $\langle g,Au\rangle_{\mathrm{V}}=0$，$\forall u\in\mathrm{U}$，故 $g\in R(A)^{\perp}$，从而有 $N(A')\subset R(A)^{\perp}$. 现在，令 $g\in R(A)^{\perp}$，则 $\langle g,Au\rangle_{\mathrm{V}}=0$，$\forall u\in\mathrm{U}$，所以 $\langle A'g,u\rangle_{\mathrm{U}}=0$，$\forall u\in\mathrm{U}$. 故 $A'g=0$，这就证明了 $g\in N(A')$. 证毕.

定理 5.6.3 设 $A\in\pounds(\mathrm{U},\mathrm{V})$，$R(A)$ 闭的，那么

$$R(A)={}^{\perp}N(A') \tag{5.6.18}$$

证 我们知道，对于 Banach 空间中任一闭集 M 有

$$M={}^{\perp}(M^{\perp}),\quad R(A)={}^{\perp}(R(A)^{\perp})={}^{\perp}(N(A'))$$

证毕.

定理 5.6.3 就是 Fredholm 抉择定理，即如果 u 是算子方程的解

$$Au=f \tag{5.6.19}$$

那么 $f\in R(A)$，由 (5.6.18) 有 $f\in{}^{\perp}N(A')$，即

$$\langle f',f\rangle_{\mathrm{V}}=0\qquad\forall f'\in N(A') \tag{5.6.20}$$

反之，若 $f\in\mathrm{V}$，且 $f\in{}^{\perp}N(A')$，即满足式 (5.6.20). 那么由 (5.6.18) 知 $f\in R(A)$，则 (5.6.19) 至少有一个解. 所以 (5.6.19) 有解的充分必要条件是 (5.6.20) 成立，即 (5.6.18) 成立.

定理 5.6.4 （有界逆定理）设 A 是 $\mathrm{U}\to\mathrm{V}$ 的下有界线性算子，即

$$\|Au\|_{\mathrm{V}}\geqslant c\|u\|_{\mathrm{U}}\qquad\forall u\in\mathrm{U} \tag{5.6.21}$$

那么 A 有连续逆 A^{-1}: $R(A)\to\mathrm{U}$. 相反，如果 A 有连续

逆 A^{-1}，那么 A 必有下界．

证　设 A 是下有界．首先 A 是 $U \to R(A)$ 上的，并且是一对一的满映照．实际上，设 $Au_1 = Au_2 = v$，那么由式(5.6.21)有 $c\|u_1 - u_2\|_U \leqslant \|Au_1 - Au_2\|_V = 0$. 故 $u_1 = u_2$，所以，A 在 $R(A)$ 上有逆算子存在，我们还要证明，A^{-1} 是连续的，为此，$\forall Au = v$ 有

$$\|A^{-1}v\|_U = \|u\|_U \leqslant \frac{1}{c}\|Au\|_V = \frac{1}{c}\|v\|_V$$

故 A^{-1} 有界．

相反，设 A 有连续逆，故存在 $c > 0$ 使得

$$\|A^{-1}v\|_U \leqslant \frac{1}{c}\|v\|_V \qquad \forall v \in R(A)$$

令 $u = A^{-1}v$，则得到式(5.6.21).证毕．

定理 5.6.5　设 $A \in \pounds(U,V)$ 是一对一映照（单射），那么 $R(A)$ 是闭的，当且仅当 A 是下有界，即成立式(5.6.21).

证　设 A 是下有界．由定理 5.6.4 知，A 有连续逆 A^{-1}. 设 $\{v_n\} \subset R(A) \subset V$，$u_n = A^{-1}v_n$，若 $v_n \to v \in V$ 那么

$$\|u_n - u_m\|_U \leqslant \frac{1}{c}\|Au_n - Au_m\|_Y$$
$$= \frac{1}{c}\|v_n - v_m\|_V \to 0, m,n \to +\infty$$

所以，$\{u_n\}$ 也是 U 中 Cauchy 序列，故 $u_n \to u \in U$，由于 A 的连续性，推出 $Au = v$，故 $v \in R(A)$，即 $R(A)$ 是闭的．

相反，设 $R(A)$ 是闭的，因而 $R(A)$ 是一个 Banach 空间，由 Banach 定理，知存在连续逆 $A^{-1} \in \pounds(R(A),U)$. 由定理 5.6.4 知，$A$ 中下有界．证毕．

定理 5.6.6 设 $A\in\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{V})$，$R(A)$ 是闭的，那么

$$R(A')=N(A)^{\perp} \tag{5.6.22}$$

证 设 $f\in R(A')$，那么 $f=A'g$，$g\in\mathrm{V}'$，对任一 $u\in N(A)$，有

$$\langle f,u\rangle_{\mathrm{V}}=\langle A'g,u\rangle_{\mathrm{U}}=\langle g,Au\rangle_{\mathrm{V}}=0 \qquad \forall u\in N(A)$$

故 $f\in N(A)^{\perp}$. 从而 $R(A')\subset N(A)^{\perp}$.

如果 $f\in N(A)^{\perp}$，对任一 $v\in R(A)$ 和每一个使 $v=Au$ 成立的 u，$\langle f,u\rangle_{\mathrm{U}}$ 具有相同的值. 实际上，若 u_1，u_2，$Au_1=Au_2=v$. 那么 $A(u_1-u_2)=0$，所以 $\langle f,u_1-u_2\rangle_{\mathrm{U}}=0$. 从而 $\langle f,u_1\rangle=\langle f,u_2\rangle$. 作泛函 f_o：

$$f_o(v)=\langle f,A^{-1}v\rangle \qquad \forall v\in R(A)$$

这里，A^{-1} 是 A 之右逆. 由上述讨论知，$f_o(v)$ 有意义，运用定理 5.6.5，对每个 $v\in R(A)$，存在一个 u 使得 $\|u\|_{\mathrm{U}}\leqslant c\|v\|_{\mathrm{V}}$，知 $v=Au$，那么

$$\left|f_o(v)\right|=\left|\langle f,u\rangle_{\mathrm{V}}\right|\leqslant\|f\|_{\mathrm{U}'}\|u\|_{\mathrm{U}}\leqslant c\|f\|_{\mathrm{U}'}\|v\|_{\mathrm{V}}$$

即 f_o 是 $R(A)$ 上线性有界泛函，由 Hahn – Banach 定理，可以将 f_o 延拓到 V 上，记为 $\hat{f}_o$，那么

$$\langle A'\hat{f}_o,u\rangle_{\mathrm{U}}=\langle\hat{f}_o,Au\rangle_{\mathrm{V}}=\langle f,u\rangle_{\mathrm{U}}$$

故 $A'\hat{f}_o=f$，从而 $N(A)^{\perp}\subset R(A')$. 证毕.

定理 5.6.6 是 Fredholm 第二抉择定理，它表明，方程

$$\mathrm{A}'g=f \tag{5.6.23}$$

有解的充分必要条件是

$$\langle f,u\rangle_{\mathrm{U}}=0 \qquad \forall u\in N(A) \tag{5.6.24}$$

由式(5.6.8)可知(5.6.23)等价于

$$A^* v = f_o \in \mathbf{U} \tag{5.6.25}$$

而(5.6.24)等价于

$$(f_o, u)_{\mathbf{U}} = 0 \tag{5.6.26}$$

而这时(5.6.20)应为

$$(f, v) = 0 \qquad \forall v \in N(A^*) \tag{5.6.27}$$

对应于 Dirichlet 问题 (5.6.1), Neumann 问题 (5.6.2), 设 U, V 为 Hilbert 空间， 定义核空间

$$N(A,\gamma) = \{u \in U_A;\ Au = 0,\ \gamma u = 0\}$$

$$N(A,\delta) = \{u \in U_A;\ Au = 0,\ \delta u = 0\}$$

$$N(A^*,\gamma^*) = \{v \in V_{A^*};\ A^* v = 0,\ \gamma^* v = 0\}$$

$$N(A^*,\delta^*) = \{v \in V_{A^*};\ A^* v = 0,\ \delta^* v = 0\}$$

以及它们的正交补

$$N(A,\gamma)^{\perp} = \{u \in \mathbf{U};\ (u,u_o)_{\mathbf{U}} = 0,\ \forall u_o \in N(A,\gamma)\}$$

$$N(A,\delta)^{\perp} = \{u \in \mathbf{U};\ (u,u_o)_{\mathbf{U}} = 0,\ \forall u_o \in N(A,\delta)\}$$

$$N(A^*,\gamma^*)^{\perp} = \{v \in \mathbf{V};\ (v,v_o)_{\mathbf{V}} = 0,\ \forall v_o \in N(A^*,\gamma^*)\}$$

$$N(A^*,\delta^*)^{\perp} = \{v \in \mathbf{V};\ (v,v_o)_{\mathbf{V}} = 0,\ \forall v_o \in N(A^*,\delta^*)\}$$

$R(A), R(A^*)$ 分别为 A, A^* 之值域， 那么

$$R(A)^{\perp} = \{v \in \mathbf{V};\ (v,v_o)_{\mathbf{V}} = 0,\ \forall v_o \in R(A)\}$$

$$R(A^*)^{\perp} = \{v \in \mathbf{U};\ (v,v_o)_{\mathbf{U}} = 0,\ \forall v_o \in R(A^*)\}$$

同理可以定义 $N(A,\gamma_1,\delta_2)$, $N(A^*,\gamma_1^*,\delta_2^*)$. 那么

定理 5.6.7 Dirichlet 问题 (5.6.1) 有解的必要条件是， 它的定解数据 (f,g) 满足

$$(f,v)_V - \langle \delta^* v, g\rangle_{\partial U} = 0 \qquad \forall v \in N(A^*, \gamma^*) \tag{5.6.28}$$

Neumann 边值问题 (5.6.2) 有解的必要条件是，它的定解数据 (f,δ) 满足

$$(f,v)_V + \langle s, \gamma^* v\rangle_{\partial V} = 0 \qquad \forall v \in N(A^*, \delta^*) \tag{5.6.29}$$

混合边值问题 (5.6.3) 有解的必要条件是，它的定解数据 (f, g_1, s_2) 满足

$$(f,v)_V + \langle s_2, \gamma_2^* v\rangle_{\partial V_2} - \langle \delta_1^* v, g_1\rangle_{\partial U_1} = 0$$

$$\forall v \in N(A^*, \gamma_1^*, \delta_2) \tag{5.6.30}$$

证 如果 Dirichlet 问题 (5.6.1) 有解，运用 Green 公式 (5.5.7)，立即可以得到式 (5.6.28). 对 Nenmann 问题，同样可以证明式 (5.6.29). 对于混合边值问题 (5.6.3)，如果有解，应用 Green 公式 (5.5.17)，就可以得到式 (5.6.23). 证毕.

定理 5.6.8 设 $u \in U_A$ 是 Dirichlet 问题 (5.6.1) 的解，那么 u 是 (5.6.1) 的唯一解，如果

$$(u,w)_U = 0 \qquad \forall w \in N(A,\gamma) \tag{5.6.31}$$

同样，(5.6.2), (5.6.3) 的解 u 是唯一的只要 u 满足

$$(u,w)_U = 0 \qquad \forall w \in N(A,\delta) \tag{5.6.32}$$

或

$$(u,w)_U = 0 \qquad \forall w \in N(A,\gamma_1,\delta_2) \tag{5.6.33}$$

证 只须证式 (5.6.31) 就够了，对式 (5.6.32), (5.6.33) 证法类似.

设 $(u,w)_U = 0$, $\forall w \in N(A,\gamma)$. 那么 $u \in N(A,\gamma)^{\perp}$. 设 u_1, u_2 分别满足式 (5.6.31)，那么 $Au_1 = Au_2 = f \Rightarrow A(u_1 - u_2) = 0$. 故 $u_1 - u_2 \in N(A,\gamma)$. 这与 $u_1 - u_2 \in N(A,\gamma)^{\perp}$ 相矛盾. 故 $u_1 = u_2$. 证毕.

定理 5.6.9 如果值域 $R(A,\gamma)\subset \mathbf{V}\times\partial\mathbf{U}$ 是闭的，那么式 (5.6.28) 也是 (5.6.1) 有解的充分条件．同样，如果 $R(A,\delta)\subset \mathbf{V}\times\partial\mathbf{V}$ 或 $R(A,\gamma_1,\delta_2)\subset\mathbf{V}\times\partial\mathbf{U}_1\times\partial\mathbf{V}_2$ 分别是闭的．则 (5.6.29),(5.6.30) 也是 (5.6.2) 和 (5.6.3) 有解的充分条件．

证 利用定理 5.6.3 容易得证．

引理 5.6.2 设 A 是由三重结构 $(\mathbf{U},\mathbf{V},B(\cdot,\cdot))$ 所确定的算子，$B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 弱强制的连续算子，那么 A 是下有界，$R(A)$ 闭的，且 $R(A)^{\perp}=\{0\}$.

证 由 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性，易知 A 的连续性．$\forall u\in U_A$，

$$\|Au\|_{\mathbf{V}}=\sup_{v\in\mathbf{V}}\frac{|B(u,v)|}{\|v\|_{\mathbf{V}}}\leqslant M\|u\|_{\mathbf{U}}\quad(v\neq 0)$$

同样，由 (5.1.8)，成立

$$\|Au\|_{\mathbf{V}}=\sup_{\|v\|_{\mathbf{V}}\leqslant 1}\|u\|_{\mathbf{U}}\left|B\left(\frac{u}{\|u\|_{\mathbf{U}}},v\right)\right|$$

$$\geqslant\|u\|_{\mathbf{U}}\inf_{\substack{w\in\mathbf{V}\\ \|w\|_{\mathbf{V}}=1}}\sup_{\substack{v\in\mathbf{V}\\ \|v\|_{\mathbf{V}}\leqslant 1}}|B(w,v)|\geqslant\delta\|u\|_{\mathbf{U}}$$

所以，A 是下有界．由定理 5.6.5，$R(A)$ 是闭的．

$R(A)^{\perp}=\{0\}$ 是 (5.1.9) 的直接推论，实际上，若 $v_o\in R(A)^{\perp}$，则

$$(Au,v_o)_{\mathbf{V}}=0\qquad\forall u\in\mathbf{U}\tag{5.6.34}$$

然而(5.1.9)给出

$$\sup_{\substack{u\in\mathbf{U}\\ u\neq 0}}\left|B(u,v_o)\right|=\sup_{\substack{u\in\mathbf{U}\\ u\neq 0}}\left|(Au,v_o)_{\mathbf{V}}\right|>0$$

这与 (5.6.34) 矛盾．证毕．

利用 Riesz 映照和定理 5.6.3，则

$$N(A^*)=(N(A^*)^{\perp})^{\perp}=R(A)^{\perp}=\{0\}$$

因而算子方程 $Au=f$ 有解的充要条件 $(f,w)_V=0 \ \forall w\in N(A^*)$ 得到满足，这就是定理 5.1.2.

例 1 考察 Laplace 算子 $-\Delta$ 的 Neumann 边值问题，$\forall f\in L^2(\Omega)$, $S\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, 则

$$\begin{cases} -\Delta u=f & \forall x\in\Omega\subset R^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=S & \forall x\in\partial\Omega \end{cases}$$

是一个自共轭问题，$N(A^*,\delta^*)$ 中的元素是下列齐次问题的解：求 $v\in H^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta v=0 & \forall x\in\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0 & \forall x\in\partial\Omega \end{cases}$$

显然，$v\in N(\Delta,\ \dfrac{\partial}{\partial n})$，而且由此有 $v=$ 常数，取 $v=1$，则 Neumann 问题有解的充要条件是

$$\int_\Omega f\,dxdy+\oint_{\partial\Omega}S\,ds=0,$$

而解是唯一的,只要$\int_\Omega u\,dxdy=0$

例2 考察弹性梁的平衡问题

平衡方程 $EI\dfrac{d^4u}{dx^4}=f(x)$

边值条件 $-EIu''(o)=m_o$, $-EIu''(L)=m_1$

$$EIu'''(o)=p_o \quad EIu'''(L)=p_1$$

其中 u 为梁的挠度，EI 为梁之刚度，f 是外荷载，m_o, m_1 是端点上的弯矩，p_o, p_1 是端点上的剪切力．为求出相容性条件，

利用分部积分，有

$$\int_o^L w\frac{d^4v}{dx^4}dx=\int_o^L v\frac{d^4w}{dx^4}dx+[v'''w-v''w'+v'w''-vw''']|_o^L$$

齐次共轭问题为

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=0,\ v''(0)=0,\ v''(L)=0,\ v'''(o)=0,\ v'''(L)=0$$

其解为 $v=c_o+c_1x$，其中 c_o，c_1 为任意常数，故相容性条件是

$$\int_o^L(c_o+c_1x)fdx-c_1m_1-(c_o+c_1L)p_1+c_1m_o+c_op_o=0$$

由于 $N(A^*,\delta^*)$ 是二维的，取 $\{c_o=1,\ c_1=0\}$ 和 $\{c_o=0,c_1=1\}$ 两组，从而

$$\int_o^L fdx=p_1-p_o,\qquad \int_o^L xfdx=Lp_1+m_1-m_o$$

这组方程正是梁的力和力矩的平衡条件．

$N(A,\delta)=\{u(x)=B_o+B_1x\}$，$B_o$，$B_1$ 为任意常数，它表示刚体运动，即垂直位移和旋转，为了消除这个刚体运动，令

$$\int_o^L(B_o+B_1x)udx=0$$

即

$$\int_o^L udx=0,\qquad \int_o^L xudx=0$$

则满足这些条件的解是唯一的，即消除刚体运动后，解是唯一的．

例 3　考察三维弹性力学方程组自然边界条件问题

$$-\nabla_j(E^{ijkl}\nabla_ku_l)=\rho f^i \qquad 在\Omega内$$

$$\delta u=\left\{E^{ijkl}\nabla_ku_ln_j\right\}=S \qquad 在\partial\Omega上$$

由于各向同性和均匀弹性，弹性算子是自共轭的，所以$N(A^*,\delta^*)$是下列齐次问题的解空间

$$\begin{cases} -\nabla_j(E^{ijkl}\nabla_k w_l) = 0 & \text{在}\Omega\text{内} \\ E^{ijkl}\nabla_k w_l n_j = 0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases}$$

它有通解

$$w = c + \theta \times r$$

其中c、θ分别表示刚性位移向量和无限小旋转向量，故(5.6.28)可以表示为

$$\int_\Omega \rho f v dx + \oint_{\partial\Omega} S v ds = 0 \qquad \forall v \in N(A^*,\delta^*)$$

由于c和θ是任意的，同时利用$f\cdot(\theta\times r) = (r\times f)\theta$，则(5.6.28)与

$$\int_\Omega \rho f dx + \oint_{\partial\Omega} S ds = 0 \tag{5.6.35}$$

$$\int_\Omega \rho(r\times f)dx + \oint_{\partial\Omega}(r\times S)ds = 0 \tag{5.6.36}$$

等价.

§ 5.7 正则性定理

在什么情况下，椭圆边值问题的弱解可以提高光滑性，这是本节所讨论的问题．显然，边值问题的定解数据，是决定弱解光滑性的本质因素．

定义 5.7.1 设$\mathbf{V}$是$\mathbf{H}^1(\Omega)$内的闭子空间，并且有$\mathbf{H}^1_0(\Omega)\subset\mathbf{V}\subset\mathbf{H}^1(\Omega)$，双线性形式$B(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$

$$B(u,v) = \int_\Omega \left\{ a^{ij}\partial_i u \partial_j v + a^i \partial_i u v + a^\circ uv \right\} dx$$

$$\forall u,v\in \mathbf{V} \tag{5.7.1}$$

那么，我们说由 $B(\cdot,\cdot)$ 所定义的抽象算子 A 在 $\mathbf{V}$ 上是 k 光滑的，是指 $\forall F\in \mathbf{H}^s(\Omega)$，$0\leqslant s\leqslant k$，变分问题

求$u\in\mathbf{V}$使得

$$B(u,v)=(F,v) \qquad \forall v\in \mathbf{V} \tag{5.7.2}$$

的每个解 u 满足 $u\in \mathbf{H}^{2+s}(\Omega)$.

为了研究抽象椭圆边值问题所定义的抽象算子 A 的光滑性，我们要利用 §1.8 中所讲到的单位分解. 设 $\{O_i\}(1\leqslant i\leqslant N)$ 是光滑区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的开覆盖，$O_o=\Omega$，$\{\beta_i\}(0\leqslant i\leqslant N)$ 是 Ω 的从属于开覆盖系 $\{O_i\}(0\leqslant i\leqslant N)$ 的单位分解. 若令 $B_i=\mathrm{supp}(\beta_i)$，则 $B_i\subset \mathbf{R}^n$ 是紧的 $(0\leqslant i\leqslant N)$. 因而若设 $u=\sum_{i=0}^{N}\beta_i u$，那么为了证明 $u\in \mathbf{H}^{s+2}(\Omega)$，只须证明

(1) $u|_{B_i\cap\Omega} \in \mathbf{H}^{2+s}(B_i\cap\Omega) \qquad (1\leqslant i\leqslant N)$

(2) $\beta_o u\in \mathbf{H}^{2+s}(B_o)$

(2) 的证明与 (1) 是类似的，因此，我们仅对 (1) 进行证明.

首先构造 $\{\beta_i\}(0\leqslant i\leqslant N)$. 实际上，利用边界展平技术，知对 $\mathbf{C}^{2+s}$ 边界类，存在 $\{\varphi_i,O_i\}(1\leqslant i\leqslant N)$ 的 $\partial\Omega$ 的坐标罩，即 $\{O_i\}(1\leqslant i\leqslant N)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集系，$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{N}O_i$，$\varphi_i\in \mathbf{C}^{s+2}(Q,O_i)$，其中 $Q=\{y\in\mathbf{R}^n:|y|<1\}$，Jacobi 行列式 $J(\varphi_i)>0$，$Q_+=\{y\in Q:\ y_n>0\}$，$Q_o=\{y\in Q:\ y_n=0\}$，φ_i 分别是 Q，Q_+，Q_o 到 O_i，$O_i\cap\Omega$，$O_i\cap\partial\Omega$ 的双射.

再构造开集系 $\{F_i\}(1\leqslant i\leqslant N)$，使得$\overline{F}_n\subset\mathbf{R}^n$，$\overline{F}_i\subset O_i$，而且 $\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{N}F_i$. $F_o=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\overline{F}_i$，所以，$\overline{F}_o\subset G_o$，同样有$\overline{\Omega}\subset\Omega\bigcup(\bigcup_{i=1}^{N}F_i)$，$\Omega\subset\bigcup_{i=0}^{N}\overline{F}_i$. 对于每个 i，$0\leqslant i\leqslant N$，令 $\alpha_i\in\mathbf{C}_o^{\infty}(\mathbf{R}^n)$，使得 $0\leqslant\alpha_i(x)\leqslant 1\quad\forall x\in\mathbf{R}^n$，$\mathrm{supp}(\alpha_i)\subset O_i$，$\alpha_i(x)=1$. $\forall x\in\overline{F}_i$.

另外，又设 $\alpha(x)\in\mathbf{C}_o^{\infty}(\mathbf{R}^n)$，使得 $0\leqslant\alpha(x)\leqslant 1$，$\forall x\in\mathbf{R}^n$，$\mathrm{supp}\alpha\subset\Omega\bigcup(\bigcup_{i=1}^{N}F_i)$，且 $\alpha(x)=1$，$\forall x\in\overline{\Omega}$. 从而$\forall i(0\leqslant i\leqslant N)$，取

$$\beta_i(x)=\alpha_i(x)\alpha(x)/\sum_{i=0}^{N}\alpha_k(x),\quad\forall x\in\bigcup_{i=0}^{N}\overline{F}_i$$

$$\beta_i(x)=0\quad\forall x\in R^n\setminus\bigcup_{i=1}^{N}\overline{F}_i$$

这组 $\{\beta_i\}(0\leqslant i\leqslant N)$ 正是我们所需要的单位分解.

对于每个固定选取的 $k(1\leqslant k\leqslant N)$，局部坐标 φ_k: $Q\to O_k$ 可以用下列方式构造一个同构 φ_k^*: $\mathbf{H}^m(O_k\bigcap\Omega)\to\mathbf{H}^m(Q_+)(m=0,1,2,)$，$\varphi_k^*(v)=v_o\varphi_k$

为了讨论(1)，我们只须考察双线性形式 $\mathbf{H}^1(Q_+)\times\mathbf{H}^1(Q_+)\to\mathbf{R}$:

$$B(\varphi_k^*(w),\varphi_k^*(v))$$
$$=\int_{O_k\cap\Omega}\left\{a^{ij}\partial_i w\partial_j v+a^i\partial_i wv+a^{\circ}wv\right\}dx$$

作变量替换，令 $w_k=\varphi_k^*(w)$, $v_k=\varphi_k^*(v)$. 得

$$B(w_k,v_k)=\int_{Q_+}(a_k^{ij}\partial_i w_k\partial_j v_k+a^i\partial_i w_k v_k+a_k^o w_k v_k)dy$$

若记 $F_k=\varphi_k^*(F)J(\varphi_k)$, 则 $B(w_k,v_k)$ 是 $\mathbf{H}^1(Q_+)$ 强制的，而 $\bar{f}_k\in\mathbf{L}^2(Q_+)$. 令

$$U=\{u\in\mathbf{H}^1(Q_+),\ u|_{\partial Q}=0\}$$

为方便，略去下标 k，考察变分问题

$$\begin{cases}\text{求}u\in\mathbf{H}^1(Q_+)\text{使得}\\ B(u,v)=(F,v)\quad\forall v\in\mathbf{U}\end{cases}\tag{5.7.3}$$

记 $K=\varphi_k^{-1}(B_k)=\varphi_k^{-1}(\mathrm{supp}(\beta_k))$, 则 $K\subset Q$, 所以只须证明 $u|_k\in\mathbf{H}^{2+s}(Q_+\bigcap K)$ 即可．

定义 5.7.2 算子 $\tau_h=(\tau_h^i,i=1,2,\cdots,n)$ 称为平移算子，如果对每个 $\mathbf{R}^n$ 中的函数和 $h\in\mathbf{R}$

$$\tau_h^i w(x)=w(x+he^i)\tag{5.7.4}$$

$\delta_h=(\delta_h^i,i=1,2,\cdots,n)$ 称为差分算子，如果

$$\begin{aligned}\delta_h^i w(x)&=h^{-1}(w(x+he^i)-w(x))\\&=h^{-1}(\tau_h^i w(x)-w(x)),\quad h\neq 0\end{aligned}\tag{5.7.5}$$

这里 e^i 是 $\mathbf{R}^n$ 中第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个基函数．

引理 5.7.1 如果 $w,v\in\mathbf{L}^2(Q_+)$, 并且 $d=\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(w),\partial Q)>0$, 则 $\forall h\in\mathbf{R},|h|<d$,

$$(\tau_h w,v)_{o,Q_+}=(w,\tau_{-h}v)_{o,Q_+}\tag{5.7.6}$$

$$\|\tau_h w\|_{o,Q_+} = \|w\|_{o,Q_+} \tag{5.7.7}$$

证 进行变量替换，并注意被积分表达式的支集是 Q_+ 的子集即可，证毕.

引理 5.7.2 设 $u\in \mathrm{H}^m(\Omega), m\geqslant 1$, $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, $\mathrm{dist}(\overline{\Omega'},\partial\Omega)>h>0$, 则

$$\|\delta^i_{\pm h}u\|_{m-1,\Omega'}\leqslant \|u\|_{m,\Omega} \tag{5.7.8}$$

证 $\forall f\in \mathrm{C}^1(a,a+h)$, 有

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(t)dt$$

故
$$|f(x+h)-f(x)|^2\leqslant h\int_x^{x+h}|f'(t)|^2dt$$

两边积分后，有

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|^2dx\leqslant h\int_a^b\int_x^{x+h}|f'(t)|^2dtdx$$

$$=h[\int_a^{a+h}|f'(t)|^2(\int_a^t dx)dt+\int_{a+h}^b|f'(t)|^2(\int_{t-h}^t dx)dt$$

$$+\int_b^{b+h}|f'(t)|^2(\int_{t-h}^b dx)dt]\leqslant h^2\int_a^{b+h}|f'(t)|^2dt$$

所以

$$\int_a^b\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|^2dx\leqslant\int_a^{b+h}|f'(t)|^2dt \tag{5.7.9}$$

显然，如果 $u\in \mathrm{C}^m(\Omega)$, 利用 (5.7.9) 以及 δ^i_h 和微分、积分可交换性，反复作用之后，可以得到 (5.7.8). 由于 $\mathrm{C}^m(\Omega)$ 在 $\mathrm{H}^m(\Omega)$ 中稠密，故 (5.7.8) 对 $\mathrm{H}^m(\Omega)$ 中任一元素成立. 证毕.

利用引理 5.7.2, 还可以得到

$$\|\delta_h^i w\|_{o,Q_+} \leqslant \|\partial_i w\|_{o,Q_+} \quad \forall w \in \mathbf{U},\ i = 1,2,\cdots,n-1 \quad (5.7.10)$$

引理 5.7.3 设 Ω 具有线段性质，即如果对每个 $x \in \partial\Omega$，存在一个开集 U_x 和一个非零向量 y_x，使得 $x \in U_x$，且对任一 $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$，和 $0 < t < 1$，有 $z + ty_x \in \Omega$。又设 $\forall u \in \mathbf{H}^m(\Omega)$，$\forall \Omega' \subset \Omega$，存在 $c > 0$，使得对于充分小的 h，有 $\|\delta_h^i u\|_{m,\Omega'} \leqslant c$，则

$$\|\partial_i u\|_{m,\Omega} \leqslant r_m c,\ r_m = \sum_{|\alpha|=m} 1 \quad (5.7.11)$$

证　先设 $m = 0$，因为 $\Omega' \subset\subset \Omega$，根据 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 的弱自列紧，可以找出一个序列 $\{h_K\}$，$h_K \to 0$ 和 $u_{hK} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$，使得 $k \to \infty$ 时，在 $\mathbf{L}^2(\Omega')$ 中 $\delta_{hk}^i u$ 弱收敛于 u_i。显然，有 $\|u_i\|_{o,\Omega'} \leqslant c$。从而 $\forall \varphi \in \mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$，

$$\int_{\Omega'} \varphi u_i dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega'} \delta_{hk}^i u\varphi dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega'} u\delta_{-hk}^i \varphi dx$$

$$= \int_{\Omega'} u\partial_i \varphi dx$$

这就证明了在 $\mathbf{L}^2(\Omega')$ 弱意义下，有 $u_i = \partial_i u$。又由 Ω' 的任意性，则有 $m = 0$ 时的 (5.7.11) 式．由归纳法可以得到任何 m 时的 (5.7.11) 式．证毕．

由式 (5.7.10) 和引理 5.7.3 容易得出，差分算子 δ_h 对所有的 $0 < h < \delta$ 在 $\mathbf{L}^2(Q_+)$ 中是一致有界的，并且由引理 5.7.3 证明过程中可以得到在 $\mathbf{L}^2(Q_+)$ 内

$$\lim_{h \to 0} \delta_h^i w(x) = \partial_i w(x) \qquad i = 1,2,\cdots,n-1 \qquad (5.7.12)$$

下面证明正则性定理.

定理 5.7.1 设 $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{C}^2$ 型区域，$a^{ij}(x)\in \mathbf{C}^1(\Omega)$，$a^i\in \mathbf{C}^1(\Omega)$，$1\leqslant i\leqslant n$，并且它们导数都是有界的．设双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$：$\mathbf{H}^1(\Omega)\times \mathbf{H}^1(\Omega)\to \mathbf{R}$，

$$B(u,v)=\int_\Omega [a^{ij}\partial_i u+a^i\partial_i uv+a^o uv]dx$$

$$\forall u,v\in \mathbf{H}^1(\Omega) \tag{5.7.13}$$

是 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 强制的．$F\in \mathbf{L}^2(\Omega)$．另外，设 $u\in \mathbf{H}^1(\Omega)$ 是下列变分问题的解：求 $u\in \mathbf{H}^1(\Omega)$，使得

$$B(u,v)=(F,v),\qquad \forall v\in \mathbf{H}^1(\Omega) \tag{5.7.14}$$

则 $u\in \mathbf{H}^2(\Omega)$．

证 由前面的讨论知道，我们只要证 (5.7.14) 的解 $u\in \mathbf{H}^2(Q_+\bigcap K)$．为此，令

$$B_h(u,v)=\int_{Q_+}\{(\delta_h^l a^{ij})\partial_i u\partial_j v+(\delta_h^l a^i)\partial_i uv+(\delta_h^l a^o)uv\}dy$$

$$\forall u,v\in \mathbf{U},|h|<\delta$$

那么，由中值定理可以证明

$$\left|B_h(u,v)\right|\leqslant c\|u\|_{1,Q_+}\|v\|_{1,Q_+} \tag{5.7.15}$$

这里 c 与 u,v 无关．利用 (5.7.6)，不难得出

$$B(\delta_h^l u,v)+B(u,\delta_{-h}^l v)=-B_h(\tau_h u,v) \tag{5.7.16}$$

由于 $K\subset\subset Q$，知存在 $\varphi(y)\in \mathbf{C}_o^\infty(Q)$，$0\leqslant\varphi\leqslant 1$，$\varphi(y)\equiv 1$，$\forall y\in K$．则由 (5.7.13)，$\forall v\in \mathbf{U}$，$0<|h|<d=\mathrm{dist}(K,\partial Q)$，有

$$B(\delta_h^l(\varphi u),v)=\{B(\delta_h^l(\varphi u),v)+B(\varphi u,\delta_{-h}^l v)\}$$

$$+\{B(u,\varphi\delta_{-h}^l v)-B(\varphi u,\delta_{-h}^l v)\}-(F,\varphi\delta_{-h}^l v) \tag{5.7.17}$$

利用 (5.7.15) 和 (5.7.16) 可知上式右边第一项是有界的，第三项

也是有界的，而通过第二项可表示为

$$B(u,\varphi\delta^l_{-h}v)-B(\varphi u,\delta^l_{-h}v)=\int_{Q_+}\{a^{ij}\partial_i u\partial_j\varphi\delta^l_{-h}v$$

$$-\partial_i\varphi u\delta^l_{-h}(\partial_j v)-a^j\partial_j\varphi u(\delta^l_{-h}v)\}dy$$

从而，我们有

$$B(\delta^l_h(\varphi u),v)\leqslant c\|v\|_{1,Q_+}\quad\forall v\in\mathrm{U},\ 0<|h|<\delta\qquad(5.7.18)$$

这里 c 与 h 和 v 无关．由于 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{H}^1(\Omega)$ 强制，从而也是 $\mathrm{H}^1(Q_+)$ 强制，在 (5.7.18) 中，令 $v=\delta^l_h\varphi u$，则有 $\forall 0<|h|<d$，$c_1\|\delta^l_h(\varphi u)\|^2_{1,Q_+}\leqslant c\|\delta^l_h(\varphi u)\|_{1,Q_+}$，此即 $\{\delta^l_h(\varphi),\ |h|<\delta\}$ 在 $\mathrm{H}^1(Q_+)$ 中是有界的．因此存在 $h_n\to 0$，使得在 $\mathrm{H}^1(Q_+)$ 中，$\delta^l_{hn}(\varphi u)$ 弱收敛于 w．但是由引理 5.7.3 知，在 $\mathrm{L}^2(Q_+)$ 中，$\delta^l_h(\varphi u)$ 弱收敛于 $\partial_l(\varphi u)$，由弱极限的唯一性，有 $\delta^l_h(\varphi u)=w\in\mathrm{H}^1(Q_+)$．这就是说 $\partial^2_l(\varphi u)\in\mathrm{L}^2(Q_+)$，这里 $l=1,2,\cdots,(n-1)$．由于 φ 在 K 上为 1，就有 $\partial^2_l(u)\in\mathrm{L}^2(K)$，$1\leqslant l\leqslant(n-1)$．和微分方程一起可得 $a^{nn}\partial^2_n u\in\mathrm{L}^2(K)$．由 $\mathrm{H}^1(Q_+)$ 上的强制性可知 a^{nn} 在 K 上正下有界，因而 $\partial^2_n u\in\mathrm{L}^2(K)$．由于 u 及其所有直到二阶的导数都属于 $\mathrm{L}^2(K)$，此即 $u\in\mathrm{H}^2(K)$．证毕．

注意到空间 $\mathrm{H}^1_o(\Omega)$ 在乘以光滑函数，平移以及沿 Γ 切线方向的差分是不变的，所以我们得到如下 Dilichlet 问题解的正则性定理．

定理 5.7.2 设 $u\in\mathrm{H}^1_o(\Omega)$，满足

$$B(u,v)=(F,v) \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

这里 Ω, B, F 的假设与定理 5.7.1 相同，则 $u\in H^2(\Omega)$.

一般地，我们有

定理 5.7.3 设 Ω 是 C^{2+k} 型区域，a^{ij}, a^i, a^0 属于 $C^{1+k}(\Omega)$，则由双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 所定义的抽象算子 A 在 $H^1(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 上是 k 正则的．

根据 Соболев 嵌入定理，如果 $F\in C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$(Hoelder 空间，$k$ 为正整数，$0<\mu<1$，见 §3.5)，边界条件和方程系数也有相应的光滑性，则变分问题(5.7.1)的弱解 $u\in C^{k+1,\mu}(\overline{\Omega})$，此即 u 是古典解．

§5.8 形式算子的谱和幂算子

设 V, H 为两个 Hilbert 空间，V 紧嵌入 H，且 V 在 H 中稠密．算子 A 是由三重结构 $(V,H,B(\cdot,\cdot))$ 定义的，其中 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V\to R$ 连续双线性形式，正象前面所讨论，A 是：

$$(Au,v)_H=B(u,v) \qquad \forall u\in D(A),\ v\in H$$

$$D(A)=\{u\in H:\ Au\in H\}$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 为 H 之内积．

算子 A 之图象 $G(A)$:

$$G(A)=\{[u,Au],\ u\in D(A)\}$$

$G(A)\subset H\times H$，其内积

$$([u_1,u_2],[v_1,v_2])_{H\times H}=(u_1,v_1)+(u_2,v_2)$$

定义 5.8.1 如果算子 A 的图象 $G(A)$ 在 $H\times H$ 中是闭的，

则称 A 为闭算子．

所以，算子 A 是闭的，就意味着当 $u_n \to u$, $Au_n \to w$, 那么 $u \in D(A)$, $Au = w$.

引理 5.8.1 若 A 是闭的和连续的，那么 $D(A)$ 也是闭的．

证 设 $u_n \in D(A), u_n \to u$（在 H 中）. 由 A 的闭性，$Au_n \to w$, $u \in D(A)$, $Au = w$, 即 $D(A)$ 是闭的，证毕．

设 $D(A)$ 在 H 中稠密，那么，可以这样定义 A 之共轭算子 A^*：$D(A^*) = \{u^* : u \to (Au, u^*)$ 是 $D(A) \to C$（复数域）的连续映照$\}$. 由于 $D(A)$ 在 H 中稠密，由熟知的泛函分析定理可知，$\forall u^* \in D(A^*)$, 必存在 $A^* u^*$ 使得

$$(Au, u^*) = (u, A^* u^*) \qquad \forall u \in D(A), u^* \in D(A^*) \qquad (5.8.1)$$

引理 5.8.2 算子 A^* 是线性和闭的．

引理 5.8.3 如果 $D(A) = \mathrm{H}$, 那么 A^* 是连续的，因而 $D(A^*)$ 是闭的．

证 如果 A^* 不连续，那么存在一个序列 $u_n^* \in D(A^*)$, 使得 $\|u_n^*\|_{\mathrm{H}} = 1$, $\|Au_n^*\|_{\mathrm{H}} \to +\infty$, 由此，从 (5.8.1) 得，$\forall u \in \mathrm{H}$

$$\left|(u, A^* u_n^*)\right| = \left|(Au, u_n^*)\right| \leqslant \|Au\|_{\mathrm{H}}$$

但是

$$\|A^* u_n^*\|_{\mathrm{H}} = \sup_{\substack{u \in \mathrm{H} \\ u \neq 0}} \frac{|(u, A^* u_n^*)|}{\|u\|_{\mathrm{H}}} \leqslant \sup_{\substack{u \in \mathrm{H} \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|_{\mathrm{H}}}{\|u\|_{\mathrm{H}}} \leqslant \|A\|$$

这与假设相矛盾.证毕.

引理 5.8.4 如果 A 是闭的，那么 $D(A^*)$ 在 H 中是稠密的．

证　我们只要证明，$D(A^*)^{\perp}=\{0\}$ 就够了．为此，$\forall v\in \mathrm{H}$，若 $v\neq 0$，则 $[0,v]\notin G(A)$．由 $G(A)$ 闭性．可知存在 $f\in(\mathrm{H}\times \mathrm{H})'$，使 $f(G(A))=\{0\}$ 和 $f(0,v)\neq 0$．特别，设 P：$\mathrm{H}\times\mathrm{H}\to G(A)^{\perp}$ 为投影算子，定义 $[u,w]=P[0,v]$，且令

$$f(u_1,u_2)=(u,u_1)_{\mathrm{H}}+(w,u_2)_{\mathrm{H}},\qquad u_1,u_2\in\mathrm{H}$$

那么，$\forall z\in D(A)$，

$$0=f(z,Az)=(u,z)+(w,Az)$$

即 $w\in D(A^*)$，且 $0\neq f(0,v)=(w,v)$．此即，$D(A^*)^{\perp}=\{0\}$．证毕．

定理 5.8.1　设 A 是 H 上一个算子，$D(A)$ 为它的定义域．那么 A 是闭的和 $D=\mathrm{H}$，当且仅当 $A\in\pounds(\mathrm{H},\mathrm{H})$．

证　如果 A 是闭的，$D=\mathrm{H}$．由引理 5.8.3 和 5.8.4 知，$A^*\in\pounds(\mathrm{H},\mathrm{H})$，故 $(A^*)^*\in\pounds(\mathrm{H},\mathrm{H})$，但由 (5.8.1) 可知，$A=(A^*)^*$，所以 $A\in\pounds(\mathrm{H},\mathrm{H})$．相反的结论显而易见，证毕．

设 $B^*(u,v)=B(v,u)$．令

$$(\overline{A}u,v)=B^*(u,v)\qquad \forall u\in D(\overline{A}),\ v\in\mathrm{H}$$

于是有

定理 5.8.2　设 $B(\cdot,\cdot)$是 $\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{R}$ 的连续双线性形式，且是 V–H 强制的，即

$$B(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_{\mathrm{V}}^2-\lambda\|u\|_{\mathrm{H}}^2\qquad\forall u\in\mathrm{V}$$

那么 $D(A)$ 在 H 中稠密，A 是闭的，而且 $A^*=\overline{A}$，$D(A^*)=D(\overline{A})$．

证　在 § 5.5 里已经证明 $D(A)$ 是稠密的．如果我们能证明 $A^*=\overline{A}$，那么$\overline{A}^*=A$，因而引理 5.8.2 给出 A 也是闭的．

设 $v\in D(\overline{A})$，则 $\forall u\in D(A)$，有 $(Au,v)=B(u,v)=B^*(v,u)$

$=(\overline{A}v,u)$, 也就是 $D(\overline{A})\subseteq D(A^*)$, 且 $A^*|_{D(\overline{A})}=\overline{A}$. 现在我们只要验证 $D(\overline{A})=D(A^*)$, 设 $u\in D(A^*)$, 由于 $\overline{A}+\lambda I$ 是双射的, 存在 $u_o\in D(\overline{A})$ 使得 $(\overline{A}+\lambda I)u_o=(A^*+\lambda I)u$, 由此, $\forall v\in D(A)$, 有

$$((A+\lambda I)v,u)=(v,(\overline{A}+\lambda I)u_o)=B(v,u_o)+\lambda(v,u_o)$$
$$=((A+\lambda I)v,u_o)$$

由于 $A+\lambda I$ 是双射, 故 $u=u_o\in D(\overline{A})$, 因而 $D(A^*)=D(\overline{A})$, 证毕.

定理 5.8.3 设 V, H 是两个 Hilbert 空间, V 到 H 的嵌入是稠密, 且是紧的. 设 A: $D(A)\rightarrow$ H 是由三重结构 (V, H, $B(\cdot,\cdot)$) 所定义的线性连续算子, 若 B 是 V 强制和对称的:

$$B(u,v)=B(v,u),\quad B(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_V^2\quad \forall u,v\in V$$

那么存在 A 之特征函数序列 $\{u_n\}$ 和特征值 λ_n:

$$Au_n=\lambda_n u_n\qquad \|u_n\|_H=1$$
$$(u_n,u_m)=0\qquad n\neq m$$
$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots<+\infty,\ n\rightarrow+\infty$$

$\{u_n\}$ 在 H 中是完备的.

证 由对称性知 $A=A^*$, $A^{-1}\in\mathcal{L}(H,H)$ 也是自共轭的. 由强制性可以知道 $A^{-1}\in\mathcal{L}(H,V)$. 由于 V 到 H 的嵌入是列紧的, 所以 $A^{-1}\in\mathcal{L}(H,H)$ 是紧算子. 故 A^{-1} 有可列个正特征值 μ_i, 相应的特征函数在 H 中是正交的, 并且由定理 5.8.1, $D(A^{-1})=H$, 所以特征函数系在 H 中是完备的. 记 $\lambda_i=\mu_i^{-1}$,

则$\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=\infty$. 证毕.

类似地有如下定理

定理 5.8.4 设定理 5.8.3 中假设成立,但双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是 V−H 强制, 即

$$B(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_{\mathrm{V}}^2-\lambda\|u\|_{\mathrm{H}}^2\qquad\forall u\in\mathrm{V}$$

那么由 (V,H,B) 所定义的算子 A, 存在一个正交的 H 中完备的本征函数系, 而特征值满足

$$-\lambda<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\cdots\leqslant\lambda_n\to+\infty$$

现在我们来研究算子A之幂算子.

设 A 是紧算子, $\forall s\in\mathbf{R}^+$, A^s 可以这样定义为

$$D(A^s)=\{u\in\mathrm{H},\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,u_j)^2<+\infty\}$$

当s为负数时, 则

$$D(A^s)=\mathrm{H}\text{在范数}(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,u_j)^2)^{1/2}\text{下的闭包}$$

所以, $\forall s\in\mathbf{R}$, 在 $D(A^s)$ 上可以定义内积和范数

$$(u,v)_{D(A^s)}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,u_j)(v,u_j)$$

$$\|u\|_{D(A^s)}^2=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,u_j)^2$$

$D(A^s)$成为Hilbert空间.

$$\forall u\in D(A^s),\ \text{则}\qquad A^s u=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^s(u,u_j)u_j$$

由于 A 是 H 上的紧算子, 所以 $D(A^s)$ 嵌入到 $D(A^{s-\varepsilon})(\varepsilon>0)$ 也是紧的. 尤其是

$$\mathrm{H}=D(A^{\circ}),\ \mathrm{V}=D(A^{1/2}),\ \mathrm{V}'=D(A^{-1/2})$$

而 $\forall u \in V$

$$\|A^{1/2}u\|_H^2 = (A^{1/2}u, A^{1/2}u) = (Au, u) = B(u, u)$$

$B(\cdot,\cdot)$作为V之等价范数，而

$$\|A^{-1/2}u\|_H^2 = (A^{-1/2}u, A^{-1/2}u) = (A^{-1}u, u) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(u, u_j)$$

所以 $$\|A^{-1/2}u\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}(u, u_j)$$

第六章　在椭圆边值问题中的应用

在这一章，我们把第五章中对抽象变分问题所建立起来的理论，应用到 $2m$ 阶真椭圆方程边值问题.幸运的是，对任一真椭圆系统，均可以建立恰当的三重结构$(\mathbf{U},\mathbf{H},B(\cdot,\cdot))$，即求解空间，主元空间和双线性形式，使得 $2m$ 阶的真椭圆方程边值问题可以恰当地纳入抽象变分问题和抽象算子方程的框架中去.

§6.1　线性椭圆算子

考虑如下形式的线性偏微分方程的边值问题

$$\begin{cases} Au(x)=f(x) & x\in\Omega \\ Bu(x)=g(x) & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{6.1.1}$$

这里 A 是 n 个变量的 k 阶线性偏微分算子

$$A=A(x,\partial)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=i}a_\alpha(x)\partial^\alpha$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq R}a_\alpha(x)\partial^\alpha \quad \forall\alpha\in Z_+^n \tag{6.1.2}$$

在式 (6.1.1) 中，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是有界开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的点，而 Ω 是函数 $u(x)$ 的定义域，其非齐次部分是由预先给定的函数 $f(x)\in R(A)$，$g(x)\in R(B)$ 给出的．而 B 是一个依赖于 A 和 Ω 的边界线性算子．

形如式 (6.1.2) 的线性偏微分算子的分类仅仅取决于最高阶导数系数的性质．为此，记算子 A 的主部 A_o 为

$$A_o(x,\partial)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(x)\partial^\alpha \tag{6.1.3}$$

设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是具有实分量的向量．对于固定的 $x_o\in\Omega$，我们可以把 ξ_i 的 k 次齐次多项式与主部 A_o 联系起来：

$$A_o(x_o,\xi)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(x_o)\xi^\alpha$$

这里 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$．可以通过确定多项式 $A_o(x_o,\xi)$ 的性质来研究算子 $A(x,\partial)$，以下定义中简记为 A．

定义6.1.1

(1) 如果 $A_o(x_o,\xi)\neq 0 \quad \forall x_o\in\Omega$ (6.1.4)

对一切 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 且 $\xi\neq 0$ 成立，则称 A 在 x_o 处是椭圆的．

(2) 如果

(i) A 是偶数阶，即 $k=2m$；

(ii) A 在 $x_o\in\Omega$ 处是椭圆的；

(iii) 对于任意一对线性无关的向量 ξ 和 η，多项式方程

$$A_o(x_o,\ \lambda\xi+\eta)=0 \tag{6.1.5}$$

恰有 $m=k/2$ 个具有正虚部的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则称 A 在 x_o 处是真椭圆．

(3) 如果

(i) A 在 x_o 处是真椭圆；

(ii) 存在着常数 $\mu_o>0$ 使得

$$|\mathrm{Re}[A_o(x_o,\xi)]|\geqslant\mu_o|\xi|^k \quad \forall\xi\in\mathbf{R}^n \tag{6.1.6}$$

这里 $|\xi|=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}$．则称 A 在 $x_o\in\Omega$ 处是强椭圆的．

如果对于每一个 $x\in\Omega$，A 是椭圆（或真椭圆或强椭圆）

的，则称 A 在 Ω 中是椭圆（或真椭圆或强椭圆）的；特别地，如果式(6.1.6)式对每个 $x\in\Omega$ 成立，$\xi\in\mathbf{R}^n$ 以及 μ_o 与 x 无关，则称 A 是一致强椭圆的．

例1　考虑$\mathbf{R}^2$中二阶偏微分算子

$$A(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq 2}a_\alpha(x)\partial^\alpha$$

$\alpha\in Z_+^2,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\quad\alpha_i=0,1,2.$写得更详细点，有

$$A(x,\partial)=A_{(0,0)}(x)\partial^{(0,0)}+a_{(1,0)}(x)\partial^{(1,0)}+a_{(0,1)}(x)\partial^{(0,1)}$$
$$+a_{(2,0)}(x)\partial^{(2,0)}+a_{(1,1)}(x)\partial^{(1,1)}+a_{(0,2)}(x)\partial^{(0,2)}$$

其主部

$$A_o(x_o,\partial)=a_{(2,0)}(x_o)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+a_{(1,1)}(x_o)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$
$$+a_{(0,2)}(x_o)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

对应的多项式为$\forall\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$A_o(x_o,\xi)=a_{(2,0)}(x_o)\xi_1^2+a_{(1,1)}(x_o)\xi_1\xi_2+a_{(0,2)}(x_o)\xi_2^2$$

从而$A_o(x_o,\xi)\neq 0$，$\xi\neq 0$的主要条件是

$$a_{(1,1)}^2<4a_{(2,0)}a_{(0,2)}$$

它也是A是否为椭圆算子的判断条件．

例2　考虑$\mathbf{R}^2$中Laplace算子

$$A(x,\partial)=\Delta u=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

容易验证它是椭圆算子，而且它还是真椭圆的．注意算子 A 的

主部 $A_o(x,\partial)$ 与 x 无关，故记为 $A_o(\partial)$，因此

$$A_o(\lambda\xi+\eta)=\lambda^2(\xi_1^2+\xi_2^2)+2\lambda(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+(\eta_1^2+\eta_2^2)$$
$$=\lambda^2|\xi|^2+2\lambda\xi\cdot\eta+|\eta|^2=0$$

则有 $\lambda=\dfrac{-\xi\cdot\eta\pm\sqrt{(\xi\cdot\eta)^2-|\xi|^2|\eta|^2}}{|\xi|^2}$

根据 Schwartz 不等式，$|\xi\cdot\eta|\leqslant|\xi||\eta|$，从而多项式方程恰有 1(=2/2) 个具有正虚部的根．

Laplace算子同样是一致强椭圆的，因为

$$A_o(\xi)=\xi_1^2+\xi_2^2=1\cdot|\xi|^2$$

例3 双调和算子

$$A(x,\partial)=\Delta^2u=\frac{\partial^4u}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4u}{\partial x_2^4}$$

是一个 4 阶椭圆算子．注意 $\forall\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$ 有

$$A_o(\xi)=\xi_1^4+2\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4\qquad\neq0，只要\xi\neq0$$

这个算子同样是真椭圆的.为此，只须注意

$$A_o(\lambda\xi+\eta)=[(\lambda\xi_1+\eta_1)^2+(\lambda\xi_2+\eta_2)^2]^2=0$$

具有和 Laplace 算子多项式方程相同的根，所不同的是它的每个根是二重的，从而它有两个具有正虚部的根．

同样的，Δ^2也是一致强椭圆的，因为

$$\mathrm{Re}A_o(\xi)=(\xi_1^2+\xi_2^2)^2=1\cdot|\xi|^4$$

§6.2 边界算子

式 (6.1.1) 中给出的边界条件 $Bu=g$ 当然不可能任意规定．

它必须在某种意义下和算子 A 相一致.

为了简单起见，假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{C}^m$ 型区域. 我们仅限于讨论形如

$$Au=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\partial^{\beta}u) \tag{6.2.1}$$

的 $2m$ 阶椭圆边值问题，这里 $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_+^n,a_{\alpha\beta}(x)\in\mathbf{C}^{\infty}(\Omega)$. 相应地，我们考虑一般的微分边界算子

$$B_k(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant q_k}b_{k\alpha}(x)\partial^{\alpha},\ x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant k\leqslant m-1 \tag{6.2.2}$$

这里 $b_{k\alpha}(x)\in\mathbf{C}^{\infty}(\partial\Omega)$. 每一个边界算子 B_k 的最高阶导数构成了它的主部

$$B_{ko}(x,\partial)=\sum_{|\alpha|=q_k}b_{k\alpha}(x)\partial^{\alpha} \tag{6.2.3}$$

算子系 (6.2.2) 没有给出边界 $\partial\Omega$ 上的明确的边界条件，例如它没有给出 q_k 的限制，也没有排除 B_i 和 B_j 可能等价甚至相等的可能性. 为此，我们给出

定义6.2.1 如果边界算子系满足

(1) 对于$x\in\partial\Omega$，以及x处边界法线向量n，有

$$B_{ko}(x,n)\neq 0$$

(2) $q_i\neq q_j,i\neq j,0\leqslant i,j\leqslant m-1$ (6.2.4)

(3) $0\leqslant q_k\leqslant 2m-1$

则称边界算子系$\{B_k\}$是正规的.

如果 k 从 0 到 $m-1$ 取值，q_k 取遍 0 到 $m-1$ 的值，则称此边界算子系 $\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$ 为 m 阶的 Dirichlet(正规)算子系.

例 4 设 $\partial\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是光滑曲线，$m=3$，考虑边界算子系

$$B_k u = \sum_{|\alpha| \leqslant q_k} b_{k\alpha}(x)\partial^\alpha u \quad 0 \leqslant k \leqslant 2$$

并且假设$\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$是正规系，例如取

$$q_o = 1,\ q_1 = 2,\ q_2 = 5,\ 2m - 1 = 5$$

则我们得到算子集合

$$B_o u = b_{o(0,0)} u + b_{o(1,0)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{o(0,1)} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$B_1 u = b_{1(0,0)} u + b_{1(1,0)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{1(0,1)} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$+ b_{1(2,0)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b_{1(1,1)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{1(0,2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$B_2 u = b_{2(0,0)} u + b_{2(1,0)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{2(0,1)} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$+ b_{2(2,0)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b_{2(1,1)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{2(0,2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$+ B_{2(3,0)} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \cdots + B_{2(0,5)} \frac{\partial^5 u}{\partial x_2^5}$$

例 5　当 $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^2$，$m = 3$ 时，考虑 Dirichlet 边界算子系$\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$，此时取 $q_o = 0,\ q_1 = 1,\ q_2 = 2,\ m - 1 = 2.$

则有　$B_o u = b_{o(0,0)} u$

$$B_1 u = b_{1(1,0)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{1(0,1)} \frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{1(0,0)} u$$

$$B_2 u = b_{2(2,0)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b_{2(1,1)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{2(0,2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$+b_{2(1,0)}\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_{2(0,1)}\frac{\partial u}{\partial x_2}+b_{2(0,0)}u$$

现在假设在任意点 $(x_1,x_2)\in\partial\Omega$，我们构造切向和法线坐标 $(\tau(x_1,x_2),\ n(x_1,x_2))$. 取

$$b_{o(0,0)}=b_o,\quad b_{1(1,0)}=n_{x_1}=\frac{\partial n_1}{\partial x_1},\quad b_{1(0,1)}=n_{x_2}=\frac{\partial n_2}{\partial x_2}$$

$$b_{1(0,0)}=0,\quad b_{2(2,0)}=n_{x_1}^2,\quad b_{2(1,1)}=2n_{x_1}n_{x_2}$$

$$b_{2(0,2)}=n_{x_2}^2,\quad b_{2(1,0)}=n_{x_1}\frac{\partial n_{x_1}}{\partial x_1}+n_{x_2}\frac{\partial n_{x_1}}{\partial x_2}$$

$$b_{2(0,1)}=n_{x_1}\frac{\partial n_{x_2}}{\partial x_1}+n_{x_2}\frac{\partial n_{x_2}}{\partial x_2},\quad b_{2(0,0)}=0$$

则 $B_o u=b_o u$

$$B_1u=\frac{\partial u}{\partial x_1}n_{x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}n_{x_2}=\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$B_2u=n_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial n}+n_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial^2 u}{\partial n^2},$$

即Dirichlet系是法式算子系

$$\{B_k\}_{k=0}^2=\{b_o u,\frac{\partial u}{\partial n},\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\}$$

应该指出，正规边界算子 B_k 可以表示成为对应阶的法线导算子 ∂_n^k. 设 $\partial\Omega$ 是 C^m 型区域，由定义 3.4.1，知对任意点 $x^o\in\partial\Omega$，设存在球 $B_\delta(x^o)$ 使得 $\partial\Omega\cap B_\delta(x^o)$ 可以表示为 $x_n=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$，这里 $f(0,\cdots,0)=0$. 以及 $f\in C^m$. 设在 $B_\delta(x^o)$

$\bigcap\Omega$ 中 $x_n \geqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$. 变换

$$y_j = x_j, \quad j=1, \cdots, n-1$$
$$y_n = x_n - f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

是由 $B_\delta(x^o)\bigcap\overline{\Omega}$ 到半球 $\overline{S}_\delta(|y|\leqslant\delta,\ y_n\geqslant 0)$ 上的一对一的 C^m 映射. 进行这样的变换后，任何一个形如式 (6.2.2) 的 $m-1$ 阶边界算子 $B(x,\partial)$ 变为

$$\hat{B}(y,\partial) = \sum_{k=0}^{m-1}\tau_k(y,\partial)\partial_n^k \tag{6.2.5}$$

这里 $\partial_n^k = \partial^k/\partial y_n^k$ 以及 $\tau_k(y,\partial)$ 表示对于变量 $(y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的阶数 $\leqslant m-k-1$ 的偏导数. 即 $\partial/\partial y_n$ 是区域 S_δ 的边界 $y_n=0$ 的法线导数，而 τ_k 中所出现的导数是切线导数. 而且如果 $B(x,\partial)$ 是正规族，则 $\tau_k(y,0)\neq 0$.

反之，如果原来的边界算子系是具有光滑系数的 m 阶 Dirichlet 系，变换 $x_j\to y_j(1\leqslant j\leqslant n-1)$，$y_n = x_n - f(x_1,\cdots,x_{n-1})$是可逆的, 则有可能把算子 $\partial_n^j = \partial^j/\partial y_n^j$ 用 B_j 表示为

$$\partial_n^k = \sum_{j=0}^{k}\hat{\tau}_{kj}(y,\partial)B_j(y,\partial);\ k=0,1,\cdots,m-1 \tag{6.2.6}$$

这里 $\hat{\tau}_{kj}$ 仅仅与 y 和切线导数有关. 其详细证明见 Lions 和 Magenes[19].

引理 6.2.1　设 (6.2.2) 中边界算子系 $\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$ 是 Dirichlet 系，且

$$b_{k\alpha}(x)\in C^{m-k}(\Omega),\ k=0,1,\cdots,m-1$$

以及 $\partial\Omega$ 是 C^m 型. 如果 $\{g_k\}_{k=0}^{m-1}$ 是 $\partial\Omega$ 上任一一组函数，g_k

$\in H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$，则存在函数 $u(x)\in H^m(\Omega)$，使得

$$(B_k u)(x)=g_k(x), x\in\partial\Omega\ ,\ 0\leqslant k\leqslant m-1$$

证　按照上面所介绍的方法把 ∂_n^k 表示成 (6.2.6) 的形式．则求 $u\in H^m(\Omega)$，使得 $(B_k u)(x)=g_k(x)$，$x\in\partial\Omega$ 等价于求 u，它在 $\partial\Omega$ 上的迹满足

$$\partial_n^k u=\sum_{j=0}^{k}\hat{\tau}_{kj}(y,\partial)g_j\ \in H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$$

从而由迹定理 4.5.5，即可得出本引理．证毕．

把边界算子系划分为正规算子系的限制还不足以使它与给定的 $2m$ 阶椭圆算子 A 完全协调，因此给出

定义 6.2.2　边界算子系 $\{B_k\}$ 称为与椭圆算子 A 在点 $x\in\partial\Omega$ 处相容，是指如果有函数 $u(s)$ 满足

$$A_o(x,\tau-in\frac{d}{ds})u(s)=0,\quad s>0 \tag{6.2.7}$$

$$B_{k_o}(x,\tau-in\frac{d}{ds})u(s)|_{s=0}=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1$$

这里 τ 是 x 处边界 $\partial\Omega$ 的切向向量，n 是 x 处边界 $\partial\Omega$ 的外法线向量，则必有 $u(s)\equiv 0$.

任意一组这样的相容边界算子系 $\{B_k\}$ 称为 A 的覆盖族并称它在点 $x\in\partial\Omega$ 处覆盖 A.

例6　考虑微分算子

$$Au=a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

以及与之相联系的边界算子

$$Bu=\alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}+\beta\frac{\partial u}{\partial x_2}+\gamma u$$

这里 a、b、c、α、β 以及 γ 是实数，并且 $b^2 - ac < 0$. 考虑点 $x_o \in \partial\Omega$，其法线向量 $n = (0,1)$，切向向量 $\tau = (\xi,0)$. 则我们希望求解下述方程

$$A_o(\tau - in\frac{d}{ds})\psi(s) = -(-a\xi^2\psi + 2bi\xi\psi' + c\psi'') = 0, \quad s \geq 0$$

$$b_o(\tau - in\frac{d}{ds})\psi(s) = -i[\xi i\alpha\psi(0) + \beta\psi'(0)] = 0$$

其通解是

$$\psi(s) = (c_o e^{\mu\xi s/c} + c_1 e^{-\mu\xi s/c})(\cos\frac{b\xi s}{c} - i\sin\frac{b\xi s}{c})$$

从而因为$|\psi(s)| < \infty$，解则成为

$$\psi(s) = c_1 e^{-\mu\xi s/c}(\cos\frac{b\xi s}{c} - i\sin\frac{b\xi s}{c})$$

而边界条件要求

$$-\frac{\xi}{c}[\mu\beta + i(b\beta - \alpha c)]c_1 = 0$$

这里 $\mu^2 = ac - b^2$，从而 $c_1 = 0$，只要 $\beta \neq 0$ 或 $\beta = 0$ 而 $\alpha c \neq 0$. 此时 $\psi(s) \equiv 0$.

例7 考虑LapLace算子

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

及边界算子

$$Bu = \alpha\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta\frac{\partial u}{\partial x_2} + \gamma u$$

由例 6 易知，如果 $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ 时，边界算子 B 覆盖 Laplace 算子.

§ 6.3 Green公式

我们现在论证 Green 公式的几个推广，它们在研究不同边值问题的解的存在性及正则性中起着重要的作用．特别当 A 是椭圆偏微分算子时，有

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x) \partial^{\beta} u) \tag{6.3.1}$$

它的形式共轭算子A^*是

$$A^* v = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq M} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} (a_{\beta\alpha}(x) \partial^{\beta} v) \tag{6.3.2}$$

显然，A 和 A^* 有同样的主部，从而若 A 是椭圆，真椭圆或一致强椭圆，则 A^* 也有同样的性质．

例 8　若 $A = d/dx$, $\Omega = (a,b) \subset \mathbf{R}^1$，则由分部积分易得

$$\int_a^b v \frac{du}{dx} dx = \int_a^b u A^* v dx + \Gamma_{\partial\Omega}(u,v)$$

其中　$A^* = -\dfrac{d}{dx}$，$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

例9　若$A = \Delta$，$\Omega \subset \mathbf{R}^2$，则由Green公式

$$\int_{\Omega} w \Delta u dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} u \Delta w dx_1 dx_2 + \Gamma_{\partial\Omega}(u,w)$$

这里$A^* = A = \Delta$

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,w) = \oint_{\partial\Omega} (w \operatorname{grad} u \cdot n - u \operatorname{grad} w \cdot n) ds$$

对于一般的情况，我们有

定理 6.3.1　如果 $2m$ 阶算子 A 在$\overline{\Omega}$上是真椭圆的，并且其系数 $a_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$，边界算子系 $\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$ 是正规的并且在 $\partial\Omega$ 上

覆盖 A 以及 $b_{k\alpha}(x)\in C^{\infty}(\partial\Omega)$, 则可以选择边界算子系 $\{S_k\}_{k=0}^{m-1}$ 使得

(1) 系数$b_{k\alpha}(x)\in C^{\infty}(\partial\Omega)$以及$S_k$的阶$p_k\leqslant 2m-1$

(2) 算子系$\{B_o,B_1,\cdots,B_{m-1},S_o,S_1,\cdots,S_{m-1}\}$
构成了 $\partial\Omega$ 上的 $2m$ 阶 Dirichlet 系．此时存在着两组唯一确定的 m 个边界算子 $\{C_k\}_{k=0}^{m-1}$ 和 $\{T_k\}_{k=0}^{m-1}$ 的正规系，使得

(3) C_k 是 $2m-1-p_k$ 阶的(这里 p_k 是 S_k 的阶)，T_k 是 $2m-1-q_k$ 阶的 (q_k 是 B_k 的阶).

(4) 算子系 $\{C_o,C_1,\cdots,C_{m-1},T_o,T_1,\cdots,T_{m-1}\}$ 是 $\partial\Omega$ 上的 $2m$ 阶 Dirichlet 系．

(5) 算子系 $\{B_k\}$, $\{S_k\}$, $\{C_k\}$, 和 $\{T_k\}$ 使得下列广义的 Green 公式成立：

$$\int_{\Omega}\bar{v}Au\,dx=\int_{\Omega}u\overline{A^{*}v}\,dx+\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) \tag{6.3.3}$$

此时

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v)=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}(S_ku\overline{C_kv}-B_ku\overline{T_kv})ds \tag{6.3.4}$$

其证明见Lions和Magenes[19] $P.115$.

例10　考虑$\mathbf{R}^2$中一般的二阶椭圆偏微分算子

$$\begin{aligned}Au=&\frac{\partial}{\partial x_1}(a\frac{\partial u}{\partial x_1})+\frac{\partial}{\partial x_1}(b_1\frac{\partial u}{\partial x_2})+\frac{\partial}{\partial x_2}(b_2\frac{\partial u}{\partial x_1})\\&+\frac{\partial}{\partial x_2}(c\frac{\partial u}{\partial x_2})+d\frac{\partial u}{\partial x_1}+e\frac{\partial u}{\partial x_2}+fu\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

这里系数 $a,b_1,\cdots,f$ 是点 $(x_1,x_2)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 的函数，由逐次偏微分，容易得到

$$\iint_\Omega vAu\,dx_1dx_2=\iint_\Omega uA^*v\,dx_1dx_2+\oint_{\partial\Omega}(avu_{x_1}n_{x_1}$$

$$-auv_{x_1}n_{x_1}+b_1vu_{x_2}n_{x_1}-b_1uv_{x_1}n_{x_2}$$

$$+b_2vu_{x_1}n_{x_2}-b_2uv_{x_2}n_{x_1}+cvu_{x_2}n_{x_2}$$

$$-cuv_{x_2}n_{x_2}+duvn_{x_1}+euvn_{x_2})ds \tag{6.3.6}$$

这里 $u_{x_1}=\partial u/\partial x_1$，$u_{x_2}=\partial u/\partial x_2$，$n=(n_{x_1},n_{x_2})$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法线向量，以及

$$A^*v=\frac{\partial}{\partial x_1}(a\frac{\partial v}{\partial x_1})+\frac{\partial}{\partial x_2}(b_1\frac{\partial v}{\partial x_1})+\frac{\partial}{\partial x_1}(b_2\frac{\partial v}{\partial x_2})$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(c\frac{\partial v}{\partial x_2})-\frac{\partial}{\partial x_1}(dv)-\frac{\partial}{\partial x_2}(eu)+fv \tag{6.3.7}$$

又设在$\partial\Omega$上给出正规边界算子

$$B_ou=\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u$$

这里 α、β 是给定的，边界 $\partial\Omega$ 是已知的，由定义 6.2.1 知

$$\alpha n_{x_1}+\beta n_{x_2}=\mu_o(s)\neq 0$$

这里 $\mu_o(s)=\mu_o(x(s),y(s))$ 是边界 $\partial\Omega$ 上定的已知函数，$ds^2=dx^2+dy^2$.

因为 B_o 是一阶的，由广义 Green 公式（定理 6.3.1）知，如果 $\{B_o,S_o\}$ 是 2 阶的 Dirichlet 系，则 S_o 必须是零阶的．这意味着 C_o 必须是一阶正规边界算子以及 T_o 必须是零阶的，即

$$S_ou=\sigma_ou,\ C_ov=\theta v_{x_1}+\theta_2v_{x_2}+\theta_ov,\ T_ov=\tau_ov$$

这里 σ_o，θ_1，…，τ_o 是 $S=(x(s),y(s))\in\partial\Omega$ 的函数．函数 σ_o 是任意的，但当它一旦确定后，C_o 和 T_o 是唯一确定的．

由式(6.3.3),必须有

$$\oint_{\partial\Omega}(S_o u\overline{C_o v}-B_o u\overline{T_o v})ds$$

与(6.3.6)中所给出的边界积分相一致，从而得出方程组

$$\begin{cases}\sigma_o\theta_o-\tau_o\gamma=dn_{x_1}+en_{x_2}, & \tau_o\alpha=-an_{x_1}-b_2n_{x_2}\\ \sigma_o\theta_1=-an_{x_1}-b_1n_{x_2}, & \tau_o\beta=-cn_{x_2}-b_1n_{x_1}\\ \sigma_o\theta_2=-cn_{x_2}-b_2n_{x_1}, & \tau_o\neq 0\end{cases} \tag{6.3.8}$$

任意规定$\sigma_o=\sigma_o(s)\neq 0$，$s\in\partial\Omega$，则

$$\theta_1=\frac{1}{\sigma_o}(-an_{x_1}-b_1n_{x_2}),\ \theta_2=\frac{1}{\sigma_o}(-cn_{x_2}-b_2n_{x_1})$$

注意到$n=(n_{x_1},n_{x_2})$，$n_{x_1}^2+n_{x_2}^2=1$，尽管τ_o满足两个独立的方程，但它仍是唯一确定的．

对n_{x_1}，n_{x_2}求解(6.3.8)并利用上面的条件，有

$$\tau_o(s)=\frac{ac-b_1b_2}{[(\alpha c-b_2\beta)^2+(\alpha b_1+\beta a)^2]^{1/2}}\Bigg|_{(x_1,x_2)\in\partial\Omega}$$

从而
$$\theta_o=\frac{1}{\sigma_o}(dn_{x_1}+en_{x_2}+\gamma\tau_o)$$

注意C_o是正规的，因为A是椭圆的，从而有

$$C_{oo}(n)=\theta_1n_{x_1}+\theta_2n_{x_2}=-\frac{1}{\sigma_o}[an_{x_1}^2+(b_1+b_2)n_{x_1}n_{x_2}$$
$$+cn_{x_2}^2]\neq 0$$

总之，我们有

$S_ou=\sigma_ou$，　$T_ov=\tau_ov$，

$C_ov=-[(an_{x_1}+b_1n_{x_2})v_{x_2}+(cn_{x_2}+$

$$+b_2 n_{x_1})v_{x_2} - (dn_{x_1} + en_{x_2} + \gamma\tau_{\zeta})v] / \sigma_o$$

例11 设A是LapLace算子

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

以及

$$B_o u = \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{grad} u \cdot n$$

由例 10 可知，如取 $\sigma_o \neq 0$，$\tau_o = -1$，则有

$$S_o u = \sigma_o u \qquad T_o v = -v \qquad C_o v = -\frac{1}{\sigma_o}\frac{\partial v}{\partial n}$$

代入(6.3.4)，得出例9中的结果.

例12 考虑双调算子

$$Au = \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2}$$

以及边界算子系

$B_o u = b_o u$，$B_1 u = b_1 \dfrac{\partial u}{\partial n}$，$n \perp \partial\Omega$，$b_o$，$b_1$ 是大于零的常数. 反复利用 Green 公式，容易得出

$$\int_\Omega v\Delta^2 u dx = \int_\Omega u\Delta^2 v dx + \Gamma_{\partial\Omega}(u,v) \tag{6.3.9}$$

从而 $A^* = A = \Delta^2$，以及

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) = -\oint_{\partial\Omega}[\frac{\partial \Delta u}{\partial n} v + (-\Delta u)\frac{\partial v}{\partial n}]ds$$
$$+\oint_{\partial\Omega}[b_o u(\frac{1}{b_o}\frac{\partial \Delta v}{\partial n}) + b_1\frac{\partial u}{\partial n}(-\frac{1}{b_1}\Delta v)]ds$$

把$\Gamma_{\partial\Omega}(u, v)$与式(6.3.4)比较，此时有

$$T_o=\frac{1}{b_o}\frac{\partial\Delta}{\partial n},\qquad T_1=-\frac{1}{b_1}\Delta$$

$$S_o=\frac{\partial\Delta}{\partial n},\qquad S_1=-\Delta$$

$$C_o=1,\qquad C_1=\frac{\partial}{\partial n}$$

容易验证$\{C_o,C_1\}$是覆盖A^*的正规系，而算子系

$$\{B_o,B_1,S_1,S_o\}=\{b_o,b_1\frac{\partial}{\partial n},-\Delta,\frac{\partial\Delta}{\partial n}\}$$

以及
$$\{C_o,C_1,T_1,T_o\}=\{1,\frac{\partial}{\partial n},-\frac{1}{b_1}\Delta,\frac{1}{b_o}\frac{\partial\Delta}{\partial n}\}$$

是$2m$等于4阶Dirichlet系.

§6.4 三重结构和变分形式

设$2m$阶椭圆微分算子A具有如下形式

$$Au=(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u) \tag{6.4.1}$$

这里$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in Z^n_+,|\alpha|=\sum_i\alpha_i$，上下指标相同表示求和，而

$$D^{\alpha}u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

系数$a_{\alpha\beta}(x)$足够光滑．设边界算子系B_k，$k=0,1,2,\cdots,m-1$和算子A一起，组成一个$2m$阶正则椭圆算子$T=\{A,B_k,k=0,1,\cdots,m-1\}$，对应的边值问题

$Au=f$　　在Ω内

$$B_k u = g_k \qquad 在\partial\Omega上, \ k = 0,1,2,\cdots,m-1 \tag{6.4.2}$$

设 $\{\Phi_k, \ k = 0,1,\cdots,m-1\}$ 为 $\{B_k, \ k = 0,1,\cdots,m-1\}$ 之互补的边界算子系统．设 p_k, q_k 分别为 $\Phi_k B_k$ 之微分阶数，而且 $p_k + q_k = 2m - 1$, $k = 0,1,2,\cdots,m-1$. 那么成立下列第二 Green 公式：

$$B(u,v) = (Au,v) + \Gamma_{\partial\Omega}(u,v) \quad \forall u,v \in D(\overline{\Omega}) \tag{6.4.3}$$

其中边界双线性形式为

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) = \sum_{k=0}^{m-1} \oint_{\partial\Omega} \Phi_k v B_k u ds \tag{6.4.4}$$

而双线性形式

$$B(u,v) = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} D^{\beta} u D^{\alpha} v dx \tag{6.4.5}$$

显然，第二 Green 公式 (6.4.3) 可以延拓到对所有 $u \in H^m(\Omega), v \in H^m(\Omega)$ 也都成立．

设边界算子 $\{B_k, \ k = 0,1,\cdots,m-1\}$ 可以分为两组

$$\{B_k, \ k = 0,1,\cdots,m-1\} = \{B_k, \ k = 0,1,\cdots,r-1\} \bigcup \{B_k, \ k = r,r+1,\cdots,m-1\}$$

其中正数 r: $0 \leqslant r \leqslant m-1$. 这里 r 是根据如下形式确定的:

$$0 \leqslant q_k < m \qquad \forall k \leqslant r-1$$

$$m \leqslant q_k \leqslant 2m-1 \qquad \forall r \leqslant k \leqslant m-1$$

而互补的正则边界算子系 Φ_k 也分为两组

$$\{\Phi_k, \ k = 0,1,\cdots,m-1\} = \{\Phi_k, \ k = 0,1,\cdots,r-1\} \bigcup \{\Phi_k, \ k = r,r+1,\cdots m-1\}$$

其中 $\qquad p_k + q_k = 2m - 1$

$$m \leqslant p_k \leqslant 2m-1 \qquad \forall k \leqslant r-1$$

$$o \leqslant p_k < m \qquad \forall r \leqslant k \leqslant m-1$$

如果 $r=m$，则 $B_k u = g_k$，$k=0,\cdots,m-1$ 是本质边界条件，也称为 Dirichlet 边界条件；如果 $r=0$，则 $B_k u = g_k$，$k=0,1,\cdots,m-1$ 是自然边界条件，称为 Neumann 边界条件；当 $0<r<m$ 时，则 $B_k u = g_k, k=0,1,\cdots,m-1$. 兼有本质边界条件和自然边界条件，称为混合边界条件.

取基本空间:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{H}^m(\Omega)$$

$$\mathbf{U}_o = \mathbf{V}_o = \{u \in \mathbf{U}:\ B_k u = 0,\ k = 0,1,\cdots,r-1\}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} = \mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}^o(\Omega)$$

那么有嵌入链条

$$\mathbf{H}_o^m(\Omega) \subset \mathbf{U}_o \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}' \subset \mathbf{U}'_o \subset \mathbf{H}^{-m}(\Omega)$$

边界空间取

$$\partial\mathbf{U} = \prod_{j=0}^{r-1} H^{m-q_j-1/2}(\partial\Omega), \quad \partial\mathbf{V} = \prod_{j=0}^{m-1} \mathbf{H}^{m-p_j-1/2}(\partial\Omega)$$

$$\partial\mathbf{U}' = \prod_{j=0}^{r-1} \mathbf{H}^{-m+q_j+1/2}(\partial\Omega) = \prod_{j=0}^{r-1} \mathbf{H}^{m-p_j+1/2}(\partial\Omega)$$

$$\partial\mathbf{V}' = \prod_{j=r}^{m-1} \mathbf{H}^{m-q_j-1/2}(\partial\Omega) = \prod_{j=r}^{m-1} \mathbf{H}^{-m+p_j+1/2}(\partial\Omega)$$

那么

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) = \sum_{k=0}^{r-1} \oint B_k u \cdot \Phi_k v ds + \sum_{k=r}^{m-1} \oint_{\partial\Omega} B_k u \cdot \Phi_k v ds$$

可以延拓为

$$\Gamma_{\partial\Omega}(u,v) = \langle \gamma u, \delta^* v \rangle_{\partial\mathbf{U}} + \langle \delta u, \gamma^* v \rangle_{\partial\mathbf{V}}$$

其中

$$\delta=\prod_{k=r}^{m-1}B_k,\quad \delta^*=\prod_{k=0}^{r-1}\Phi_k,\quad \gamma=\prod_{k=0}^{r-1}B_k,\quad \delta^*=\prod_{k=r}^{m-1}\Phi_k$$

从而有

$$\delta\in\pounds(\mathbf{U}_A,\partial V'),\ \delta^*\in\pounds(V_{A^*},\ \partial\mathbf{U}')$$

$$\gamma\in\pounds(\mathbf{U}_A,\partial\mathbf{U}),\ \gamma^*\in\pounds(\mathbf{V},\ \partial\mathbf{V})$$

所以,第二Green公式(6.4.3)可以表示为

$$B(u,v)=(Au,v)_o+<\gamma u,\delta^*v>_{\partial U}+<\delta u,r^*v>_{\partial V} \tag{6.4.6}$$

椭圆边值问题(6.4.2)的Galerkin变分形式是

$$\begin{cases}\text{求}w\in\mathbf{U}_o\text{使得}\\ B(w,v)=<l,v> \qquad \forall v\in\mathbf{U}_o\end{cases} \tag{6.4.7}$$

其中

$$\langle l,v\rangle=\langle f,v\rangle_V-B(\gamma^{-1}\bar{g},v)+\langle\hat{g},\gamma^*v\rangle_{\partial V} \tag{6.4.8}$$

$$g=(\bar{g},\hat{g}),\ \bar{g}=\{g_1,g_2,\cdots,g_{r-1}\},\ \hat{g}=\{g_r,g_{r+1},\cdots,g_{m-1}\}$$

γ^{-1}为边界算子γ之右逆.于是

$$u=w+\gamma^{-1}\bar{g}\in\mathbf{U} \tag{6.4.9}$$

就是边界问题(6.4.2)的解,称为弱解.这里,本质边界条件隐含在$\mathbf{U}_o$中,而自然边界条件则包含在线性泛函l之中.

(1) 当$r=m$时,边界条件是Dirichlet边界条件,这时

$$\bar{g}=g,\ \hat{g}=0,\ \partial\mathbf{U}=\prod_{j=0}^{m-1}\mathbf{H}^{m-q_j-1/2}(\partial\Omega)$$

$$\mathbf{U}_o=\mathbf{V}_o=\mathbf{H}_o^m(\Omega)$$

(2) 当$r=0$时,边界条件为Neumann边界条件

$$\bar{g}=0,\ \hat{g}=g,\ \partial\mathbf{V}=\prod_{j=0}^{m-1}\mathbf{H}^{m-p_j-1/2}(\Omega)$$

$$= \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{-m+q_j+1/2}(\Omega)$$

$$\partial \mathrm{V}' = \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{m-q_j-1/2}(\partial\Omega),\ \mathrm{U}_o = U,\ \mathrm{V}_\bullet = \mathrm{V}.$$

因为 $q_j \geqslant m$，$\partial \mathrm{V}'$ 是负数阶 Соболев 空间，而 $\partial \mathrm{V}$ 是分数阶 Соболев 空间 .

§ 6.5 椭圆性和强制性

现在，讨论由式(6.4.3)所定义的双线性形式$B(\cdot,\cdot)$的性质.

定理 6.5.1 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$\partial\Omega$ 充分光滑，$a_{\alpha\beta} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$，那么由 (6.4.3) 所定义的双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 满足

(1) $B(\cdot,\cdot)$是$\mathrm{H}^m(\Omega)\times\mathrm{H}^m(\Omega)\to\mathbf{R}$连续的双线性形式:

$$|B(u,v)| \leqslant M\|u\|_{m,\Omega}\|v\|_{m,\Omega} \quad \forall u,v\in\mathrm{H}^m(\Omega) \qquad (6.5.1)$$

共中$M>0$的常数.

(2) 如果 $a_{\alpha\beta}$ 关于下标 α,β 是对称的：$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$，那么 $B(\cdot,\cdot)$ 也是对称的，即

$$B(u,v)=B(v,u),\ \forall u,v\in\mathrm{H}^m(\Omega) \qquad (6.5.2)$$

(3) 如果算子A是强椭圆的，即存在$\mu>0$，使得

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant \mu|\xi|^{2m} \quad \forall\xi\in\mathbf{R}^n \qquad (6.5.3)$$

其中
$$|\xi|^2=\sum_{i=1}\xi_i^2$$

那么成立Gårding不等式：$\lambda_o>0$, $\mu_o>0$, 使得

$$B(u,u)\geqslant\mu_o\|u\|^2_{m,\Omega}-\lambda_o\|u\|^2_{o,\Omega},\quad \forall u\in\mathrm{H}^m_o(\Omega) \qquad (6.5.4)$$

即B是$H^m(\Omega)-H^o(\Omega)$强制的.

证 由于$a_{\alpha\beta}\in L^\infty(\Omega)$，利用Schwartz不等式，不难得到式(6.5.1)，而结论(2)是显然的，因此，我们只须证Gȧrding不等式.分为两个步骤：

(1) 设$a_{\alpha\beta}$在Ω上是常数，由于$C_o^\infty(\Omega)$在$H_o^m(\Omega)$中稠密.所以，只要对$u\in C_o^\infty(\Omega)$证明就够了.这是因为，$\forall u\in H_o^m(\Omega)$，存在序列$u_k\in C_o^\infty(\Omega)$，$k=1,2,\cdots$，使$\|u_k-u\|_{m,\Omega}\to 0$当$k\to+\infty$，这时$\|u_k\|_{m,\Omega}\to\|u\|_{m,\Omega}$，所以

$$|B(u,u)-B(u_k,u_k)|=|B(u-u_k,u)+B(u_k,u-u_k)|$$
$$\leqslant M(\|u\|_{m,\Omega}+\|u_k\|_{m,\Omega})\|u-u_k\|_{m,\Omega}\to 0, K\to+\infty$$

因此，若式(6.5.4)对u_k成立，则可以进行极限过渡，则它对u也同样成立.

为了证明当$a_{\alpha\beta}$为常数时Gårding不等式成立，我们注意到，$\forall u\in C_o^\infty(\Omega)$，有

$$B(u,u)=B_m(u,u)+B_o(u,u)$$

其中
$$B_m(u,u)=\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}}(a_{\alpha\beta}D^\beta u,D^\alpha u)$$
$$B_o(u,u)=\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leqslant m\\|\alpha|+|\beta|<2m}}(a_{\alpha\beta}D^\beta u,D^\alpha u)$$

由于$u\in C_o^\infty(\Omega)$，可以用零延拓到全空间，从而可以利用Fourier变换，那么由式(6.5.3)及Plancherel等式

$$B(u,u)=\int_{R^n}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}}a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta|\hat{u}(y)|^2dy$$

$$\geqslant \mu \int_{R^n} |y|^{2m} |\hat{u}(y)|^2 dy = \mu \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u, D^\alpha u) = \mu |u|^2_{m,\Omega}$$

这里$|\cdot|_{m,\Omega}$记为$\mathbf{H}^m(\Omega)$中的半范，所以

$$B_m(u,u) \geqslant \mu |u|^2_{m,\Omega} \qquad \forall \in \mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$$

另一方面，$\forall |\alpha| \leqslant m$，$|\beta| \leqslant m$，但$|\alpha| + |\beta| < 2m$，则利用 Schwartz 不等式，有

$$|B_o(u,v)| \leqslant k \|u\|_{m-1,\Omega} \|u\|_{m,\Omega}.$$

从而 $$B(u,u) \geqslant \mu |u|^2_{m,\Omega} - k \|u\|_{m-1,\Omega} \|u\|_{m,\Omega}.$$

利用 Young 不等式 $ab \leqslant \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$，$\forall \varepsilon > 0, a, b \in \mathbf{R}$

以及 $$|u|^2_{m,\Omega} = \|u\|^2_{m,\Omega} - \|u\|^2_{m-1,\Omega}$$

那么

$$B(u,u) \geqslant (\mu - \frac{k}{4\varepsilon}) \|u\|^2_{m,\Omega} - (\mu + k\varepsilon) \|u\|^2_{m-1,\Omega} \quad \forall u \in \mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$$

另一方面，利用 Соболев 空间导数插入不等式：$\forall u \in \mathbf{H}^m(\Omega)$，有

$$\|u\|^2_{m-1,\Omega} \leqslant \varepsilon_1 \|u\|^2_{m,\Omega} + c(\varepsilon_1) \|u\|^2_{o,\Omega} \quad \forall \varepsilon_1 > 0$$

于是有 $$B(u,u) \geqslant \mu_o \|u\|^2_{m,\Omega} - \lambda_o \|u\|^2_{o,\Omega} \quad \forall u \in \mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$$

其中 $\mu_o = \mu - \frac{k}{4\varepsilon} - \mu\varepsilon_1 - k\varepsilon_1\varepsilon$，$\lambda_o = (\mu + k\varepsilon) c(\varepsilon_1)$. 可以适当选取 ε 和 ε_1，使得 $\mu_o > 0$，$\lambda_o > 0$. 于是便得到式 (6.5.4).

(2) 如果 $a_{\alpha\beta}$ 在 Ω 上不是常数，设 $B_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_o| \leqslant r\}$ 是一个以 x_o 为中心，以 r 为半径的球. 又令

$$\sup_{x,x' \in B_r(x))} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x')| = \varepsilon \tag{6.5.5}$$

那么$\forall u \in \mathbf{C}_o^\infty(B_r(x_o))$，记$a^o_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x_o)$，则

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}u)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(a^{o}_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}u)$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}((a_{\alpha\beta}-a^{o}_{\alpha\beta})D^{\beta}u,D^{\alpha}u)$$

利用Schwartz不等式及(6.5.3)，那么

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}u)\geqslant(\mu-\varepsilon')|u|^2_{m,\Omega}\quad\forall u\in C^{\infty}_{o}(B_r(x_o))$$

这里ε'是依赖于ε的任意小常数，使得$\mu-\varepsilon'>0$.设有界区域$\overline{\Omega}$可以用有限个球$B_r(x_i),i=1,2,\cdots,N$覆盖住.$\{\varphi_i\},i=1,2,\cdots,N$是从属于这个覆盖系的单位分解.

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i^2=1,\quad \varphi_i\in C^{\infty}_{o}(B_r(x_i)),\ 0\leqslant\varphi_i\leqslant1,\quad i=\overline{1,N}$$

故 $$B_m(u,u)=\sum_{m=|\alpha|=|\beta|}\sum_{i=1}^{N}(\varphi_i a_{\alpha\beta}D^{\alpha}u,\varphi_i D^{\alpha}u)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(a_{\alpha\beta}D^{\alpha}(\varphi_i u),\ D^{\alpha}(\varphi_i u))-F_i\Big)$$

利用Leibniz公式，不难推得

$$F_i=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m,|\alpha|+|\beta|<2m}(b_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}u)$$

$$|F_i|\leqslant c_i\|u\|_{m,\Omega}\|u\|_{m-1,\Omega}$$

和前面讨论相类似，有

$$B_m(u,u)\geqslant\sum_{i=1}^{N}\big(\mu|\varphi_i u|^2_{m,\Omega}-c_i\|u\|_{m,\Omega}\|u\|_{m-1,\Omega}\big)$$

然而

$$|\varphi_i u|^2_{m,\Omega}\geqslant\int_{\Omega}\varphi_i^2\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u|^2dx-b_i\|u\|_{m-1,\Omega}\|u\|_{m,\Omega}$$

则得 $$B_m(u,u)\geqslant\mu_o|u|^2_{m,\Omega}-\lambda_o\|u\|_{m,\Omega}\|u\|_{m-1,\Omega}$$

另一方面，由于$a_{\alpha\beta}\in L^{\infty}(\Omega)$，所以

$$\left|B_o(u,u)\right|\leqslant c\|u\|_{m,\Omega}\|u\|_{m-1,\Omega}\qquad c_1>0$$

故有
$$B(u,u)\geqslant\mu_o|u|_{m,\Omega}^2-c_1\|u\|_{m,\Omega}\|u\|_{m-1,\Omega},\quad c_1>0$$

运用(1)中的同样的讨论方法，就可以得到(6.5.4).证毕.

考察二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases}Au=f & \text{在}\Omega\text{内}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=g & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases}\tag{6.5.6}$$

这里

$$Au\equiv-D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u)+a_{\alpha}D^{\alpha}u+a_ou\tag{6.5.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=a_{\alpha\beta}D^{\beta}un^{\alpha}\tag{6.5.8}$$

n 为 $\partial\Omega$ 上单位外法线向量，$\sigma>0$. 与 (6.5.6) 相应的双线性形式

$$B(u,v)=\int_{\Omega}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}uD^{\alpha}v+a_{\alpha}D^{\alpha}uv$$
$$+a_ouv)dx+\oint_{\partial\Omega}\sigma uvds\tag{6.5.9}$$

设$a_{\alpha\beta}$，a_{α}，$a_o\in L^{\infty}(\Omega)$， 且满足椭圆性条件

$$a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\geqslant\alpha_o|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbf{R}^n\tag{6.5.10}$$

其中α_o为常数.取基本空间

$$\mathbf{U}=\mathbf{H}^1(\Omega)\mathbf{V}=\mathbf{H}^1(\Omega),\ \mathbf{U}_o=\mathbf{V}_o=\mathbf{H}_o^1(\Omega),\ \ \mathbf{H}=\mathbf{L}^2(\Omega)$$

$$\partial\mathbf{U}=\partial\mathbf{V}=\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega),\quad\partial\mathbf{U}'=\partial\mathbf{V}'=\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$U_A=\{u\in\mathbf{U},Au\in\mathbf{H}\},\quad V_{A^*}=\{u\in\mathbf{V},\ A^*u\in\mathbf{H}\}$$

其中A^*为A之形式共轭算子

$$A^* v = -D^\alpha(a_{\beta\alpha} D^\beta v) - D^\alpha(a_\alpha v) + a_o v$$

边界算子 $\gamma \in \pounds(\mathrm{U}, \partial\mathrm{U})$ 为零阶迹算子，$\forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$，$\gamma u = u|_{\partial\Omega} \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$，$\delta$ 为一阶迹算子

$$\forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \delta u = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = a_{\alpha\beta} D^\beta u\, n^\alpha \big|_{\partial\Omega} \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

与 (6.5.8) 相应的变分问题

$$\begin{cases} \text{求} u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{使得} \\ B(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \end{cases} \tag{6.5.11}$$

其中　$\langle F, v\rangle = \langle f, v\rangle + \langle g, v\rangle_{\partial\Omega}$

定理 6.5.2　设 $a_{\alpha\beta}$，$a_\alpha, c \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$，$\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$. 那么由 (6.5.9) 所定义的双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ 是弱强制的．

证　$\forall u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\leqslant c_2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + c_1 \|\sigma\|_{\infty,\partial\Omega} \|v\|_{o,\partial\Omega} \|u\|_{o,\partial\Omega} \\ &\leqslant c\|u\|_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

这里利用到 $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ 嵌入 $\mathrm{H}^1(\Omega)$. 设 k 为足够大的正常数 $k > 0$,

令　$\tilde{B}(u,v) = \int_\Omega (a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v + a_\alpha D^\alpha u v + kuv) dx + \oint_{\partial\Omega} \sigma uv ds$

利用(6.5.10)有

$$\int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha u dx \geqslant \alpha_o |u|^2_{1,\Omega} = \alpha_o \|u\|^2_{1,\Omega} - \alpha_o \|u\|^2_{o,\Omega}$$

$$\int_\Omega a_\alpha D^\alpha u u dx \leqslant \varepsilon \|u\|^2_{1,\Omega} + \|u\|^2_{o,\Omega}$$

$$\oint_\Omega \sigma u^2 dx \leqslant c_1 \|u\|^2_{o,\partial\Omega}$$

根据嵌入定理 $\|u\|_{o,\partial\Omega} \leqslant c\|u\|_{o,2+\frac{2}{n-1},\Omega}$

再利用到Lions引理：

引理6.5.1 (Lions)设$\mathbf{X}_o$,$\mathbf{X}$和$\mathbf{X}_1$是三个Banach空间,且

$$\mathbf{X}_o \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{X}_1$$

假设$\mathbf{X}$到$\mathbf{X}_1$嵌入是连续的，而$\mathbf{X}_o$到$\mathbf{X}$的嵌入是紧的，那么对任何$\varepsilon > 0$，是存在常数$c_\varepsilon > 0$，它只依赖于ε和$\mathbf{X}_o$，$\mathbf{X}$，$\mathbf{X}_1$，使得

$$\|v\|_{\mathbf{X}} \leqslant \varepsilon\|v\|_{\mathbf{X}_o} + c_\varepsilon\|v\|_{\mathbf{X}_1} \qquad \forall v \in \mathbf{X}_o \tag{6.5.12}$$

证 用反证法．设式(6.5.12)不成立，那么对任一个$c > 0$，至少存在一个v使得

$$\|v\|_{\mathbf{X}} \geqslant \varepsilon\|v\|_{\mathbf{X}_o} + c\|v\|_{\mathbf{X}_1}$$

取$c = m$(正整数)，则有v_m使得

$$\|v_m\|_{\mathbf{X}} \geqslant \varepsilon\|v_m\|_{\mathbf{X}_o} + m\|v_m\|_{\mathbf{X}_1} \qquad m = 1,2,\cdots$$

置 $w_m = w_m / \|w_m\|_{\mathbf{X}_o}$，那么

$$\varepsilon + m\|w_m\|_{\mathbf{X}_1} \leqslant \|w_m\|_{\mathbf{X}}$$

由于$\|w_m\|_{\mathbf{X}_o} = 1$，$\mathbf{X}_o$到$\mathbf{X}$嵌入是紧的，所以存在一个子序列$w_\mu$，它在$\mathbf{X}$中强收敛，所以$\|w_\mu\|_{\mathbf{X}}$有界，因而$\|w_\mu\|_{\mathbf{X}_1} \to 0$. 那么$w_\mu$在$\mathbf{X}$中的极限也是零，从而$\|w_\mu\| \to 0$, $\mu \to +\infty$，但

$$\|w_m\|_{\mathbf{X}} > \varepsilon$$

这就导致矛盾.证毕.

由Lions引理,则

$$\|u\|_{o,2+\frac{2}{n-1},\Omega} \leqslant \varepsilon_1\|u\|_{1,\Omega} + c_x(\varepsilon_1)\|u\|_{o,\Omega}$$

由此，不难得到

$$\tilde{B}(u,u) \geqslant (\mu - \varepsilon - \varepsilon_1)\|u\|^2_{1,\Omega} - (k - c_o(\varepsilon) - c_1(\varepsilon_1))\|u\|^2_{o,\Omega}$$

取 ε, ε_1，使得 $\mu - \varepsilon - \varepsilon_1 \geqslant \mu_o > 0$，取 k 如此之大，使得 $k - c_o(\varepsilon) - c_1(\varepsilon_1) \geqslant \lambda_o > 0$. 则

$$\tilde{B}(u,u) \geqslant \mu_o \|u\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \tag{6.5.13}$$

$\forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$，构造$w \in \mathrm{H}^1(\Omega)$使得

$$\begin{cases} A^* w = -(a_o - k)u \\ B_o^* w = 0 \end{cases} \tag{6.5.14}$$

这里(A^*, B_o^*)是(A, B_o)的共轭算子

$$A^* v = -D^\alpha(a_{\beta\alpha} D^\beta v) - D^\alpha(a_\alpha v) + a_o v$$

$$B^* v = \frac{\partial v}{\partial n^*} + b_o v$$

$$\frac{\partial v}{\partial n^*} = a_{\alpha\beta} D^\alpha v n^\beta, \quad b_o = a_\alpha n^\alpha$$

于是式(6.5.14)存在一个解w使得

$$\|w\|_{3,\Omega} \leqslant c\|u\|_{1,\Omega} \tag{6.5.15}$$

而式(6.5.14)的变分形式为

$$B(z,w) = -\int_\Omega (a_o - k)uz\,dx \qquad \forall z \in \mathrm{H}^1(\Omega)$$

从而令$z = u$，则

$$B(u,w) + R(u,u) = 0 \tag{6.5.16}$$

共中

$$R(u,u) = \int_\Omega (a_o - k)u^2 dx$$

令 $v_o = u + w$，那么

$$B(u,v_o) = \tilde{B}(u,u) + B(u,w) + R(u,u) \tag{6.5.17}$$

由(6.5.13)和(6.5.16)得

$$B(u,v_o) \geqslant \mu_o \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega) \tag{6.5.18}$$

但是

$$\|v_o\|_{1,\Omega} = \|u + w\|_{1,\Omega} \leqslant \|u\|_{1,\Omega} + \|w\|_{1,\Omega} \qquad (\text{由}(6.5.15))$$
$$\leqslant \|u\|_{1,\Omega} + c\|u\|_{1,\Omega} = (c+1)\|u\|_{1,\Omega}$$

回到(6.5.18)则

$$B(u,v_o) \geqslant \mu_1 \|u\|_{1,\Omega} \|v_o\|_{1,\Omega}$$

从而 $\sup\limits_{\substack{v\in \mathbf{H}^1(\Omega)\\ \|v\|_{1,\Omega}\leqslant 1}} |B(u,v)| \geqslant \sup\limits_{\substack{v\in \mathbf{H}^1(\Omega)\\ \|v\|_{1,\Omega}= 1}} |B(u,v)|$

$$\geqslant \frac{1}{\|v_o\|_{1,\Omega}} |B(u,v_o)| \geqslant \mu_1 \|u\|_{1,\Omega}$$

调换 u, v 的位置，重复上述讨论，可以推出弱强制的另一个不等式．证毕．

例1 Poisson方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} Au \equiv -\Delta u = f & \text{在}\Omega\text{内} \\ u|_\Gamma = g & \text{在}\partial\Omega = \Gamma\text{上} \end{cases} \tag{6.5.19}$$

取 $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{G}$, $\mathbf{U}_o = \mathbf{V}_o = \mathbf{H}_o^1(\Omega)$

γ: $\mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega), \partial\mathbf{U} = \partial\mathbf{V} = \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\partial\mathbf{U}' = \partial\mathbf{V}' = \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$B(u,v) = \int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v dx$$

那么相应的变分问题是

$$\begin{cases} \text{求}w \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)\text{使得} \\ B(w,v) = \langle f,v\rangle - B(\gamma^{-1}g,v) \qquad \forall v \in \mathbf{H}_o^1(\Omega) \end{cases}$$

则$u = w + \gamma^{-1}g$就是式(6.5.19)的弱解.

根据 Fridrichs 不等式，$B(\cdot,\cdot)$ 是 $H_o^1(\Omega)$ 强制，又由于 (A,γ) 是自共轭的 $A=A^*$，$\gamma=\gamma^*$，则 $N(A^*,\gamma^*)=\{0\}$(齐次的 Laplace 方程的解)，相容性条件自动得到满足．

例2 双调和方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta^2 u = f & 在\Omega内 \\ u|_{\partial\Omega} = g_o,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_1 \end{cases} \tag{6.5.20}$$

取 $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{H}^2(\Omega)$，$\mathbf{U}_o=\mathbf{V}_o=\mathbf{H}_o^2(\Omega)$，$\partial\mathbf{U}=\partial\mathbf{V}=\mathbf{H}^{3/2}(\partial\Omega)\times\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$，$\partial\mathbf{U}'=\partial\mathbf{V}'=\mathbf{H}^{-3/2}(\partial\Omega)\times\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$，$\gamma\in\mathcal{L}(\mathbf{U},\partial\mathbf{U})$，$\gamma^*=\gamma=(\gamma_o,\gamma_1)$ 这里 γ_o，γ_1 分别为 $\partial\Omega$ 上零阶和一阶迹算子．取双线性形式

$$B(u,v)=\int_\Omega \Delta u\Delta v dx \tag{6.5.21}$$

那么有 $$B(u,u)=|u|_{2,\Omega}^2 \qquad \forall u\in\mathbf{H}_o^2(\Omega) \tag{6.5.22}$$

实际上 $$\|\Delta u\|_{o,\Omega}^2=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n(\partial_i^2 u)^2+\sum_{i\neq j}\partial_i^2 u\partial_j^2 u\Big)dx$$

$$|u|_{2,\Omega}^2=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n(\partial_i^2 u)^2+\sum_{i\neq j}(\partial_i\partial_j u)^2\Big)dx$$

但是

$$\int_\Omega(\partial_i\partial_j u)^2 dx=\int_\Omega(\partial_i\partial_j u)(\partial_i\partial_j u)dx=\int_\Omega\partial_j u(\partial_i\partial_i\partial_j u)dx$$

$$=\int_\Omega\partial_j\partial_j u\cdot\partial_i\partial_i u dx \qquad \forall u\in\mathbf{H}_o^2(\Omega)$$

从而得 $$\|\Delta u\|_{o,\Omega}^2=|u|_{2,\Omega}^2 \qquad \forall u\in\mathbf{H}_o^2(\Omega) \tag{6.5.23}$$

于是式(6.5.22)成立．由 Fridrichs 不等式可知，$B(\cdot,\cdot)$

是 $\mathbf{H}_o^2(\Omega)$ 强制：

$$B(u,u)=|u|_{2,\Omega}^2 \geqslant \alpha\|u\|_{2,\Omega}^2 \qquad \forall u\in \mathbf{H}_o^2(\Omega) \tag{6.5.24}$$

由于 Δ^2 为自共轭，$N(A^*,y^*)$ 为下列齐次问题的解空间

$$\begin{cases} \Delta^2 v=0 & \text{在}\Omega\text{内} \\ v|_{\partial\Omega}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0 \end{cases}$$

它只有零解．所以 $N(A^*,y^*)=\{0\}$．相容性条件自动得到满足．

由迹定理，存在 $u_o\in \mathbf{H}^2(\Omega)$ 使得 $u_o|_{\partial\Omega}=g_o$，$\left.\dfrac{\partial u_o}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=g_1$，令 $u=w+u_o$，则 w 满足

$$\begin{cases} -\Delta^2 w=f-\Delta^2 u_o \\ w|_{\partial\Omega}=\left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

它的变分形式是

$$\begin{cases} \text{求}w\in \mathbf{H}_o^2(\Omega)\text{使得} \\ B(w,v)=\langle f,v\rangle+B(u_o,v) \qquad \forall v\in \mathbf{H}_o^2(\Omega) \end{cases} \tag{6.5.25}$$

(6.5.25) 有唯一解，$u=w+u_o$ 就是式 (6.5.20) 的唯一解．

例3　考察Neumann问题

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f & \text{在}\Omega\text{内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g & \text{在}\Gamma=\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{6.5.26}$$

取 $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{H}^1(\Omega)$，$\mathbf{H}=\mathbf{G}=\mathbf{L}^2(\Omega)$，$\partial\mathbf{U}=\partial\mathbf{V}=\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$，双线性形式

$$B(u,v)=\int_\Omega(\text{grad}u\cdot\text{grad}v+uv)dx=(u,v)_{1,\Omega}\quad\forall u,v\in\mathbf{U}\quad(6.5.27)$$

那么式(6.5.26)变分问题是

$$\begin{cases}\text{求}u\in\mathbf{H}^1(\Omega),\ \text{使得}\\ B(u,v)=\langle f,v\rangle+\langle g,v\rangle_\Gamma\quad\forall v\in\mathbf{H}^1(\Omega)\end{cases}\quad(6.5.28)$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ 表示 $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathbf{H}^{-1/2}$ 之对偶积．由 $B(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ 是强制的，而 $N(A^*,\delta^*)=\{0\}$．所以式(6.5.28)有唯一解．

现在，让我们取不同的基本空间，$\forall 0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$，取 $\mathbf{H}=\mathbf{L}^2(\Omega)$，$\mathbf{U}=\mathbf{H}^{1-\alpha}(\Omega)$，$\mathbf{V}=\mathbf{H}^{1+\alpha}(\Omega)$，$\partial\mathbf{U}=\mathbf{H}^{-1/2-\alpha}(\Gamma)$，$\partial\mathbf{V}=\mathbf{H}^{-1/2+\alpha}(\Gamma)$，$\Gamma=\partial\Omega$，那么有

定理 6.5.3 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是由(6.5.27)所定义的双线性形式，那么

(1) $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{H}^{1-\alpha}(\Omega)\times\mathbf{H}^{1+\alpha}(\Omega)\to\mathbf{R}$ 连续双线性形式；

(2) $B(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{H}^{1-\alpha}\Omega)\times\mathbf{H}^{1+\alpha}(\Omega)$ 上弱强制．

证 $\forall u,v\in D(\overline{\Omega})$，令

$$q=-\Delta u+u\quad(6.5.29)$$

那么
$$B(u,v)=\int_\Omega qvdx+\oint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}vdx$$

从而

$$|B(u,v)|\leqslant\|q\|_{-1-\alpha,\Omega}\|v\|_{1+\alpha,\Omega}+\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{-1/2-\alpha,\Gamma}\|v\|_{1/2+\alpha,\Gamma}$$

由(6.5.29)和嵌入不等式

$$\|q\|_{-1-\alpha,\Omega}\leqslant c\|u\|_{1-\alpha,\Omega},\quad\|v\|_{1/2+\alpha,\Gamma}\leqslant c\|v\|_{1+\alpha,\Gamma}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{-1/2-\alpha,\Gamma} \leqslant c\|u\|_{1-\alpha,\Gamma}$$

于是 $\quad |B(u,v)| \leqslant c\|u\|_{1-\alpha,\Omega}\|v\|_{1+\alpha,\Omega} \qquad \forall u,v\in D(\overline{\Omega})$

由于 $D(\overline{\Omega})$ 在 $H^{1-\alpha}(\Omega)$ 和 $H^{1+\alpha}(\Omega)$ 中稠密，所以 $B(\cdot,\cdot)$ 在 $H^{1-\alpha}(\Omega)\times H^{1+\alpha}(\Omega)$ 上连续．

我们只需证明，$B(\cdot,\cdot)$ 在 $D(\overline{\Omega})\times D(\overline{\Omega})$ 满足弱强制性不等式就可以．$\forall u\in D(\overline{\Omega})\subset H^{1-\alpha}(\Omega)$，故可以找到一个等距同构 $f_u\in H^{-1+\alpha}$，即

$$\|f_u\|_{-1+\alpha,\Omega} = \|u\|_{1-\alpha,\Omega}$$

$$\langle f_u,u\rangle = (u,u)_{1-\alpha,\Omega} = \|u\|^2_{1-\alpha,\Omega} \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{1-\alpha,\Omega}$$

设 v_o 是(6.5.26)在 $f=f_u$，$g=0$ 下的解，所以

$$B(v_o,w) = \int_\Omega f_u w dx \qquad \forall w\in D(\overline{\Omega})$$

取 $\quad w=u$，则 $\quad B(v_o,u) = \langle f_u,u\rangle \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{1-\alpha,\Omega}$．但由椭圆边值问题正则性定理，有

$$\|v_o\|_{1+\alpha,\Omega} \leqslant \|f_u\|_{-1+\alpha,\Omega} = c\|u\|_{1-\alpha,\Omega}$$

故 $B(u,v_o) \geqslant \frac{1}{2c}\|u\|_{1-\alpha,\Omega}\|v_o\|_{1+\alpha,\Omega}$．那么有下列估计，$\forall u \in D(\overline{\Omega})$，

$$\sup_{v\in H^{1+\alpha}(\Omega),\|v\|_{1+\alpha,\Omega}\leqslant 1} B(u,v) \geqslant \sup_{v\in H^{1+\alpha}} \frac{B(u,v)}{\|v\|_{1+\alpha,\Omega}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B(u,v_o)}{\|v_o\|_{1+\alpha,\Omega}} \geqslant \frac{1}{2c}\|u\|_{1-\alpha,\Omega}$$

调换 u，v 位置，同样可以得到弱强制的第二个不等式．证毕．

例4 考察下列第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{在}\Omega\text{内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g & \text{在}\Gamma = \partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{6.5.30}$$

这里 $c \in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega)$, $c > 0$, $\beta \in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma)$, $\beta > 0$, 取基本空间 $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{H}^{1}(\Omega)$, $\mathbf{H} = \mathbf{G} = \mathbf{L}^{2}(\Omega)$,

$$B(u,v) = \int_{\Omega} (\text{grad}u \cdot \text{grad}v + cuv)dx + \oint_{\partial\Omega} \beta uvds$$

则相应的 Galerkin 变分问题：$\forall f \in (\mathbf{H}^{1}(\Omega))'$, $g \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$

$$\begin{cases} \text{求} u \in H^{1}(\Omega) \text{使得} \\ B(u,v) = \langle f,v \rangle + \langle g,v \rangle_{1/2,\Gamma} & \forall v \in \mathbf{H}^{1}(\Omega) \end{cases}$$

它有唯一解.

现在，我们定义另外两个 Hilbert 空间 .$\forall u \in D(\bar{\Omega})$, 定义范数

$$\|u\|_{\mathbf{U}}^{2} = \|-\Delta u + cu\|_{0,\Omega}^{2} + \|u\|_{3/2,\Omega}^{2} \tag{6.5.31}$$

$\mathbf{U} = \mathbf{V} = D(\bar{\Omega})$ 在 $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ 下的闭包，由嵌入定理，$\forall u \in \mathbf{U}, \dfrac{\partial u}{\partial n}$ 存在，且 $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \mathbf{L}^{2}(\Gamma)$. 设双线性形式

$$B(u,v) = \int_{\Omega} (-\Delta u + cu)(-\Delta v + cv)dx$$
$$+ \oint_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u)(\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v)ds \tag{6.5.32}$$

定理 6.5.4 设 $c \in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega)$, $\beta \in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma)$ 为任意的，又设 (6.5.30) 有唯一解，那么 (6.5.32) 所定义的双线性形式在 $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ 上是连续和弱强制的.

证 $\forall u,v\in \mathbf{U}$，由于 $c\in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega)$，$\beta\in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma)$ 和嵌入定理，不难得到

$$|B(u,v)|\leqslant \|-\Delta u+cu\|_{o,\Omega}\|-\Delta v+cv\|_{o,\Omega}+\|\frac{\partial u}{\partial n}+$$

$$+\beta u\|_{o,\Gamma}\|\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\|_{o,\Gamma}\leqslant c\|u\|_{\mathbf{U}}\|v\|_{\mathbf{U}}$$

现在，来证明$\forall u\in D(\overline{\Omega})\cap \mathbf{U}$

$$B(u,u)\geqslant k\|u\|_{\mathbf{U}}^{2} \tag{6.5.33}$$

若不然，则必存在一个序列 $u_m\in D(\overline{\Omega})\cap \mathbf{U}$，使得

$$\|u_m\|_{\mathbf{U}}=1,\ B(u_m,u_m)\to 0,\ m\to +\infty$$

因为u_m可以视为下列问题的解

$$\begin{cases}-\Delta u_m+cu_m=f_m\\ \dfrac{\partial u_m}{\partial n}+\beta u_m=g_m\end{cases} \tag{6.5.34}$$

由嵌入定理

$$\|f_m\|_{o,\Omega}=\|-\Delta u_m+cu_m\|_{o,\Omega}\leqslant \|u_m\|_{\mathbf{U}}$$

$$\|g_m\|_{o,\Gamma}=\|\frac{\partial u_m}{\partial n}+\beta u_m\|_{o,\Gamma}\leqslant c_1\|u_m\|_{\mathbf{U}}$$

由假设，可知 u_m 是式 (6.5.34) 的唯一解，故

$$\|u_m\|_{3/2,\Omega}\leqslant c_2\{\|f_m\|_{o,\Omega}+\|g_m\|_{o,\Gamma}\}\leqslant c_2B(u_m,u_m)$$

因而 $$\|u_m\|_{\mathbf{U}}\leqslant c_3B(u_m,u_m)$$

由此得出矛盾，故式(6.5.33)成立．

现在，考察式(6.5.30)另一变分形式

$$\begin{cases}\text{求}u\in\mathbf{U}\text{使得}\\ B(u,v)=(f,-\Delta v+cv)_{o,\Omega}+(\dfrac{\partial v}{\partial n}+\beta v,g)_{o,\Gamma}\quad \forall v\in\mathbf{U}\end{cases} \tag{6.5.35}$$

相应的Ritz变分形式是

$$\text{求}u \in \mathbf{U}\text{使得}J(u) = \inf_{v \in \mathbf{U}} J(v) \tag{6.5.36}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - (f, -\Delta v + cv)_{o,\Omega} + (\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v, g)_{o,\Gamma}$$

注意到$\forall f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$,

$$F(v) = (f, -\Delta v + cv)_{o,\Omega} + (\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v, g)_{o,\Gamma} \in \mathbf{U}'$$

所以根据 Lax－Milgram 定理，(6.5.35) 存在唯一解．由 Galerkin 变分与 Rity 变分等价性定理，(6.5.36) 也有唯一解，它就是边值问题式 (6.5.30) 的极小化解．

例5 Poisson方程Neumann问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{在}\Omega\text{内} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g & \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{6.5.37}$$

$N(A^*, \delta^*)$是下列问题的解空间

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{在}\Omega\text{内} \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

因为 $N(A^*, \delta^*) = \mathbf{R}^1$，故式 (6.5.37) 有解的充分必要条件是

$$\int_{\Omega} f dx + \oint_{\Gamma} g ds = 0 \tag{6.5.38}$$

这个解不是唯一的，但在 $\mathrm{N}(A, \delta)^{\perp}$ 中求解时，则解是唯一的．为此，取$\mathbf{U} = \mathbf{H}^1(\Omega) / \mathbf{R}$，赋予商范数

$$\|\hat{u}\|_{U} = \inf\{\|v\|_1, \ v - u \in \mathbf{R}\}$$

由商范数等价性定理（§ 3.7），$\|\hat{u}\|_{U}$ 等价于半范$|u|_{1,\Omega}$．

定义双线性形式

$$B(\hat{u},\hat{v})=(\text{grad}u,\text{grad}v) \qquad \forall u\in\hat{u},\ v\in\hat{v},\ \hat{u},\hat{v}\in \mathrm{U}$$

$$\forall f\in \mathbf{L}^2(\Omega),\ g\in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma),\ l(\hat{v})=\int_\Omega fvdx+\oint_\Gamma gvdx$$

则$l(\hat{v})$是V上线性有界泛函(由于式(6.5.38)), 且

$$\|l\|_u \leqslant \|f\|_{o,\Omega}+\|g\|_{-1/2,\Gamma}$$

另一方面, $B(\hat{u},\hat{v})$是U强制的和连续的:

$$|B(\hat{u},\hat{v})|\leqslant |u|_1|v|_1\leqslant c\|\hat{u}\|_{\mathrm{U}}\|\hat{v}\|_{\mathrm{U}}$$

$$B(\hat{u},\hat{u})=|u|^2_{1,\Omega}\geqslant c_2\|\hat{u}\|_{\mathrm{U}}$$

因而在U中,

$$\begin{cases}\text{求}\hat{u}\in \mathbf{U}\quad \text{使得}\\ B(\hat{u},\hat{v})=l(\hat{v}) \qquad \forall \hat{v}\in \mathbf{U}\end{cases}$$

有唯一解, 且

$$|u|_{1,\Omega}\leqslant c\|\hat{u}\|_{\mathrm{U}}\leqslant c(\|f\|_{o,\Omega}+\|g\|_{-1/2,\Gamma})$$

§ 6.6 适定性

设算子 A 是由式(6.4.1)所定义的, 满足强椭圆性条件(6.5.3), 边界算子系 $\{\dot{B}_k\}$ 是 Dirichlet 系统, 考察齐次边界条件

$$\begin{cases}Au=f & \text{在}\Omega\text{内}\\ B_k u=0 & \text{在}\Gamma=\partial\Omega\text{上},\ k=0,1,\cdots,m-1\end{cases} \tag{6.6.1}$$

取基本空间 $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{H}^m(\Omega)$, $\mathbf{U}_o=\mathbf{V}_o=\mathbf{H}_o{}^m(\Omega)$, $\mathbf{H}=\mathbf{G}=\mathbf{L}^2(\Omega)$. A 是由三重结构 $(\mathbf{U}_o,\mathbf{H},B(\cdot,\cdot))$ 所定义的形式算子

$$(Au,v)=B(u,v) \qquad \forall u,v\in \mathbf{U}_A$$

这里 $B(\cdot,\cdot)$ 是由式 (6.4.5) 所定义的，利用 Gårding 不等式 (6.5.4) 有

$$(Au+\lambda_o u,u) \geqslant \mu_o \|u\|^2_{m,\Omega} \qquad \forall u \in \mathring{U}_o \tag{6.6.2}$$

现在，考察如下的算子方程：$\forall \lambda \neq \lambda_o$，$f \in \mathrm{H}$

求 $u \in D(A)$，$Au+\lambda u=f$ (6.6.3)

显然，当 $\lambda=0$ 时，式 (6,6,3) 就是对应于式 (6.6.1) 的算子形式．

定理 6.6.1　设 A，$B_k(k=0,1,\cdots,m-1)$ 是 $2m$ 阶正则椭圆系统．其中 A 是由式 (6.4.1) 所定义的．且满足 (6.5.3) 强椭圆条件．那么 $\forall f \in \mathrm{H}$ 算子方程 (6.6.3) 成立 Fredholm 二择性定理．

证　设双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是由式 (6.4.3) 所决定的，A 是由三重结构 $(\mathrm{U}_o,\mathrm{H},B(\cdot,\cdot))$ 所定义的形式算子，从而 $A+\lambda_o I$ 是由三重结构 $(\mathrm{U}_o,\mathrm{H},B(\cdot,\cdot)+\lambda_o(\cdot,\cdot))$ 所定义的形式算子，并且 $D(A+\lambda_o I)=D(A)$ 是显然的．

由 Gårding 不等式 (6.5.4) 和 Lax－Milgram 定理，容易验证，方程

$$(A+\lambda_o I)u=f \qquad u \in D(A) \tag{6.6.4}$$

有唯一解

$$u=G(\lambda_o)f, \quad G(\lambda_o)=(A+\lambda_o I)^{-1} \tag{6.6.5}$$

$G(\lambda_o) \in \mathcal{L}(\mathrm{H};\mathrm{D}(A))$. 由于 U_o 到 H 的嵌入是紧的，所以 $G(\lambda_o)$ 是 $\mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 的紧算子．把 (6.6.3) 写成等价形式

$$(A+\lambda_o I)u+(\lambda-\lambda_o)u=f$$

或表示为：求 $u \in D(A)$，使得

$$u+(\lambda-\lambda_o)G(\lambda_o)u=G(\lambda_o)f \tag{6.6.6}$$

由于 $I+(\lambda-\lambda_o)G(\lambda_o)$ 是 Fredholm 算子，所以式 (6.6.3) 成

立 Fredholm 二择性定理．证毕．

设 $u\in \mathrm{U}_o$ 是式 (6.6.3) 的解，也是式 (6.6.1) 的弱解：

$$B(u,v)=(f,v) \qquad \forall v\in \mathrm{U}_o \tag{6.6.7}$$

两边加上 $\lambda_o(u,v)$ 之后，利用 Gårding 不等式，则成立

$$\mu_o\|u\|_m^2 \leqslant \|f\|_{-m,\Omega}\|u\|_{m,\Omega}+\lambda_o\|u\|_o^2$$

从而

$$\|u\|_{m,\Omega}\leqslant c(\|f\|_{-m,\Omega}+\|u\|_{o,\Omega}) \tag{6.6.8}$$

为了讨论齐次 Dirichlet 边值条件问题，我们给出一个等价的迹定理．

定理 6.6.2 设 $\{B_k, k=0,1,2,\cdots,m-1\}$ 是正规 Dirichlet 边界算子系，且覆盖 $2m$ 阶椭圆算子 A. 那么存在常数 $m_k>0$, $k=0,1,2,\cdots,m-1$. 使得

$$\|B_k u\|_{s-q_k-1/2,\Gamma}\leqslant m_k\|u\|_s \qquad \forall u\in \mathrm{H}^s(\Omega) \tag{6.6.9}$$

并且存在右逆算子 B_k^{-1}，使得存在常数 $M_k>0$，有

$$\|B_k^{-1}(B_k u)\|_{s,\Omega}\leqslant M_k\|B_k u\|_{s-g_k-1/2,\Gamma} \quad \forall u\in \mathrm{H}^s(\Omega) \tag{6.6.10}$$

(证明留给读者作为练习).

非齐次Dirichler边界条件

$$B_k u = g_k \qquad \text{在}\Gamma\text{上} \tag{6.6.11}$$

其中 $g_k\in \mathrm{H}^{m-q_k-1/2}(\Gamma)$. 由定理 6.6.2，存在 $B_k^{-1}g_k\in \mathrm{H}^m(\Omega)$ 使得 $B_k^{-1}g_k|_\Gamma=g_k$. 令 $\gamma=(B_o,B_1,\cdots,B_{m-1})$，$\gamma^{-1}=(B_o^{-1}, B_1^{-1},\cdots,B_{m-1}^{-1})$，其中 B_k^{-1} 均为 B_k 之右逆，记 $g=(g_o,g_1,\cdots,g_{m-1})$. 那么由式 (6.6.10) 得

$$\|\gamma^{-1}g\|_{s,\Omega}\leqslant M\|g\|_{s-q_k-1/2,\Gamma} \qquad \forall g\in \mathrm{H}_2^{s-q_k-1}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,m-1) \tag{6.6.12}$$

考察非齐次Dirichlet问题

$$\begin{cases} Au=f & 在\Omega内 \\ B_k u=g_k \quad k=0,1,\cdots,m-1, & 在\Gamma=\partial\Omega内 \end{cases} \tag{6.6.13}$$

它的解可以表示为

$$u=w+\gamma^{-1}g \tag{6.6.14}$$

则w满足

$$\begin{cases} Aw=f-A(\gamma^{-1}g) & 在\Omega内 \\ \gamma w=0 & 在\Gamma上 \end{cases} \tag{6.6.15}$$

相应的变分形式是

$$\begin{cases} w\in U_o \\ B(w,v)=(f,v)-B(\gamma^{-1}g,v) & \forall v\in \mathbf{U}_o \end{cases} \tag{6.6.16}$$

由于 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{U}_o\times\mathbf{U}_o\to\mathbf{R}$ 连续双线性形式，由式(5.1.1)可定义算子 $\mathsf{A}\in\mathcal{L}(\mathbf{U}_o,\mathbf{U}'_o)$ 使得

$$B(\gamma^{-1}g,v)=\langle \mathsf{A}(\gamma^{-1}g),v\rangle_{-m,\Omega}$$

$$\|\mathsf{A}(\gamma^{-1}g)\|_{-m,\Omega}\leqslant c\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega} \tag{6.6.17}$$

利用 (6.6.8), (6.6.12), (6.6.14), (6.6.16) 和 (6.6.17) 有

$$\|u\|_{m,\Omega}\leqslant\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+\|w\|_{m,\Omega}$$

$$\leqslant\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+c(\|f\|_{-m,\Omega}+\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+\|w\|_{o,\Omega})$$

$$\|u\|_{m,\Omega}\leqslant c(\|f\|_{-m,\Omega}+\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+\|w\|_{o,\Omega})$$

然而，$\|w\|_{o,\Omega}\leqslant\|\gamma^{-1}g\|_{o,\Omega}+\|u\|_{o,\Omega}\leqslant\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+\|u\|_{o,\Omega}$.故

$$\|u\|_{m,\Omega}\leqslant c(\|f\|_{-m,\Omega}+\|\gamma^{-1}g\|_{m,\Omega}+\|u\|_{o,\Omega})$$

$$\leqslant c(\|f\|_{-m,\Omega}+\sum_{k=0}^{m-1}\|g_k\|_{m-q_k-1/2,\Gamma}+\|u\|_{o,\Omega})(6.6.18)$$

于是我们又证明了:

定理 6.6.3 设 $(A,B_k,k=0,1,2,\cdots,m-1)$ 是一个正则椭圆算子系，A 是由式 (6.4.1) 所定义的，满足强椭圆性条件 (6.5.3)，边界算子系 $B_k,k=0,1,\cdots,m-1$ 是一个 Dirichlet 系统．那么非齐次的边值问题 (6.6.13) 存在唯一解 $u\in \mathbf{U}_o$，它满足不等式 (6.6.18).

§ 6.7 半线性椭圆边值问题

本节及 § 6.8 中涉及到部分非线性分析内容，它由附录 A 给出．

考虑非线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=g(x,u) & \forall x\in\Omega \\ u(x)=0 & \forall x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{6.7.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$n\geqslant 2$，g 满足 Caratheodory 条件．下面分别以 $(\cdot,\cdot)$ 和 $(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 表示 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 中的内积．

引入双线性形式，$B:\mathbf{H}^1_o(\Omega)\times\mathbf{H}^1_o(\Omega)\to\mathbf{R}$定义为

$$B(u,v)=\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v dx=(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}v)$$

若设

(1) $|g(x,t)|\leqslant a(x)+b|t|^\sigma,\quad b>0$ (6.7.2)

(2) $0<\sigma<\sigma_o=(n+2)/(n-2)$ (6.7.3)

(3) $a(x)\in L^{(\sigma+1)/\sigma}(\Omega)$ (6.7.4)

因为 $H_o^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$，$1 \leqslant p \leqslant p_o = 2n/(n-2)$，且当 $p < p_o$ 时，这种嵌入是紧的，由定理 A.1.3，此嵌入算子是弱连续的．

设 q_o 是 p_o 的对偶数，$1/p_o + 1/q_o = 1$，则 $q_o = 2n/(n+2) = 1 + 1/\sigma_o$．因为 $(\sigma+1)/\sigma = 1 + 1/\sigma > 1 + 1/\sigma_o = q_o$，所以 $a(x) \in L^{q_o}(\Omega)$. 故可以证明，当 (1)－(3) 满足时，$(g(\cdot, u), v)$ 是 $H_o^1(\Omega)$ 上线性有界泛函．实际上，由 Hoelder 不等式，有

$$
\begin{aligned}
|(g(x,u),v)| &= \left|\int_\Omega g(x,u(x))v(x)dx\right| \\
&\leqslant \int_\Omega (a(x) + \alpha|u|^\sigma)|v|dx \\
&\leqslant \left(\int_\Omega a(x)^{q_o} dx\right)^{1/q_o} \cdot \left(\int_\Omega |v|^{p_o} dx\right)^{1/p_o} \\
&\quad + \alpha\left(\int_\Omega |u|^{\sigma \cdot q_o} dx\right)^{1/q_o} \cdot \left(\int_\Omega |v|^{p_o} dx\right)^{1/p_o} \\
&= \|a\|_{o,q_o,\Omega}\|v\|_{o,p_o,\Omega} + \alpha\|u\|_{o,\sigma q_o,\Omega}^\sigma \|v\|_{o,p_o,\Omega}
\end{aligned} \tag{6.7.5}
$$

当 $r = \sigma q_o \leqslant p_o$ 时，上述不等式才有意义．这就是说应该有 $\sigma \leqslant p_o/q_o = p_o - 1 = \sigma_o$，这正是条件 (2)，即 (6.7.3) 式．

又 $H_o^1(\Omega) \subset L^{p_o}(\Omega)$，所以，上面不等式为

$$|(g(x,u),v)| \leqslant M(\|a\|_{o,q_o,\Omega} + \alpha\|u\|_{o,r,\Omega})|v|_{1,2,\Omega}$$

则 $(g(x,u),v)$ 是 $H_o^1(\Omega)$ 上的线性有界泛函．由 Riesz 表示定理，存在 S: $H_o^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$，使得

$$(g(x,u),v) = \langle S(u), v\rangle \qquad \forall v \in H_o^1(\Omega) \tag{6.7.6}$$

从而，非线性边值问题 (6.7.1) 的变分问题是

求$u\in H_o^1(\Omega)$，使得

$$B(u,v)=(g(\cdot,u),v) \qquad \forall v\in H_o^1(\Omega) \tag{6.7.7}$$

与线性边值问题类似，有

$$B(u,v)=\langle Au,v\rangle \qquad \forall v\in H_o^1(\Omega)$$

以及 $\langle Au-S(u),v\rangle=0 \qquad \forall v\in H_o^1\Omega)$ (6.7.8)

令 T: $H_o^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$定义为

$$Tu=Au-S(u) \tag{6.7.9}$$

则有

引理 6.7.1 由 (6.7.9) 式所定义的算子 T:$H_o^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ 是位势算子，其位势为

$$f(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(\mathrm{grad}u)^2dx-\int_\Omega dx\int_o^{u(x)}g(x,t)dt \tag{6.7.10}$$

$$\mathrm{grad}\ f(u)=Tu \tag{6.7.11}$$

证 由于g满足Caratheodory条件，则由定理A.5.2知，如果g的 Нецыцкий 算子 G 是$L^p(\Omega)\to L^q(\Omega)$的映照，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$G$是强位势算子，且其位势是(A.5.2)式．这里取$p=1+\sigma$；$q=\frac{p}{\sigma}$，我们证明$G$是由$L^{1+\sigma}(\Omega)\to L^{(1+\sigma)/\sigma}(\Omega)$的映照．

由假设式(6.7.2)～(6.7.4)知，$\forall u\in L^p(\Omega)$，

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g(x,u)|^qdx&\leqslant\int_\Omega|a+b|u|^\sigma\ \ |^qdx\\&\leqslant 2^{q-1}\int_\Omega(|a|^q+b^q|u|^{\sigma q})dx\\&\leqslant c_1\|a\|_{o,q,\Omega}^q+c_2\|u\|_{o,\sigma q,\Omega}^{\sigma q}\end{aligned}$$

即 $$\|G(u)\|_{o,q,\Omega} \leqslant c(\|a\|_{o,q,\Omega} + \|u\|^{\sigma}_{o,\sigma q,\Omega})$$
$$= c(\|a\|_{o,q,\Omega} + \|u\|^{\sigma}_{o,p,\Omega}) \qquad \forall u \in \mathbf{L}^{p}(\Omega)$$

从而 $G: L^{p}(\Omega) \to L^{q}$ 是强位势算子，而且其位势为

$$\psi(u) = \int_{\Omega} dx \int_{o}^{u(x)} g(x,t)dt \qquad \forall u \in L^{p}(\Omega) \tag{6.7.12}$$

而且在 $\mathbf{L}^{p}(\Omega)$ 中 ,$\mathrm{grad}\psi(u) = G(u)$, ψ 是连续的 .$\forall u,v \in \mathbf{L}^{p}(\Omega)$, ψ 的 Fréchet 微分为

$$d\psi(u) \cdot v = \int_{\Omega} g(x,u)v(x)dx = (g(x,u),v) \tag{6.7.13}$$

注意到条件 (A.9.3), 有 $p = 1 + \sigma < 1 + \sigma_{o} = p_{o}$, 由嵌入定理知 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega) \subset \mathbf{L}^{p}(\Omega)$, 故 $\psi \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. 在 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega)$ 中，ψ 是可微的，因为由 (6.7.6) 和 (6.7.13) 可得

$$d\psi(u) \cdot v = \langle S(u),v \rangle \qquad \forall u,v \in \mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega) \tag{6.7.14}$$

由 grad 的定义，知在 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega)$ 上，有

$$\mathrm{grad}\psi(u) = S(u) \tag{6.7.15}$$

此即 S 是位势算子，在 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega)$ 上它的位势是 ψ. 注意到 A $\in \pounds(\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega),\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ 及其位势性质，可知 T 也是位势算子且其位势为式 (6.7.10). 证毕 .

定理 6.7.1 当 $0 < \sigma \leqslant 1$, b 充分小时，由式 (6.7.10) 定义的泛函 $f(u)$ 在 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega)$ 上达到它的极小值，从而边值问题 (6.7.1) 的解存在 .

证 首先证明由式 (6.7.10) 所定义的位势 f 在 $\mathbf{H}^{1}_{o}(\Omega)$ 上是弱下半连续 . 这是因为式 (6.7.10) 式右端第一项是$\frac{1}{2}|u|^{2}_{1,2,\Omega}$, 而半

范$|u|_{1,2,\Omega}$是弱下半连续，而第二项

$$\psi(u)=\int_{\Omega}dx\int_{o}^{u(x)}g(x,t)dt \qquad \forall u\in \mathbf{L}^{p}(\Omega) \qquad p=1+\sigma$$

在$\mathbf{H}_o^1(\Omega)$上是弱连续的．事实上，令$u_n \xrightarrow{w} u_o$（在$\mathbf{H}_o^1(\Omega)$中），由于$1\leqslant p=1+\sigma<p_o=1+\sigma_o$，有$\mathbf{H}_o^1(\Omega)\subset \mathbf{L}^p(\Omega)$，从而在$\mathbf{L}^p(\Omega)$中$u_n \xrightarrow{s} u_o$．又在引理 6.7.1 中已证明$\psi$在$\mathbf{L}^p(\Omega)$中是连续的，所以$\psi(u_n)\to\psi(u_o)$．从而在$\mathbf{H}_o^1(\Omega)$上，$\psi$以及$f$是弱下半连续．

其次，我们准备用定理 A.7.4 证明算子方程 (6.7.9)，即$Tu=\mathrm{A}u-S(u)=0$有解，从而边值问题 (6.7.1) 有解．这里只须考察

$f(u)/\|u\|_{1,2,\Omega}\to\infty$，当$\|u\|_{1,2,\Omega}\to\infty$时一致成立．

由 Friedrichs 不等式易知

$$\frac{1}{2}|u|_{1,2,\Omega}^2\geqslant\|u\|_{1,2,\Omega}^2/2(1+c^2)$$

这里c是一个只与Ω有关的常数．同时还有

$$|\psi(u)|\leqslant\|a\|_{o,q_o,\Omega}\|u\|_{o,p_o,\Omega}+\frac{b}{\sigma+1}\|u\|_{o,\sigma+1,\Omega}^{\sigma+1}$$

$$\leqslant M\|u\|_{1,2,\Omega}(\|a\|_{o,q_o,\Omega}+\frac{bM^{\sigma}}{\sigma+1}\|u\|_{1,2,\Omega}^{\sigma})$$

这里利用了$\mathbf{H}_o^1(\Omega)\subset \mathbf{L}^{p_o}(\Omega)$．故有

$$\frac{f(u)}{\|u\|_{1,2,\Omega}}\geqslant\frac{\|u\|_{1,2,\Omega}}{2(1+c^2)}-M(\|a\|_{o,q_o,\Omega}+\frac{bM^{\sigma}}{\sigma+1}\|u\|_{1,2,\Omega}^{\sigma})$$

当$0<\sigma<1$时，可得$f(u)/\|u\|_{1,2,\Omega}\to\infty$，当$\|u\|_{1,2,\Omega}\to\infty$时．

当 $\sigma=1$ 时，利用 Friedrichs 不等式，有

$$|\psi(u)| \leqslant \|a\|_{o,2,\Omega}\|u\|_{o,2,\Omega}+\frac{b}{2}\|u\|_{o,2,\Omega}^{2}$$
$$\leqslant \frac{b}{2}c^{2}|u|_{1,2,\Omega}^{2}+\|a\|_{o,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}$$

从而 $$\frac{f(u)}{\|u\|_{1,2,\Omega}} \geqslant \frac{1-bc^{2}}{2(1+c^{2})}\|u\|_{1,2,\Omega}-\|a\|_{o,2,\Omega}\to\infty$$

当 $\|u\|_{1,2,\Omega}\to\infty$ 时一致成立，只要

$$b<1/c^{2} \tag{6.7.16}$$

因此 $0<\sigma\leqslant 1$，$b<1/c^{2}$ 时算子方程 (6.7.9) 有解．证毕．

§6.8 拟线性椭圆边值问题

考察下列拟线性椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\partial_i(|\mathrm{grad}u|^{p-2}\partial_i u)=f & 在\Omega内 \\ u=0 & 在\partial\Omega上 \end{cases} \tag{6.8.1}$$

这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是凸的开子集，$p>2$．$|\mathrm{grad}u|=(\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2)^{1/2}$．此时注意在 $\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)$ 中，全范和半范是等价的．

定义拟双线性泛函 $B(u,v)$:$\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)\times\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)\to\mathbf{R}$:

$$B(u,v)=\int_\Omega |\mathrm{grad}u|^{p-2}\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\,dx \tag{6.8.2}$$

及线性泛函 f: $\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)\to\mathbf{R}$，则能量泛函

$$J(v)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\mathrm{grad}v|^{p}dx-\langle f,v\rangle \quad \forall v\in\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega) \tag{6.8.3}$$

对应于(6.8.1)，其变分问题是

求$u\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)$，使得

$$B(u,v)=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega) \tag{6.8.4}$$

同时，考察极小值问题

$$\begin{cases} \text{求} u\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega),\ \text{使得} \\ J(u)=\inf\limits_{v\in H_o^{1,p}(\Omega)} J(v), \end{cases} \tag{6.8.5}$$

引理6.8.1　函数$a(x),b(x)\in \mathbf{L}^p(\Omega)$，则

$$\int_\Omega |a|^{p-k}|b|^k dx \leqslant \|a\|_{o,p,\Omega}^{p-k}\|b\|_{o,p,\Omega}^{k} \tag{6.8.6}$$

证　由Hoelder不等式，得

$$\int_\Omega |a|^{p-k}|b|^k dx \leqslant (\int_\Omega |\alpha|^{(p-k)r}dx)^{1/r}(\int_\Omega |b|^{ks}dx)^{1/s}$$

令$(p-k)r=p$，$ks=p$，则$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$，且

$$\int_\Omega |a|^{p-k}|b|^k dx \leqslant (\int_\Omega |a|^p dx)^{\frac{p}{p-k}}(\int_\Omega |b|^p dx)^{\frac{p}{k}}$$

从而得到(6.8.6)式．证毕．

引理 6.8.2　$\forall u,v\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)$，由式(6.8.4)所定义的$B(u,v)$是$\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)$上线性连续泛函，并且

$$|B(u,v)|\leqslant \|u\|_{1,p,\Omega}^{p-1}\|v\|_{1,p,\Omega} \tag{6.8.7}$$

此命题由引理6.9.1易得．

由这个引理可知，$\forall u\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)$，存在算子 A: $\mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega)\to \mathbf{H}^{-1,q}(\Omega)$，$\dfrac{1}{P}+\dfrac{1}{q}=1$，使得$\mathrm{A}u\in \mathbf{H}_o^{-1,q}$，以及

$$B(u,v)=\langle \mathrm{A}u,v\rangle \qquad \forall v\in \mathbf{H}_o^{1,p}(\Omega) \tag{6.8.8}$$

引理 6.8.3 由 (6.8.3) 所定义的泛函 $J(v)$ 是 Fréchet 可微的．且 $\forall v \in \mathrm{H}_{o}^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \mathrm{grad} J(u), v \rangle = \langle \mathrm{A}u - f, v \rangle = B(u,v) - \langle f, v \rangle \tag{6.8.9}$$

证

$$J(u+v) - J(v) = \frac{1}{p}(\|u+v\|_{1,p,\Omega}^{p} - \|v\|_{1,p,\Omega}^{p}) - \langle f, v \rangle$$

考察

$$\begin{aligned} R(u,v) &= J(u+v) - J(v) - (B(u,v) - \langle f, v \rangle) \\ &= \frac{1}{p}(\|u+v\|_{1,p,\Omega}^{p} - \|v\|_{1,p,\Omega}^{p}) - B(u,v) \\ &= \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\mathrm{grad}(u+v)|^{p} dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\mathrm{grad} u|^{p} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |\mathrm{grad} u|^{p-2} \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v dx \end{aligned}$$

注意，函数 $F: \xi \in \mathbf{R}^{n} \to \frac{1}{p}|\xi|^{p}$ 是二次可微的，且

$$\partial_{i} F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi_{i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\partial_{ij} F(\xi) = (p-2)|\xi|^{p-4} \xi_{i} \xi_{j} + |\xi|^{p-2} \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

由此 $\quad F(\xi + \eta) - F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi \eta + s(\xi, \eta)$

其中 $|s(\xi,\eta)| \leqslant c(p)(|\xi| + |\eta|)^{p-2} |\eta|^{2}$.

故 $\quad \displaystyle\int_{\Omega} \{F(\mathrm{grad}(u+v)) - F(\mathrm{grad} u)\} dx$

$$= \int_{\Omega} |\mathrm{grad} u|^{p-2} \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v dx + R(u,v)$$

$$|R(u,v)| \leqslant c(p) \int_{\Omega} (|\mathrm{grad} u| + |\mathrm{grad} v|)^{p-2} |\mathrm{grad} v|^{2} dx$$

由引理 6.8.1，有

$$|R(u,v)| \leqslant c(p)(\|u\|_{1,p,\Omega} + \|v\|_{1,p,\Omega})^{p-2}\|v\|^2_{1,p,\Omega}$$

从而有 $\dfrac{|R(u,v)|}{\|v\|_{1,p,\Omega}} \to 0$，当$\|v\|_{1,p,\Omega} \to 0$.以及式(6.8.9).证毕.

定理 6.8.1　由 (6.8.3) 所定义的泛函 $J(u)$ 在 $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ 上是严格凸的．因而算子 A 是严格单调的．

证　设 $F(t) = \dfrac{1}{p} t^p$，当 $p > 1$ 时，$F(t)$ 是严格凸的，故 $J(u)$ 是严格凸的．从而 $\mathrm{grad} J(u) = Au - f$ 是严格单调，即 A 是严格单调．证毕．

引理 6.8.3 告诉我们，算子 $Tu = Au - f$ 是位势型算子，并且位势就是由 (6.8.3) 所定义的泛函 $J(u)$，显然，如果 u 是 Galerkin 变分问题 (6.8.4) 的解，那么由 (6.8.9)，u 也一定是 $J(u)$ 的驻点 $\mathrm{grad}\ J(u) = 0$；反之，若 u 是 $J(u)$ 的驻点，则也必是 (6.8.4) 的解．

由定理 6.8.1 知，T 是严格单调的，那么应用附录定理 A.7.6 可知变分问题 (6.8.4) 与极小值 (6.8.5) 是等价的，从而我们得到

定理 6.8.2　极小值问题 (6.8.5) 与 Galerkin 变分问题 (6.8.4) 是等价的．

进而，我们还可以得到

定理 6.8.3　极小值问题 (6.8.5) 的解是存在且唯一，从而变分问题 (6.8.4) 的解也存在唯一．

证　利用附录 A 的定理 A.7.5，我们只须证明算子 A 的强制性，因为

$$\langle Au,u\rangle = \int_\Omega |\mathrm{grad} u|^p dx = |u|^p_{1,p,\Omega}$$

故 $\dfrac{\langle Au,u\rangle}{|u|_{1,p,\Omega}}=|u|_{1,p,\Omega}^{p-1}\to+\infty$, 当$p\geqslant 2$ 且 $|u|_{1,p,\Omega}\to\infty$

注意到 A 是严格单调的，即可得到所需结论．证毕．

由于 A 是严格单调的，由定理 A.6.2 可知，$J(u)$ 是弱下半连续．实际上，可以进一步证明算子 A 是强单调的，并且是 Lipschitz 连续的．

定理 6.8.4 $\forall p\in(2,\infty)$. 设 $A:H_0^{1,p}(\Omega)\to H^{-1,q}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 是由式 (6.8.8) 所定义的，则存在二个常数 $\alpha>0$, $M>0$, 使得 $\forall u,v\in H_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\alpha\|(u-v)\|_{1,p,\Omega}^{p}\leqslant\langle Au-Av,u-v\rangle \tag{6.8.10}$$

$$\|Au-Av\|_{-1,q,\Omega}\leqslant M(\|u\|_{1,p,\Omega}+\|v\|_{1,p,\Omega})^{p-2}\|u-v\|_{1,p,\Omega} \tag{6.8.11}$$

证 为证明式 (6.8.10), 我们引进辅助函数

$$\varphi:\ (\xi,\eta)\in S=\{(\xi,\eta)\in R^2\times R^2:\ \xi\neq\eta\}\to$$

$$\to\varphi(\xi,\eta)=\frac{(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^{p}} \tag{6.8.12}$$

这里 $\xi\cdot\eta$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中 Euclid 内积．我们将证明存在 $\alpha>0$, 使得 $\forall(\xi,\eta)\in S$, 有

$$\alpha\leqslant\varphi(\xi,\eta) \tag{6.8.13}$$

由此容易得出式(6.8.10), 首先注意由于

$$\forall\eta\neq 0,\quad \varphi(0,\eta)=1 \tag{6.8.14}$$

所以只须考虑$\xi\neq 0$的情况.其次，证明

$$\forall(\xi,\eta)\in S,\quad \varphi(\xi,\eta)>0 \tag{6.8.15}$$

考察下面的不等式

$$(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)$$

$$=|\xi|^p-(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2})(\xi\cdot\eta)+|\eta|^p$$
$$\geqslant|\xi|^p-|\xi|^{p-1}\ |\eta|-|\eta|^{p-1}\ |\xi|+|\eta|^p$$
$$=(|\xi|^{p-1}-|\eta|^{p-1})(|\xi|-|\eta|)>0,\qquad\forall|\xi|\neq|\eta|\quad(6.8.16)$$

对于第一个不等式，当且仅当 $\eta=\mu\xi$, $\mu\in\mathbf{R}$ 时，才能变为等式．余下的是考察 $\eta=-\xi$ 的情况，但此时有 $(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)=4|\xi|^p>0$. 最后，我们只须考察 $\xi=\bar{\xi}=(1,0)$ 时的情况，这是由于 $\forall\lambda>0$，有 $\varphi(\lambda\xi,\lambda\eta)=\varphi(\xi,\eta)$ 以及 Euclid 内积对于绕原点的旋转是不变的．由于

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\varphi(\bar{\xi},\eta)=1,\qquad(6.8.17)$$

只需研究函数 $\eta=(\eta_1,\eta_2)\in(\mathbf{R}^2-\xi)\to\varphi(\bar{\xi},\mu)$ 在 $\bar{\xi}$ 的邻域里的形态．为此设

$$\eta_1=1+\rho\cos\theta,\quad\eta_2=\rho\sin\theta$$

简单的计算表明

$$\varphi(\bar{\xi},\eta)=\frac{1+(p-2)\cos^2\theta+\varepsilon(\rho,\theta)}{\rho^{p-2}}$$

这里 $\forall\theta\in[0,2\pi)$, $\lim\limits_{\rho\to0}\varepsilon(\rho,\theta)=0$ 一致成立．从而有

$$\lim_{\eta\to\xi}\varphi(\bar{\xi},\eta)=\begin{cases}1 & \text{如}\,p=2\\ \infty & \text{如}\,p>2\end{cases}\qquad(6.8.18)$$

把 (6.8.14) 到 (6.8.18) 诸不等式联合起来，可得式 (6.8.13).

为了证明(6.8.11), 即Lipschitz连续, 再引进辅助函数

$$\psi:\ (\xi,\eta)\in S=\{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2,\ \xi\neq\eta\}\to$$
$$\to\psi(\xi,\eta)=\frac{\left||\eta|^{p-2}\eta-|\xi|^{p-2}\xi\right|}{|\eta-\xi|(|\eta|+|\xi|)^{p-2}}\qquad(6.8.19)$$

我们要证明存在 $M>0$，使得

$$\forall(\xi,\eta)\in S \quad \psi(\xi,\eta)\leqslant M \tag{6.8.20}$$

因为

$$\forall\eta\neq 0, \quad \psi(0,\eta)=1 \tag{6.8.21}$$

可以假设 $\xi\neq 0$. 和前一部分讨论一样，只需讨论 $\xi=\bar{\xi}=(1,0)$ 时的情况，这是因为 $\psi(\lambda\xi,\lambda\eta)=\psi(\xi,\eta)$, $\forall\lambda>0$ 以及对于绕原点的旋转 Euclid 范数是不变的. 同样有

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\psi(\bar{\xi},\eta)=1 \tag{6.8.22}$$

为了研究函数 $\eta=(\eta_1,\eta_2)\in(R^2-\bar{\xi})\to\psi(\bar{\xi},\eta)$ 在点 $\bar{\xi}$ 邻域里的性态，我们也令 $\eta_1=1+\rho\cos\theta$, $\eta_2=\rho\sin\theta$, 此时，有

$$\psi(\bar{\xi},\mu)=2^{2-p}(1+p(p-2)\cos^2\theta)^{1/2}+\varepsilon(\rho,\theta),$$

这里 $\forall\,\theta\in[0,2\pi),\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon(\rho,\theta)=0$ 一致成立. 从而

$$\lim_{\eta\to\xi}\sup\psi(\bar{\xi},\eta)<+\infty \tag{6.8.23}$$

从式 (6.8.21) 到 (6.8.23) 可得到 (6.8.20). 作为一个推论，对 $\forall\,\xi,\eta\in\mathbf{R}^2$, 有

$$\big||\eta|^{p-2}\eta-|\xi|^{p-2}\xi\big|\leqslant M|\eta-\xi|(|\eta|+|\xi|)^{p-2} \tag{6.8.24}$$

为了进一步得到式 (6.8.11), 我们从定义出发

$$\|\mathrm{A}u-\mathrm{A}v\|_{-1,q,\Omega}=\sup_{w\in\mathrm{V}}\frac{|\langle\mathrm{A}u-\mathrm{A}v,w\rangle|}{\|w\|} \tag{6.8.25}$$

这里 $\mathbf{V}=\mathbf{H}_0^{1,p}(\Omega)$. 由不等式 (6.8.24), 有

$$\begin{aligned}
&|\langle\mathrm{A}u-\mathrm{A}v,w\rangle|\\
&=\left|\int_\Omega(|\mathrm{grad}u|^{p-2}\mathrm{grad}u-|\mathrm{grad}v|^{p-2}\mathrm{grad}v)\mathrm{grad}w\,dx\right|\\
&\leqslant\int_\Omega\big||\mathrm{grad}u|^{p-2}\mathrm{grad}u-|\mathrm{grad}v|^{p-2}\mathrm{grad}v\big||\mathrm{grad}w|\,dx
\end{aligned}$$

$$\leqslant M\int_{\Omega}|\mathrm{grad}(u-v)|(|\mathrm{grad}u|+|\mathrm{grad}v|)^{p-2}|\mathrm{grad}w|dx$$

$$\leqslant M\{\int_{\Omega}(|\mathrm{grad}u|+|\mathrm{grad}v|)^{p}dx\}^{(p-2)/p}\|u-v\|_{1,p,\Omega}\|w\|_{1,p,\Omega}$$

$$\leqslant M(\|u\|_{1,p,\Omega}+\|v\|_{1,p,\Omega})^{(p-2)}\|u-v\|_{1,p,\Omega}\|w\|_{1,p,\Omega}$$

从而根据式(6.8.25)得出式(6.8.11). 证毕.

其次考察更为一般的拟线性椭圆边值问题. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^{n}$ 是具有光滑边界 Γ 的有界开集. 考察下述拟线性椭圆型方程

$$\begin{cases}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha}(x,u(x),Du(x),\cdots,D^{\beta}u))=S(x)\\ \quad|\beta|\leqslant m,\ 在\Omega内\\ D^{\alpha}u(x)=0\ \ |\alpha|\leqslant m-1\quad 在边界\Gamma=\partial\Omega上\end{cases}\tag{6.8.26}$$

令 $d=\sum\limits_{|\beta|\leqslant m}1,\quad \xi=(\xi_{1},\xi_{2},\cdots,\xi_{d})\in\mathbf{R}^{d}$, 那么设

(1) $a_{\alpha}(x,\xi):\overline{\Omega}\times\mathbf{R}^{d}\to\mathbf{R}$是连续的.

(2) $\left|a_{\alpha}(x,\xi)\right|\leqslant c(|\xi|^{p-1}+1)\quad c>0,\quad 1<p<\infty\quad\forall x\in\overline{\Omega}$, $\xi\in\mathbf{R}^{d}$.

(3) $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}[a_{\alpha}(x,\xi)-a_{\alpha}(x,\eta)][\xi_{\alpha}-\eta_{\alpha}]\geqslant 0\quad\forall\xi,\eta\in\mathbf{R}^{\alpha}$ 其中 $\xi_{\alpha},\eta_{\alpha}$ 记为 ξ,η 之分量.

(4) $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(x,\xi)\xi_{\alpha}\geqslant c_{o}(|\xi|^{p}-1),\xi\in R^{d},c_{o}>0$

记 $(Au,v)=\int_{\Omega}a_{\alpha}(x,u,\cdots D^{\beta}u)\cdot D^{\alpha}vdx,\ \forall u,v\in\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$

于是对应于(6.8.26)的弱解为

求 $u\in\mathbf{H}_{o}^{m,p}(\Omega)$ 使得

$$(Au - S, v) = 0 \quad \forall v \in H_o^{m,p}(\Omega) \tag{6.8.27}$$

利用 (1), (2) 不难验证，$\forall u \in H_o^{m,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant m$, 有

$$a_\alpha(u^\alpha, \cdots D^\beta u) \in L^q(\Omega), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

由 Hoelder 不等式，可知$\forall u \in H_o^{m,p}(\Omega)$, $v \in H_o^{m,p}(\Omega)$, (Au, v) 是有意义的，并且

$$|(Au, v)| \leqslant \varphi(|u|_{m,p})|v|_{m,p} \quad \forall u, v \in H_o^{m,p}(\Omega)$$

其中 φ: $[0, \infty) \to R_+$ 是连续的，所以 $Au \in H_o^{-m,q}(\Omega)$, 故算子 A: $u \to Au$ 是 $H_o^{m,p}(\Omega) \to H^{-m,q}(\Omega)$ 连续算子.

现在来证明, A是单调的.因为

$$\begin{aligned}
&(Au - Av, u - v) \\
&= (a_\alpha(\cdot, u, \cdots, D^\beta u) - a_\alpha(\cdot, v, \cdots, D^\beta v), D^\alpha u - D^\alpha v) \\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(\cdot, u, \cdots) - a_\alpha(\cdot, v, \cdots))(D^\alpha u - D^\alpha v) dx \geqslant 0
\end{aligned}$$

这里我们用到条件(3), 另由条件(4), 有

$$(Av, v) = (a_\alpha(\cdot, v, \cdots), D^\alpha v) \geqslant c_o \int_\Omega [\sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha v|^p - 1] dx$$

即
$$(Av, v) \geqslant c_o \|v\|_{m,p}^p - c_1$$

其中 c_o, c_1 为常数，另外

$$\frac{(Av, v)}{\|v\|_{m,p}} \geqslant c_o \|v\|_{m,p}^{p-1} - c_{-1} \|v\|_{m,p}^{-1} \to +\infty, \text{当} \|v\|_{m,p} \to +\infty$$

所以，算子 A 是单调和强制的，由于 $H_o^{m,p}(\Omega)$ 是自反的和可分的 Banach 空间，根据定理 A.8.2 可以得到如下存在性定理：

定理 6.8.5　设 Au 是由拟线性椭圆型边值问题 (6.8.26) 所

定义的非线性算子，它满足假设(1),(2),(3),(4). 那么$\forall S \in H^{-m,q}(\Omega)$，算子方程$Au=S$在$H_0^{m,p}(\Omega)$上存在唯一解. 进而设$V$:$H_0^{m,p}(\Omega)\subset V\subset H^{m,p}(\Omega)$为一闭的子空间，那么$\forall S'\in V'$，则$Au=S$在$V$中有唯一解.

第七章　一阶发展方程

本章主要讨论压缩连续半群、连续半群和解析半群的某些理论，以及它们在一阶发展方程和某些非线性发展方程中的应用.

§7.1　引　言

让我们考察热传导方程的初边值问题

$$
\begin{cases}
\text{求} u(x,t)\text{: } [0,\pi]\times[0,\infty]\to\mathbf{R}\text{, 使得} \\
u_t = u_{xx} & 0<x<\pi,\ t>0 \\
u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0 \\
u(x,0)=u_o(x) & 0<x<\pi
\end{cases}
\tag{7.1.1}
$$

利用分离变量法，令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，则有

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X=0 \\
X(0)=X(\pi)=0
\end{cases}
$$

$$
T'+\lambda T=0
$$

众所周知，它们的特征值和特征函数为

$$
\lambda_n=n^2,\ X_n(x)=\sin(nx) \qquad \forall n\geqslant 1
$$

以及 $T_n(t)=e^{-n^2t}$，则问题 (7.1.1) 的解可表为级数

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_o^n e^{-n^2t}\sin(nx) \tag{7.1.2}
$$

其中 $\{u_o^n\}$ 是初始条件 u_o 的 Fourier 系数，即

$$u_o^n = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi u_o(x)\sin(nx)dx \qquad n \geq 1$$

显然，$\forall u_o$，由经典的数学物理方程理论知，可以得到唯一的一个解 $u(x,t)$，它由 (7.1.2) 表示．同时，也以表示为

$$u(x,t) = S(t)u_o \tag{7.1.3}$$

不难证明，$S(t)$ 是从 $\mathbf{L}^2(0,\pi)$ 到 $\mathbf{L}^2(0,\pi)$ 的线性连续算子，而 $t \in \mathbf{R}_+ \to S(t) \in \pounds(\mathbf{L}^2(0,\pi),\ \mathbf{L}^2(0,\pi))$ 视为一个抽象函数，它由初边值问题 (7.1.1) 所确定．并且 $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+$ 如

$$S(t_1)u_o = \sum_{n=1}^{\infty} u_o^n e^{-n^2 t_1}\sin(nx)$$

则

$$\begin{aligned} S(t_2)S(t_1)u_o &= \sum_{n=1}^{\infty} u_o^n e^{-n^2 t_1}\sin(nx)e^{-n^2 t_2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_o^n e^{-n^2(t_1+t_2)}\sin(nx) \end{aligned}$$

因而 $S(t_1)S(t_2) = S(t_1 + t_2)$，$t_1$，$t_2 > 0$. 这就是半群恒等式，并且由式 (7.1.2) 可以看出 $S(0) = I$. 最后

$$\|S(t)u_o\|_{o,2} \leqslant e^{-t}\|u_o\|_{o,2} \tag{7.1.4}$$

这表明式 (7.1.1) 定义了一个可压缩的连续半群 (见 § 7.2).

对于非齐次问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_o(x) & 0 < x < \pi \end{cases} \tag{7.1.5}$$

设 $f(x,t) \in \mathbf{L}^2(0,\pi)$，$\forall t > 0$，故有展式

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin(nx),\ \text{其中} f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi,t)\sin(n\xi)d\xi$$

令$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin(nx)$，那么

$$\begin{cases}u'_n(t)+n^2u_n(t)=f_n(t) & t>0\\ u_n(o)=u_n^o & n\geqslant 1\end{cases}$$

从而有解

$$u_n(t)=u_n^oe^{-n^2t}+\int_o^te^{-n^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau$$

则式 (7.1.15) 的通解可以表示为

$$u(x,t)=S(t)u_o$$

$$+\int_0^t\int_0^{\pi}\left\{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2(t-\tau)}\sin(nx)\sin(n\xi)\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

或表示为算子形式

$$u(x,t)=S(t)u_o(x)+\int_0^tS(t-\tau)f(x,\tau)d\tau \qquad (7.1.6)$$

这就表明，非齐次的解仍然可以用 $S(t)$ 来表示．热传导方程这种解的表达形式可以推广到更为抽象的抛物型方程的情况．

§ 7.2 线性有界算子半群

以后，如无特别声明，我们总假设 H 是 Hilbert 空间，$(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为它的内积和范数．

定义 7.2.1 称 H 上定义的单参数算子族 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 为 H 上线性有界算子半群，如果它满足：

(1) $S(t)\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$(即任一个 $S(t)$ 都是 H 上的线性有界算子)

$$(7.2.1)$$

(2) $S(0)=I$ (H 上的恒等算子) (7.2.2)

(3) $S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau) \quad \forall t、\tau \geqslant 0$(半群性质) (7.2.3)

其次，若还有下式成立，称此有界算子半群是一致连续的：

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)-I\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}=0 \tag{7.2.4}$$

又如果除了式 (7.2.1)—(7.2.3) 外，$\{S(t),t\geqslant 0\}$ 还满足

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)u=u \qquad \forall u\in \mathrm{H} \tag{7.2.5}$$

则称此有界算子半群为强连续半群，记为 C^0 类半群．

定义7.2.2 如果算子A满足

$$D(A)=\left\{u\in \mathrm{H}:\ \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}\text{存在}\right\} \tag{7.2.6}$$

$$Au=\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}=D^+S(t)u\Big|_{t=0} \quad \forall u\in D(A) \tag{7.2.7}$$

则称 A 是半群 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元，而 $D(A)$ 为 A 的定义域．

引理 7.2.1 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群，则存在常数 $\omega\geqslant 0$ 和 $M\geqslant 1$，使得

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\leqslant Me^{\omega t} \quad \forall 0\leqslant t<+\infty \tag{7.2.8}$$

证 先证明存在一个 $\eta>0$，使得$\forall t\in[0,\eta]$，$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}$ 是有界的．若不然，则存在一个序列 $\{t_n\}$，$t_n\geqslant 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$，但 $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\geqslant n$．由一致有界性定理推出，必然有某些 $u\in \mathrm{H}$，使得 $\|S(t_n)u\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}$ 是无界的，这与式 (7.2.5) 矛盾．故$\forall t\in[0,\eta]$，$\|S(t_n)u\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\leqslant M$．又因 $\|S(0)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}=1$，所以 $M\geqslant 1$．令 $\omega=\eta^{-1}\log M\geqslant 0$，那么$\forall t>0$，有 $t=n\eta+\delta$，$0\leqslant\delta<\eta$．

从而由半群的性质有

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|S(\delta)S(\eta)^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M^{n+1} \leqslant MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}.$$

证毕.

定理 7.2.1 $\forall A \in \mathcal{L}(H)$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n / n!$ 在 $\mathcal{L}(H)$ 中收敛, 记为 $\mathrm{Exp}(A)$, $t \to \mathrm{Exp}(tA)$ 是 $\mathbf{R} \to \mathcal{L}(H)$ 的无限可微函数, 并且满足

$$D_t[\mathrm{Exp}(tA)] = A \cdot \mathrm{Exp}(tA) = \mathrm{Exp}(tA) \cdot A \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{7.2.9}$$

如果 A_1, $A_2 \in \mathcal{L}(H)$ 以及 $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$, 则

$$\mathrm{Exp}(A_1 + A_2) = \mathrm{Exp}(A_1) \cdot \mathrm{Exp}(A_2) \tag{7.2.10}$$

证 由于$A \in \mathcal{L}(H)$, 所以级数

$$S(t) = \mathrm{Exp}(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n / n!$$

对每一个 $t \in \mathbf{R}$ 按范数收敛, 从而对每个 $t \in \mathbf{R}$ 就定义了一个 H 上的线性有界算子. 显然, $S(0) = \mathrm{Exp}(0A) = I$, 由直接计算得

$$S(t+\tau) = \mathrm{Exp}((t+\tau)A) = \mathrm{Exp}(tA) \cdot \mathrm{Exp}(\tau A) = S(t)S(\tau)$$

所以$S(t)$是一个半群, 又因

$$[(\mathrm{Exp}(tA) - I) / t - A] = \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{\infty} (tA)^n / n!, \qquad t \neq 0,$$

故 $\|\mathrm{Exp}(tA) - I\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant t\|A\|_{\mathcal{L}(H)} e^{t\|A\|}$, 从而满足式 (7.2.4). 即 $\{\mathrm{Exp}(tA), t \geqslant 0\}$ 是一致连续半群. 又因为

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Exp}(tA) - I) / t - A\|_{\mathcal{L}(H)} \\ &\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \|\mathrm{Exp}(tA) - I\|_{\mathcal{L}(H)},\end{aligned}$$

它表明 A 是 $\mathrm{Exp}(tA)$ 的无限小生成元. 由于 $t \to \mathrm{Exp}(t\|A\|)$ 在 $t=0$ 处右可导, 且其右导数为 $\|A\|$, 所以, 在 $t=0$ 处式 (7.2.9)

成立．由半群性质可推出对每个 $t\in \mathbf{R}_+$，式 (7.2.9) 成立．式 (7.2.10) 可以由 $\mathrm{Exp}(A)$ 的定义及 A 对乘法运算可交换而得到．证毕．

由这个定理的证明还可以得到

推论 7.2.1 若 $A\in \mathcal{L}(\mathrm{H})$，则 $\mathrm{Exp}(tA)$ 是一个 C^0 类半群，并且 A 是 $\mathrm{Exp}(tA)$ 的无限小生成元．

定理 7.2.2 线性算子 A 是一个有界线性算子的 C^0 类半群的生成元，当且仅当 A 是一个线性有界算子．

证 设 $A\in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. 由推论 7.2.1 知 A 是 $\mathrm{Exp}(tA)$ 的无限小生成元．反之，设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的生成元，固定 $\rho>0$，使得

$$\left\|I-\rho^{-1}\int_0^\rho S(\tau)d\tau\right\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}<1$$

故 $\rho^{-1}\int_0^\rho S(\tau)d\tau$ 可逆，从而 $\int_0^\rho S(\tau)d\tau$ 可逆．作

$$\begin{aligned}h^{-1}(S(h)-I)\int_0^\rho S(\tau)d\tau &= h^{-1}\left(\int_0^\rho S(h+\tau)d\tau-\int_0^\rho S(\tau)d\tau\right)\\ &= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} S(\tau)d\tau-\int_0^h S(\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

故 $h^{-1}(S(h)-I)=h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h}S(\tau)d\tau-\int_0^h S(\tau)\right)\left(\int_0^\rho S(\tau)d\tau\right)^{-1}$，

当 $h\to 0$ 时，上式表明，$h^{-1}(S(h)-I)$ 按范数收敛，且极限是 $A=(S(\rho)-I)\left(\int_0^\rho S(\tau)d\tau\right)^{-1}$，这表明 $A\in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. 证毕．

由式 (7.2.8) 知，如果 $\omega=0$，则 $S(t)$ 必是一致有界半群．

定义 7.2.3 若式 (7.2.8) 中，$\omega=0$，$M=1$，称 $S(t)$ 为 C^0

类压缩半群，简称为压缩半群．

定理 7.2.3 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群，A 是它的无限小生成元，那么：

(1) $\forall u\in H$, $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}\int_t^{t+h} S(\tau)u d\tau = S(t)u$ (7.2.11)

(2) $\forall u\in H$, $\int_0^t S(\tau)u d\tau\in D(A)$

$$A\left(\int_0^t S(\tau)u d\tau\right) = S(t)u - u \tag{7.2.12}$$

(3) $\forall u\in D(A)$, $S(t)u\in D(A)$

$$D_t S(t)u = AS(t)u = S(t)Au \tag{7.2.13}$$

(4) $\forall u\in D(A)$

$$S(t)u - S(r)u = \int_r^t S(\tau)Au d\tau = \int_r^t AS(\tau)u d\tau \tag{7.2.14}$$

证 (1) 由 $t\to S(t)u$ 的连续性可得．为证明 (2)，设 $u\in H$，$h>0$，则

$$h^{-1}(S(h)-I)\int_0^t S(r)udr = h^{-1}\int_0^t (S(h+r)u - S(r)u)dr$$

$$= \left\{\int_h^{t+h} S(r)udr - \int_0^t S(r)udr\right\}h^{-1}$$

$$= h^{-1}\int_t^{t+h} S(r)udr - h^{-1}\int_0^h S(r)udr$$

令 $h\to 0^+$，则有 $\int_0^t S(r)udr\in D(A)$，且

$$A\int_0^t S(r)udr = S(t)u - u.$$

为了证明 (3)，设 $u \in D(A), h > 0$，对 $t \geqslant 0$，有 $h^{-1}(S(t+h)u - S(t)u) = h^{-1}(S(h) - I)S(t)u = h^{-1}S(t)(S(h)u - u)$，即当 $h \to 0^+$，极限存在，且为

$$D^+ S(t)u = AS(t)u = S(t)Au \quad t > 0$$

此即 $S(t)u$ 的右导数存在．现在还应证明，它的左导数也存在．事实上

$$h^{-1}(S(t)u - S(t-h)u) - S(t)Au$$
$$= S(t-h)[h^{-1}(S(h) - u) - Au] + [S(t-h)Au - S(t)Au]$$

当 $h \to 0$ 时，上式右端都是零，因为第一项 $u \in D(A)$ 以及 $\|S(t-h)\|$ 在 $0 \leqslant h \leqslant t$ 上有界，而第二项则由 $S(t)$ 是 C^0 类半群的原因．从而有

$$D_t S(t)u = S(t)Au \quad \forall u \in D(A) \quad t > 0$$

故有式(7.2.13).

关于 (4), 只须对式 (7.2.13) 从 r 到 t 积分即得．证毕．

定理 7.2.4　设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，那么 $D(A)$ 在 H 中稠密，并且 A 是闭线性算子．

证　$\forall u \in \mathrm{H}$，令 $w(t) = t^{-1}\int_0^t S(\tau)u\,d\tau$，则由定理 7.2.3 中第 (2) 点知 $w(t) \in D(A), \forall t > 0$. 并且由式 (7.2.11) 知，当 $t \to 0^+$ 时，有 $w(t) \to S(0)u = u$，从而 $D(A)$ 在 H 中稠密．

为了证明 A 是闭的，取 $\{u_n\} \subset D(A)$，使得在 H 中有 $u_n \to u, Au_n \to w$，那么由式 (7.2.14)，有

$$S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(\tau)Au_n\,d\tau \tag{7.2.15}$$

在有界区间上，当 $n \to \infty$ 时，式 (7.2.15) 有极限

$$S(t)u-u=\int_0^t S(\tau)w\,d\tau \tag{7.2.16}$$

上式两边同除以 $t>0$，且令 $t\to 0^+$，则由式 (7.2.11) 得

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-1}(S(t)u-u)=S(0)w$$

由式(7.2.6)知$u\in D(A)$；由式(7.2.7)知$Au=w$.证毕.

§7.3 半群的无限小生成元

这一节，只讨论压缩半群无限小生成元的充要条件，即 Hille－Yosida 定理.

我们知道，线性算子 A 的预解集 $\rho(A)$ 是这样的复数域，$\rho(A)=\{\lambda:\lambda$ 是复数，使得 $\lambda I-A$ 是可逆的$\}$.从而，如果 $\lambda\in\rho(A)$，则 $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$. 记

$$R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1} \tag{7.3.1}$$

称 $R(\lambda;A)$ 为算子 A 的预解式.

为了证明 Hille－Yosika 定理，我们需要下列引理

引理 7.3.1 设线性算子 A 满足

(1) A 是闭的，且 $D(A)$ 在 H 中稠密.

(2) A 的预解集 $\rho(A)\supset\mathbf{R}_+$，并且$\forall\lambda>0$，

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant\lambda^{-1} \tag{7.3.2}$$

则有
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R(\lambda;A)u=u\quad\forall u\in\mathrm{H} \tag{7.3.3}$$

证 $\forall u\in D(A)$，有

$$\|\lambda R(\lambda;A)u-u\|=\|AR(\lambda;A)u\|=\|R(\lambda;A)Au\|$$
$$\leqslant\lambda^{-1}\|Au\|\to 0,$$

当$\lambda\to\infty$时.由条件(1),(2)知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda;A)u = u \quad \forall u\in \mathbf{H}$$

证毕.

$\forall\lambda>0$, 定义算子 A 的 Yosida 逼近为

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda;A) = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I \tag{7.3.4}$$

于是有

引理 7.3.2 设引理 7.3.1 中条件 (1),(2) 成立，则 $\forall\lambda>0$, 算子 A 的 Yosida 逼近 A_λ 满足

(1) $A_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ (7.3.5)

(2) $\forall u\in D(A), \|A_\lambda u\| \leqslant \|Au\|$ (7.3.6)

(3) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_\lambda u = Au$ (7.3.7)

证 由 (7.3.4) 可得到式 (7.3.5). 由式 (7.3.4) 及 (7.3.2) 可得式 (7.3.6). 又由式 (7.3.4) 和 (7.3.3), 有 $\forall u\in D(A)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda u = \lim_{\lambda\to\infty}(A\lambda R(\lambda;A)u) = Au.$$ 证毕.

引理 7.3.3 设引理 7.3.1 中条件 (1), (2) 成立，$\forall\lambda>0$, A_λ 是 A 的 Yosida 逼近，则 A_λ 是 C^0 类压缩半群 $\mathrm{Exp}(tA_\lambda)$ 的无穷小生成元，并且 $\forall u\in\mathbf{H}$, $\lambda,\mu>0$ ，有

$$\|\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u - \mathrm{Exp}(tA_\mu)u\| \leqslant t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \tag{7.3.8}$$

证 由引理 7.3.2, $A_\lambda\in\mathcal{L}(\mathbf{H})$, 由推论 7.2.1 知 A_λ 是 C^0 类半群 $\mathrm{Exp}(tA_\lambda)$ 的无限小生成元 . 由式 (7.3.4) 和 (7.3.2) 得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Exp}(tA_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} &= \exp(-t\lambda)\|\mathrm{Exp}(t\lambda^2 R(\lambda;A))\| \\ &\leqslant \exp(-t\lambda)\mathrm{Exp}(t\lambda^2\|R(\lambda;A)\|) \leqslant 1\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Exp}(tA_\lambda)$ 是压缩半群 . 由 $\mathrm{Exp}(tA_\lambda)$,$\mathrm{Exp}(tA_\mu)$ 以及 A_λ

和 A_μ 的定义可知，它们之间是可交换的．故

$$\|\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u - \mathrm{Exp}(tA_\mu)u\|$$

$$= \|\int_0^1 \frac{d}{ds}(\mathrm{Exp}(tsA_\lambda)\mathrm{Exp}((1-s)tA_\mu)u\|$$

$$\leqslant t\int_0^1 \|\mathrm{Exp}(tsA_\lambda)\mathrm{Exp}((1-s)tA_\mu)(A_\lambda u - A_\mu u)\|ds$$

$$\leqslant t\|A_\lambda u - A_\mu u\|$$

从而得到式 (7.3.8). 证毕．

定理 7.3.1 (Hille－Yosida) 线性算子 A 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 上 C^0 类压缩半群 $\{S(t), t \geqslant 0\}$ 无限小生成元的充要条件是

(1) A 是闭的，且 $D(A)$ 在 $\mathbf{H}$ 中稠密；

(2) A 的预解集 $\rho(A) \supset \mathbf{R}_+$，且 $\forall \lambda > 0$，有

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leqslant \lambda^{-1}.$$

证 必要性．设 A 是压缩半群 $S(t)$ 的无限小生成元，由定理 7.2.4 知 (1) 成立．另外 $\forall \lambda > 0$, $u \in \mathbf{H}$，设

$$R(\lambda)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u\,dt \tag{7.3.9}$$

因为 $t \to S(t)u$ 是连续和一致有界的；从而积分 (7.3.9) 存在且定义一个线性有界算子 $R(\lambda)$，并由压缩性知

$$\|R(\lambda)u\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|S(t)u\|dt \quad \leqslant \lambda^{-1}\|u\| \tag{7.3.10}$$

从而，$\forall h > 0$，有

$$h^{-1}\{S(h) - I\}R(\lambda)u = h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda h}(S(t+h)u - S(t)u)dt$$

$$= h^{-1}(e^{\lambda h} - 1)\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u\,dt - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t)u\,dt \tag{7.3.11}$$

当 $h \to 0^+$ 时，式 (7.3.11) 右端第一项为 $\lambda R(\lambda)u$，而由式 (7.2.11) 知 (7.3.11) 右端第二项收敛于 u，故

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}\{S(h)-I\}R(\lambda)u = \lambda R(\lambda)u - u$$

由此得出 $R(\lambda)u \in D(A)$. $\forall \lambda > 0$, $\forall u \in \mathrm{H}$，以及 $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$，即

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I \tag{7.3.12}$$

由式 (7.3.12) 及 A 是闭的，有 $\forall u \in D(A)$

$$\begin{aligned} R(\lambda)Au &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Au dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)u dt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt\right) = AR(\lambda)u \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

由式 (7.3.12) 和 (7.3.13) 有

$$R(\lambda)(\lambda I - A)u = u \qquad \forall u \in D(A) \tag{7.3.14}$$

即 $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ $\forall \lambda > 0$. 由式 (7.3.10) 有

$$\| R(\lambda) \|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} \leqslant \lambda^{-1}$$

这样就结束了必要性的证明 .

充分性 $\forall u \in D(A)$. 由式 (7.3.8) 有

$$\begin{aligned} &\| \mathrm{Exp}(tA_\lambda)u - \mathrm{Exp}(tA_\mu)u \| \leqslant t\| A_\lambda u - A_\mu u \| \\ &\quad \leqslant t\| A_\lambda u - Au \| + t\| Au - A_\mu u \| \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

由式 (7.3.7) 和 (7.3.15)，推出当 $\lambda \to \infty$ 时，$\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u$ 是收敛的 . 并且在有界区域上对 t 是一致收敛的 . 因为 $D(A)$ 在 H 中稠密和引理 7.3.3 的证明结果 $\| \mathrm{Exp}(tA_\lambda) \|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} \leqslant 1$ 得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{Exp}(tA_\lambda)u = S(t)u, \ \forall u \in \mathrm{H} \tag{7.3.16}$$

而且上式收敛在有界区间上是一致的 . 由式 (7.3.16) 易知，$S(t)$

满足半群性质，$S(0)=I$ 以及 $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant 1$. 同样，作为连续函数 $t\to \mathrm{Exp}(tA_\lambda)u$ 的一致极限，$\forall t>0$，$t\to S(t)u$ 是连续的，故 $S(t)$ 是 H 上 C^0 类压缩半群.

下面，我们还要证明，A 是 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 的无限小生成元. 为此 $\forall u\in D(A)$，由式 (7.3.16) 及 (7.2.11) 有

$$S(t)u-u=\lim_{\lambda\to\infty}(\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u-u)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \mathrm{Exp}(rA_\lambda)A_\lambda u dr$$

$$=\int_0^t S(r)Au dr \tag{7.3.17}$$

上式是由在有限区间上 $\mathrm{Exp}(tA_\lambda)A_\lambda u$ 一收敛于 $S(t)Au$ 而得到的. 设 $S(t)$ 的无限小生成元为 B，则 $\forall u\in D(A)$

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-1}(S(t)u-u)=\lim_{t\to 0+} t^{-1}\int_0^t S(r)Au dr=Au$$

即 $\forall u\in D(A)$，$Bu=Au$，所以 $A\subseteq B$. 因为 B 是 $S(t)$ 的无限小生成元，由这个定理必要性，知 $1\in\rho(B)$. 另一方面，由定理的假设 (2)，$1\in\rho(A)$，由于 $A\subseteq B$，有 $(I-B)D(A)=(I-A)D(A)=H$. 由此得 $D(B)=(I-B)^{-1}\mathrm{H}=D(A)$，所以 $A=B$. 证毕.

由定理 7.3.1 以及它的证明可知：

推论 7.3.1 设 A 是 C^0 类压缩半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果 A_λ 是 A 的 Yosida 逼近，则

$$S(t)u=\lim_{\lambda\to\infty}\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u \quad \forall u\in \mathrm{H} \tag{7.3.18}$$

证 由定理 7.3.1 的证明可以推出式 (7.3.18) 右端定义一个 C^0 类压缩半群 $T(t)$，它的无限小生成元是 A，那么，$T(t)=S(t)$ 可以从下面定理 7.3.2 得到. 证毕.

推论 7.3.2 设 A 是 C^0 类压缩半群 $S(t)$ 的无限小生成

元，则 A 的预解集 $\rho(A)$ 包含右半平面 :$\rho(A)\supseteq\{\lambda:\mathrm{Re}\lambda>0\}$，且

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\leqslant 1/\mathrm{Re}\lambda \tag{7.3.19}$$

证 算子 $R(\lambda)u=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S(t)udt \quad \forall \mathrm{Re}\lambda>0$ 是有意义的．在定理 7.3.1 必要性的证明中，已经证明 $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$．因而 $\rho(A)\supset\{\lambda:\mathrm{Re}\lambda>0\}$．而估计式 (7.3.19) 是显然的．证毕．

定理 7.3.2 设 $S(t)$，$T(t)$ 为线性有界算子的两个 C^0 类压缩半群，B、A 分别是它们的无限小生成元．如果 $A=B$，则 $S(t)=T(t)$.

证 $\forall u\in D(A)=D(B)$，由式 (7.2.13) 有 $\tau\to T(t-\tau)S(\tau)u$ 是可微的，且

$$\frac{d}{d\tau}T(t-\tau)S(\tau)u=-AT(t-\tau)S(\tau)u+T(t-\tau)BS(\tau)u$$

$$=-T(t-\tau)AS(\tau)u+T(t-\tau)BS(\tau)u=0$$

因而 $\tau\to T(t-\tau)S(\tau)u$ 是常数，特别

$$T(t-\tau)S(\tau)\,u\big|_{\tau=0}=T(t-\tau)S(\tau)\,u\big|_{\tau=t}$$

即 $T(t)u=S(t)u$，$\forall u\in D(A)$，由定理 7.2.4 知，$D(A)$ 在 H 中稠密，以及 $T(t)$，$S(t)$ 是有界的，故

$$T(t)u=S(t)u,\quad \forall u\in \mathrm{H}.$$

证毕．

我们还要给出更为实用的压缩半群生成元的充要条件，为此，先证明几个引理．

定义 7.3.1 设算子序列 $\{T_n\}\in\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$，其中 X，Y 为两个 Banach 空间．若存在算子 $T\in\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nu-Tu\|_{\mathrm{Y}}=0 \quad \forall u\in\mathrm{X}$，则称算子 T 为 $\{T_n\}$ 的强极限．

引理 7.3.4 设 $B\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$，且 $\|B\|<1$，则 $(I-B)^{-1}$

$\in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, 且 $(I-B)^{-1}=\sum_{\lambda=0}^{\infty} B^{i}$. (7.3.20)

证 $\forall u \in \mathrm{H}$, 有

$$\left\|\sum_{i=0}^{N} B^{i} u\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{N}\left\|B^{i} u\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{N}\|B\|^{i}\|u\|$$

因为 $\|B\|<1$, 所以上式右端是收敛的. 因此可以定义一个线性有界算子 $s \lim\limits_{N \rightarrow \infty} \sum\limits_{i=0}^{N} B^{i}$.

$$(I-B)\left(s \lim _{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N} B^{i} u\right)=s \lim _{N \rightarrow \infty}(I-B)\left(\sum_{i=0}^{N} B^{i} u\right)$$

$$=s \lim _{N \rightarrow \infty}\left(I-B^{N+1}\right) u=u-\left(s \lim _{N \rightarrow \infty} B^{N+1} u\right)=u$$

类似地有 $\left(s \lim\limits_{N \rightarrow \infty} \sum\limits_{i=0}^{N} B^{i}\right)(I-B) u=u \quad \forall u \in \mathrm{H}$

由于 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} B^{i}=s \lim\limits_{N \rightarrow \infty} \sum\limits_{i=0}^{N} B^{i}$, 故式 (7.3.20) 成立. 证毕.

引理 7.3.5 设 $A \in \mathcal{L}(D(A), \mathrm{H})$, $D(A) \subset \mathrm{H}$, 又设 μ 为某复数, $\mu \in \rho(A)$. 那么 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当

$$[I-(\mu-\lambda) R(\mu ; A)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$$

且此时有

$$R(\lambda ; A)=R(\mu ; A)[I-(\mu-\lambda) R(\mu ; A)]^{-1} \tag{7.3.21}$$

这里 $R(\mu ; A)=(\mu I-A)^{-1}$, 即为 A 的预解式.

证 充分性 令 $B=I-(\mu-\lambda) R(\mu ; A)$, $B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, 那么

$$(\lambda I-A) R(\mu ; A) B^{-1}=[(\lambda-\mu) I+(\mu I-A)] R(\mu ; A) B^{-1}$$

$$=[(\lambda-\mu) R(\mu ; A)+I] B^{-1}=I$$

又 $R(\mu ; A) B^{-1}(\lambda I-A)=R(\mu, A) B^{-1}((\lambda-\mu) I+(\mu I-A))$

$$= R(\mu;A)B^{-1}[B(\mu I - A)] = I$$

从而 $\lambda I - A$ 可逆，并且式(7.3.21)成立.

用类似方法可以证明必要性.证毕.

定义 7.3.2 Hilbert 空间 H 上的线性算子 A 称为增殖的，如果它满足

$$\mathrm{Re}(Au,u) \geqslant 0 \qquad \forall u \in D(A) \tag{7.3.22}$$

A 称为耗散的，如果至少存在一个 $u^* \in \mathrm{H}$，使得

$$\mathrm{Re}(Au,u^*) \leqslant 0 \qquad \forall u \in D(A) \tag{7.3.23}$$

A 称为守恒的，如果

$$\mathrm{Re}(Au,u) = 0 \qquad \forall u \in D(A) \tag{7.3.24}$$

定理 7.3.3 线性算子 A 是增殖的，当且仅当

$$\|(\lambda I + A)u\| \geqslant \lambda\|u\| \qquad \forall \lambda > 0,\ \forall u \in D(A) \tag{7.3.25}$$

证 必要性 设 A 是增殖的，那么 $\forall \lambda > 0$，$\forall u \in D(A)$ 有

$$\|\lambda u + Au\|\|u\| \geqslant |(\lambda u + Au,u)| \geqslant \mathrm{Re}(\lambda u + Au,u) \geqslant \lambda\|u\|^2$$

即
$$\|\lambda u + Au\| \geqslant \lambda\|u\|.$$

充分性 若式(7.3.25)成立，由此

$$2\mathrm{Re}(Au,u) \geqslant -\|Au\|^2/\lambda \quad \forall \lambda > 0,\ u \in D(A)$$

令 $\lambda \to +\infty$，则得 $\mathrm{Re}(Au,u) \geqslant 0$. 此即式(7.3.22). 证毕.

显然，若 A 是增殖的，则 $-A$ 必是耗散的.

定理 7.3.4 线性算子 $A:D(A) \to \mathrm{H}$ 是 C^0 类压缩半群无限小生成元的充要条件是

(1) $D(A)$在 H 中稠密;

(2) $-A$ 是增殖的;

(3) 对某些 $\lambda > 0$，$\lambda I - A$ 是 $D(A) \to \mathrm{H}$ 上的满射，即值域 $R(\lambda I - A) = \mathrm{H}$ (7.3.26)

证 必要性 设 A 是 $D(A) \to \mathrm{H}$ 的 C^0 类压缩半群无限小

生成元，则由定理 7.3.1 知，A 是闭的，$D(A)$ 在 H 中稠密，$(\lambda I - A)$ 是满射，并且由 $\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} \leqslant \lambda^{-1}$ 得

$$\|\lambda u - Au\| \geqslant \lambda\|u\| \quad \forall \lambda > 0,\ \forall u \in D(A)$$

则由定理 7.3.3 得 $-A$ 是增殖的，由此得必要性证明.

充分性　设 (1),(2) 成立. 首先证明 A 是闭的. 实际上，若 A 不是闭的，则存在序列 $\{u_n\}$ 使得 $u_n \in D(A)$，而 $u_n \to 0$，$Au_n \to -w$；$\|w\| = 1$，由定理 7.3.3 可以推出 $\forall t > 0$，$\forall u \in D(A)$，有

$$\|(u + t^{-1}u_n) + tA(u + t^{-1}u_n)\| \geqslant \|u + t^{-1}u_n\|$$

令 $n \to +\infty$，然后 $t \to 0$，即得 $\|u - w\| \geqslant \|u\|$，$\forall u \in D(A)$. 但是由于 (1)，这是不可能的，因为由此可以得出 $\forall u \in \mathrm{H}$，仍有 $\|u - w\| \geqslant \|u\|$，特别地取 $u = w$，则 $\|u\| = 1$ 与不等式矛盾，从而 A 是闭的.

其次由 (3) 证明 $R(\lambda I - A) = \mathrm{H}$　$\forall \lambda > 0$. 实际上，设对某个 $\mu > 0$，$(\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$，且 $\|\mu(\mu I - A)^{-1}\| \leqslant 1$，那么有 $\forall \lambda \in \mathrm{C}$(复数域)

$$\|(\lambda - \mu)(\mu I - A)^{-1}\| \leqslant |\lambda - \mu| / \mu$$

对于那些满足 $|\lambda - \mu| < \mu$ 的 λ，由引理 7.3.4 知，$I - (\lambda - \mu)(\lambda I - A)^{-1}$ 有属于 $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ 的有界逆. 但是由引理 7.3.5 知，$(\lambda I - A) \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. 从而由 $\mu > 0$,$(\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ 可以推出对所有满足 $|\lambda - \mu| < \mu$ 的 $\lambda > 0$，即 $0 < \lambda < 2\mu$，有 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. 再由归纳法，就可以得到 $R(\lambda I - A) = \mathrm{H}$　$\forall \lambda > 0$.

于是，我们验证了定理 7.3.1 中条件 (1), (2), 所以 A 是 C^0 类压缩半群. 证毕.

上面，讨论了压缩半群生成元. 下面我们讨论非压缩半群

生成元的充分必要条件.

定理 7.3.5 设 C^0 类半群 $S(t)$, $t \geqslant 0$, 满足

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathrm{H})} \leqslant e^{\omega t}, \quad \omega \geqslant 0$$

则线性算子 A 为 $S(t)$ 的无限小生成元的充要条件是

(1) A 是闭的, $\overline{D(A)} = \mathrm{H}$

(2) A 的预解集 $\rho(A)$ 包含射线 $\{\lambda : \mathrm{I_m}\,\lambda = 0, \lambda > \omega\}$, 且对这样的 λ, 有

$$\|R(\lambda;A)\|_{\mathscr{L}(\mathrm{H})} \leqslant (\lambda - \omega)^{-1} \tag{7.3.27}$$

证 设 $T(t) = e^{-\omega t}S(t)$, 则 $T(t)$ 是 C^0 类压缩半群. 如果 A 是 $S(t)$ 的无限小生成元, 那么 $A - \omega I$ 也是 $T(t)$ 的无限小生成元. 另一方面, 如果 B 是 $T(t)$ 的无限小生成元, 那么 $B + \omega I$ 是满足 $\|S(t)\| \leqslant e^{\omega t}$ 的半群 $S(t)$ 的无限小生成元, 因此 $S(t) = e^{\omega t}T(t)$. 根据定理 7.3.1 容易得出本定理. 证毕.

定理 7.3.6 线性算子 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元的充分必要条件是

(1) A 是闭的, 且 $D(A)$ 在 H 中稠密;

(2) $\forall \lambda > \omega$, $\lambda I - A$ 是 $D(A) \to \mathrm{H}$ 的双射, 且

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant M(\lambda - \omega)^{-n} \quad n = 1,2,\cdots \tag{7.3.28}$$

其中 $M > 0$, $\omega > 0$ 是由 C^0 类半群 $S(t)$, 即由

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \tag{7.3.29}$$

所决定的.

证 由引理 7.2.1 知, $S(t)$ 满足式 (7.3.29). 定理 7.3.6 的充分性证明与定理 7.3.1 的证明完全类似. 区别仅仅在于没有压缩性的要求. 现在考虑必要性的证明.

首先注意到假设 (1) 是定理 7.2.4 的结论. 因此我们只须证

明假设 (2)，为此令

$$R(\lambda)u=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt \qquad \forall u\in \mathbf{H}$$

由于式 (7.3.29)，$\forall\lambda>\omega$，$R(\lambda)$ 有意义，利用与定理 7.3.1 证明中类似的讨论，有 $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}=R(\lambda;A)$. 为了证明式 (7.3.28)，考察 $\forall\lambda>0$

$$D_\lambda R(\lambda:A)u=D_\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt=-\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}S(t)u\,dt$$

由归纳法得

$$D_\lambda^n R(\lambda;A)u=(-1)^n\int_0^{\infty}t^n e^{-\lambda t}S(t)u\,dt \tag{7.3.30}$$

另一方面，利用恒等式

$$R(\lambda;A)-R(\mu;A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A)$$

因为 $\forall\lambda\in\rho(A)$，$\lambda\to R(\lambda;A)$ 是解析函数，且

$$D_\lambda R(\lambda;A)=-R(\lambda;A)^2 \tag{7.3.31}$$

由归纳法，容易证明

$$D_\lambda^n R(\lambda;\ A)=(-1)^n n!\ \ R(\lambda;\ A)^{n+1} \tag{7.3.32}$$

比较式 (7.3.30) 和 (7.3.32)，有

$$R(\lambda;\ A)^n u=\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt/(n-1)!$$

所以 $$\|R(\lambda;\ A)^n u\|\leqslant M\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{(\omega-\lambda)t}\|u\|dt/(n-1)!$$

$$\leqslant M\|u\|/(\lambda-\omega)^n$$

从而式(7.3.28)得证.证毕.

§7.4 解析半群

首先讨论半群的可微性问题.

定义 7.4.1 设 $S(t)$ 是 Banach 空间上的 C^0 类半群，如果 $\forall u\in H$, $t\to S(t)u$ 对于 $t>t_o$ 是可微的，那么称 $S(t)$ 在 $t>t_o$ 时是可微的. 如果 $t>0$ 时 $S(t)$ 是可微的，则称 $S(t)$ 为可微.

定理 7.2.3 的 (3) 告诉我们，如果 A 是 $S(t)$ 的无限小生成元，那么 $\forall u\in D(A)$, $t\to S(t)u$ 当 $t\geqslant 0$ 时是可微的.

定理 7.4.1 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群，它在 $t>t_o$ 时是可微的，并且 A 是它的无限小生成元. 那么

(1) 对 $t>nt_o$, $n=1,2,\cdots,S(t)$: $H\to D(A^n)$ 和 $S^{(n)}(t)=A^nS(t)$ 是有界线性算子；

(2) 对于 $t>nt_o$, $n=1,2,\cdots,S^{(n-1)}(t)$ 在一致算子拓扑下是连续的.

证 用归纳法. 首先当 $n=1$ 时，本定理成立. 由假设，$t\to S(t)u$ 对所有的 $t>t_o$ 和所有的 $u\in H$ 是可微的. 因此 $S(t)u\in D(A)$, $S^1(t)u=AS(t)u$, $\forall u\in H$, $t>t_o$. 另一方面，由于 A 是闭的, $S(t)$ 有界，$AS(t)$ 是闭的. 对于 $t>t_o$, $AS(t)$ 在全空间 H 有定义. 因此由闭图象定理，它是有界线性算子，此即 $n=1$ 时，(1) 是正确的. 为了证明 (2), 令 $\|S(t)\|\leqslant M_1$, $\forall t\in[0,1]$. 设 $t_o<t_1\leqslant t_2<t_1+1$, 则

$$S(t_2)u-S(t_1)u=\int_{t_1}^{t_2}AS(\tau)ud\tau$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} S(\tau - t_1) A S(t_1) u d\tau \qquad (7.4.1)$$

因而 $\|S(t_2)u - S(t_1)u\| \leqslant (t_2 - t_1) M_1 \|AS(t_1)\| \|u\|$，由此得，$t > t_o$ 时，$S(t)$ 在一致算子拓扑下是连续的．

设对于 n，(1)、(2) 成立，设 $t > (n+1)t_o$，取 $\tau > nt_o$，使得 $t - \tau > t_o$，则

$$S^{(n)}(t)u = S(t-\tau) A^n S(\tau) u \qquad \forall u \in \mathrm{H} \qquad (7.4.2)$$

由于式 (7.4.2) 右端在 $t - \tau > t_o$ 时是可微的，因而 $\forall u \in \mathrm{H}$ 及 $t > (n+1)t_o$ 时，$S(t)u$ 是 $(n+1)$ 次可微的，$S^{(n+1)}(t)u = A^{(n+1)} S(t)u$．类似于 $n = 1$ 时的情况，$S(t)$: $\mathrm{H} \to D(A^{n+1})$ 和 $\forall t > (n+1)t_o$，$A^{n+1} S(t)$ 是线性有界算子，此即结论 (1)．由于 $A^n S(t)$ 在 $t > (n+1)t_o$ 时是有界的．所以和 $n = 1$ 时的证明一样，可以证明，当 $t > (n+1)t_o$ 时，$S^{(n)}(t)$ 在一致算子拓扑下的连续性．证毕．

推论 7.4.1 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群，且 $t > t_o$ 时可微．如果 $t > (n+1)t_o$，则 $S(t)$ 在一致算子拓扑下是 n 次可微的．

证 由定理 7.4.1 的证明可以知道，$\forall t > (n+1)t_o$，$A^k S(t)$，$1 \leqslant k \leqslant n$，在一致算子拓扑下是连续的．因此，如果 $t > (n+1)t_o$，有

$$S^{(k-1)}(t+h) - S^{(k-1)}(t) = \int_t^{t+h} A^k S(\tau) d\tau \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

由此可得，当 $1 \leqslant k \leqslant n$，$t > (n+1)t_o$ 时，在一致算子拓扑下，$S^{(k-1)}(t)$ 是可微的，从而 $S(t)$ 在一致算子拓扑下是 n 次可

微的．证毕．

推论 7.4.2 如果 $S(t)$ 是可微的 C° 类半群，则 $S(t)$ 在一致算子拓扑下，对所有 $t>0$，是无穷可微的．

引理 7.4.1 设 $S(t)$ 是可微的 C° 类半群，A 是它的无限小生成元，则

$$S^{(n)}(t)=(AS(t/n))^{n}=(S^{1}(t/n))^{n}\quad n=1,2,\cdots \tag{7.4.3}$$

证 当 $n=1$ 时式 (7.4.3) 已在定理 7.4.1 中证明．设对于 n，式 (7.4.3) 成立．则

$$S^{(n)}(t)=(AS(t/n))^{n}=S(t-\tau)(AS(s/n))^{n} \tag{7.4.4}$$

两边对 t 微分，有

$$S^{(n+1)}(t)=AS(t-\tau)(AS(s/n))^{n} \tag{7.4.5}$$

代入 $\tau=nt/(n+1)$，则得式 (7.4.3) 对 $n+1$ 时也成立．证毕．

引理 7.4.2 设 $S(t)$ 是 C° 类半群，A 是它的无限小生成元，如果 $S(t)$ 在 $t>t_{o}$ 时可微，$\lambda\in\sigma(A)$，$t>t_{o}$，则 $\lambda e^{\lambda t}\in\sigma(AS(t))$，这里 $\sigma(A)$ 是算子 A 的谱集．

证 令 $B_{\lambda}(t)u=\int_{0}^{t}e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau$

显然，$B_{\lambda}(t)u$ 关于 t 可微，并且有

$$B'_{\lambda}(t)u=S(t)u+\lambda B_{\lambda}(t)u \tag{7.4.6}$$

$B'_{\lambda}(t)$ 是 $\mathbf{H}$ 上线性有界算子．设 $t>t_{o}$，$\forall u\in\mathbf{H}$ 有

$$h^{-1}(S(h)-I)B_{\lambda}(t)u=h^{-1}(e^{\lambda h}-1)\int_{h}^{t}e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau$$

$$+h^{-1}e^{\lambda h}\int_{t}^{t+h}e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau-h^{-1}\int_{0}^{h}e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau$$

令 $h\to0^{+}$，上式右端收敛于 $\lambda B_{\lambda}(t)u+S(t)u-e^{\lambda t}u$，因

而 $B_\lambda u \in D(A)$，且

$$AB_\lambda(t)u = \lambda B_\lambda(t)u + S(t)u - e^{\lambda t}u$$

即 $$(\lambda I - A)B_\lambda(t)u = e^{\lambda t}u - S(t)u \qquad \forall u \in \mathrm{H} \tag{7.4.7}$$

对 t 微分后得

$$\lambda e^{\lambda t}u - AS(t)u = (\lambda I - A)B'_\lambda(t)u \quad \forall u \in \mathrm{H} \tag{7.4.8}$$

令 $$C(t)u = \lambda e^{\lambda t}u - AS(t)u$$

对于 $t > t_o$，$C(t)$ 是线性有界算子．容易证明，$B'_\lambda(t)$ 与 $C(t)$ 是可交换，并且 $\forall u \in D(A), AB'_\lambda(t)u = B'_\lambda(t)Au$．如果 $\lambda e^{\lambda t} \in \rho(AS(t))$，则 $C(t)$ 是可逆的，且从式 (7.4.8) 得

$$u = (\lambda I - A)B'_\lambda(t)C^{-1}(t)u \qquad \forall u \in \mathrm{H}$$

即 $B'_\lambda(t)C^{-1}(t)$ 是 $(\lambda I - A)$ 的右逆，在式 (7.4.8) 两边同乘 $C^{-1}(t)$，有 $u = C^{-1}(t)(\lambda I - A)B'_\lambda(t)u$，选取 $u \in D(A)$，交换 $B'_\lambda(t)$ 与 $(\lambda I - A)$，利用 $B'_\lambda(t)$ 与 $C(t)$ 可交换性，可得 $B'_\lambda(t)$ 与 $C^{-1}(t)$ 是可交换的，故有 $\forall u \in D(A)$，$u = B'_\lambda(t)C(t)^{-1}(\lambda I - A)u$．从而 $B'_\lambda(t)C(t)^{-1}$ 是 $\lambda I - A$ 的逆算子，$\lambda \in \rho(A)$．这与假设矛盾．证毕．

于是可以得到 C° 类半群可微的充要条件：

定理 7.4.2 设 $S(t)$ 是满足 $\|S(t)\|_t \leqslant Me^{\omega t}$ 的 C° 类半群，A 是它的无限小生成元，则 $S(t)$ 是可微半群的充要条件是 $\forall b > 0$，存在常数 a_b，$C_b > 0$，使得

$$\rho(A) \supset \sum\nolimits_b = \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > a_b - b\log|\mathrm{I_m}\lambda|\} \tag{7.4.9}$$

和

$$\|R(\lambda;A)\| \leqslant C_b |I_m \lambda| \quad \forall \lambda \in \sum_b \ \mathrm{Re}\lambda > \omega \tag{7.4.10}$$

证明参看[22].

下面考察解析半群.

定义 7.4.2 记 $\Delta = \{z:\varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$.$\forall z \in \Delta$, 设 $S(z)$ 是线性有界算子，则算子族 $S(z)$ 称为在 Δ 内的解析半群. 如果它满足

(1) $z \to S(z)$在Δ内是解析的;

(2) $S(0) = I, \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} S(z)u = u \quad \forall u \in \mathrm{H}$;

(3) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

显然，解析半群在正半实轴上的限制是 C^0 类半群. 人们感兴趣的是如何把一个 C^0 类半群扩展为包含非负实轴的扇形区域 Δ 上的解析半群. 下面定理给出了回答.

定理 7.4.3 设 $S(t)$ 是一致有界 C^0 类半群. A 是 $S(t)$ 的无限小生成元，且设 $0 \in \rho(A)$. 则下列论断是等价的.

(1) $S(t)$ 能够扩展为在 $\Delta_\delta = \{z:|\arg z| < \delta\}$ 内是解析半群并且 $\|S(z)\|$ 在 Δ_δ 的任一闭子域内是一致有界的；

(2) 存在常数C, 使得$\forall \sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau;A)\| \leqslant c|\tau|^{-1} \tag{7.4.11}$$

(3) 存在$0 < \delta < \pi / 2$和$M > 0$, 使得

$$\rho(A) \supset \sum = \{\lambda;|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\} \tag{7.4.12}$$

并且 $\quad \|R(\lambda;A)\| \leqslant M|\lambda|^{-1} \ \forall \lambda \in \sum, \ \lambda \neq 0 \qquad (7.4.13)$

(4) 对 $t > 0$, $S(t)$ 是可微的，并且存在常数 c, 使得 $\quad \|AS(t)\| \leqslant ct^{-1} \quad \forall t > 0 \qquad (7.4.14)$

证明请看[22].

现在讨论解析半群的充要条件.

定理 7.4.4 设 A 是满足 $\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ 的 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，则 $S(t)$ 是解析的充要条件是存在常数 $c>0$ 和 $\Lambda>0$，使得

$$\|AR(\lambda;A)^{n+1}\| \leqslant c/(n\lambda^n) \quad \forall \lambda > n\Lambda \quad n=1,2,\cdots \tag{7.4.15}$$

证 由定理 7.4.3 知 $S(t)$ 是解析的充要条件是

$$\|AS(t)\| \leqslant c_1 t^{-1} e^{\omega_1 t} \quad \forall t>0 \tag{7.4.16}$$

现在先设 A 满足式 (7.4.15)，则 $\forall \lambda > n\Lambda$，$u \in D(A)$，有

$$\|AR(\lambda;A)^{n+1}u\| = \|R(\lambda;A)^{n+1}Au\| \leqslant c\|u\|/(n\lambda^n) \tag{7.4.17}$$

取 $t<\Lambda^{-1}$，并且在式 (7.4.17) 中置 $\lambda = nt^{-1}$，则

$$\|A(\lambda R(\lambda;A)^{n+1})u\| = \|(\lambda R(\lambda;A)^{n+1})Au\| \leqslant c\|u\|t^{-1} \quad \forall u \in D(A)$$

令 $n\to\infty$，由 A 的闭性以及

$$S(t)u = \lim_{n\to\infty}[nt^{-1}R(nt^{-1};A)]^{n+1}u \quad \forall u \in \mathrm{H} \tag{7.4.18}$$

得 $\|AS(t)u\| \leqslant ct^{-1}\|u\|$，$\forall u \in D(A)$，$0<t<1/\Lambda$ (7.4.19)

又由 $D(A)$ 在 H 中稠密，$AS(t)$ 是闭的，得式 (7.4.19) 对所有 $u \in \mathrm{H}$ 都成立．因此，存在 $c_1>0$，$\omega_1>0$，使得式 (7.4.16) 成立，即 $S(t)$ 是解析的．

反之，对 λ 微分下式

$$R(\lambda;A)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$$

n 次，则

$$R(\lambda;A)^{(n)}u = (-1)^n n!\ R(\lambda;A)^{n+1}u$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t) u dt \qquad (7.4.20)$$

对上式两边作用 A，利用 (7.4.16) 有

$$n! \ \|AR(\lambda;A)^{n+1} u\| \leqslant C_1 \left(\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega_1)t} dt \right) \|u\|$$

$$= c_1 (n-1)! \ \|u\| (\lambda - \omega_1)^{-n}$$

因而 $\forall \lambda > n\Lambda$，有

$\|AR(\lambda;A)^{n+1}\| \leqslant c_1 (n\lambda^n)^{-1} (1 - \omega_1 / n\Lambda)^{-n} \leqslant c_2 / (n\lambda^n)$ 证毕．

§7.5　抽象的Cauchy问题

设 $\mathbf{H}$ 是 Hilbert 空间，A 是 $D(A) \to \mathbf{H}$ 的线性算子，对于任意一给定 $u_o \in \mathbf{H}$，A 的抽象 Cauchy 问题是

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) = u_o \end{cases} \qquad (7.5.1)$$

本节我们将讨论齐次问题 (7.5.1) 解的存在唯一性问题以及相应的非齐次问题的解的存在唯一性．

引理 7.5.1　设 $u(t)$ 为值在 $\mathbf{H}$ 中的连续函数，如果

$$\left\| \int_0^T e^{n\tau} u(\tau) d\tau \right\| \leqslant M \quad \forall n = 1,2,\cdots \qquad (7.5.2)$$

则在 $[0,T]$ 上 $u(t) \equiv 0$.

证　设 $u^* \in \mathbf{H}'$($\mathbf{H}$ 的对偶空间)．设 $\varphi(t) = \langle u^*, u(t) \rangle$，则 $\varphi(t)$ 在 $[0,T]$ 上连续，且

$$\left|\int e_0^T e^{nt}\varphi(\tau)d\tau\right| = \left|\langle u^*, \int_0^T e^{n\tau}u(\tau)d\tau\rangle\right| \leqslant \|u^*\|_{H'}M = M_1$$

$$n = 1,2,\cdots \tag{7.5.3}$$

设$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn\tau} = 1 - \exp(-e^{n\tau})$

这个级数在 $\tau\in[0,T]$ 上一致收敛．所以

$$\left|\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k!}e^{kn(t-T+\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kn(t-\tau)}\left|\int_0^T e^{kn\tau}\varphi(\tau)d\tau\right| \leqslant M_1(\exp(e^{n(t-T)})-1) \tag{7.5.4}$$

对于 $t<T$，式(7.5.4)右端当 $n\to+\infty$ 时趋于零．另一方面

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-T+\tau)}\varphi(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^T (1-\exp(-e^{n(t-T+\tau)}))\varphi(\tau)d\tau \tag{7.5.5}$$

利用 Lebesque 控制收敛定理，式(7.5.5)右端当 $n\to\infty$ 时，收敛于 $\int_{T-t}^{T}\varphi(\tau)d\tau$，考虑到式(7.5.4)有 $0\leqslant t<T$，$\int_{T-t}^{T}\varphi(\tau)d\tau = 0$，因此在 $[0,T]$ 上，$\varphi(t)\equiv 0$. 证毕．

定理 7.5.1 设 A 为 **H** 上线性算子，$D(A)$ 在 **H** 内稠密，它的预解集 $\rho(A)$ 非空．则 $\forall u_0\in D(A)$，始值问题(7.5.1)式在 $[0,\infty)$ 上有连续可微的唯一解的充要条件是 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元．

证 如果 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，则由定理 7.2.3(3) 可知，$\forall u_0\in D(A)$，$S(t)u_0$ 是始值问题(7.5.1)的唯一解，$S(t)u_0$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 内是连续可微的．

相反的，如果始值问题 (7.5.1) 存在唯一解，它在 $[0,\infty)$ 内连续可微，那么我们要证明 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元.

设 $u_o \in D(A)$，始值问题 (7.5.1) 的唯一连续可微的解记为 $u(t,u_o)$. $\forall u_o \in D(A)$，记图象范数 $\|u_o\|_G = \|u_o\| + \|Au_o\|$，由于 $\rho(A) \neq 0$，A 是闭的，因而对 $D(A)$ 赋以 $\|\cdot\|_G$ 范数后，它就成为 Banach 空间，记为 $[D(A)]$. $\forall 0 \leqslant t \leqslant t_o$，记 $Su_o = u(t;u_o)$. 设 H_{t_o} 是由 $[0,t_o]$ 到 $[D(A)]$ 的连续函数的全体，其范数为

$$\|u(t,u_o)\|_{H_{t_o}} = \sup_{0<t\leqslant t_o} \|u(t,u_o)\|_G$$

则 H_{t_o} 是 Banach 空间．由方程 (7.5.1) 的线性和解的存在唯一性，知 S 是 $[D(A)]$ 到 H_{t_o} 的线性算子．而且 S 是闭算子．事实上，如果在 $[D(A)]$ 中 $u_n \to u_o$，在 H_{t_o} 中 $Su_n \to v$，由于 A 是闭的以及

$$u(t,u_n) = u_n + \int_0^t Au(\tau,u_n)d\tau$$

令 $n \to \infty$，得 $\quad v(t) = u_o + \int_0^t Av(\tau)d\tau$

此即 $v(t) = u(t,u_o)$ 以及 S 是闭的．从而由闭图象定理知 S 是有界的，且有

$$\|u(t,u_o)\|_{H_{t_o}} \leqslant c\|u_o\|_G \tag{7.5.6}$$

现在定义映射 $T(t):[D(A)] \to [D(A)]$ 为 $T(t)u_o = u(t,u_o)$. 由式 (7.5.1) 解的唯一性可推出 $T(t)$ 有半群性质，而且由式 (7.5.6)

知 $T(t)$ 是一致有界的．和引理 7.2.1 的证明一样，$T(t)$ 是可以延拓到 $[D(A)]$ 上的，由 $\forall nt_o \leqslant t < (n_o+1)t$，$T(t)u_o = T(t-nt_o)T(t_o)^n u_o$ 定义的半群，而且它还满足 $\|T(t)u_o\|_G \leqslant Me^{\omega t}\|u_o\|_G$．

现在我们证明

$$T(t)Av_o = AT(t)v_o \quad \forall v_o \in D(A^2) \tag{7.5.7}$$

令 $v(t) = v_o + \int_0^t u(\tau, Av_o)d\tau$ (7.5.8)

则有 $v'(t) = u(t, Av_o) = Av_o + \int_0^t \frac{d}{d\tau}u(\tau, Av_o)d\tau$

$$= A(v_o + \int_0^t u(\tau, Av_o)d\tau) = Av(t) \tag{7.5.9}$$

因为 $v(0) = v_o$．由始值问题 (7.5.1) 的解的唯一性，知 $v(t) = u(t, v_o)$，从而 $Au(t, v_o) = v'(t) = u(t, Av_o)$，此即式 (7.5.7).

因为 $D(A)$ 在 H 内稠密以及 $\rho(A) \neq 0$，那么 $D(A^2)$ 同样在 H 内稠密．设 $\lambda_o \in \rho(A), \lambda_o \neq 0$ 是固定的以及 $v_o \in D(A^2)$．如果 $u_o = (\lambda_o I - A)v_o$，则由式 (7.5.7) 有 $T(t)u_o = (\lambda_o I - A)T(t)v_o$ 以及

$$\|T(t)u_o\| \|(\lambda_o I - A)T(t)v_o\| \leqslant c\|T(t)v_o\|_G \leqslant c_1 e^{\omega t}\|v_o\|_G \tag{7.5.10}$$

但是 $\|v_o\|_G = \|v_o\| + \|Av_o\| \leqslant c_2\|u_o\|$，此即

$$\|T(t)u_o\| \leqslant c_3 e^{\omega t}\|u_o\| \tag{7.5.11}$$

从而 $T(t)$ 可连续延拓到全空间 H 上．延拓后 $T(t)$ 就成为 H 上的 C° 类半群．下面，我们还须证明 A 是 $T(t)$ 的无限小生成元．用 A_1 表示 $T(t)$ 的无限小生成元．如果 $u_o \in D(A)$．由 $T(t)$ 的

定义有 $T(t)u_o = u(t,u_o)$，从而由假设

$$\frac{d}{dt}T(t)u_o = AT(t)u_o \qquad \forall t \geqslant 0$$

知，特别地有 $(d/dt)T(t)x|_{t=0} = Au_o$，此即 $A_1 \supset A$.

设 $\mathrm{Re}\lambda > \omega$，$v_o \in D(A^2)$. 由式 (7.5.7) 以及 $A_1 \supset A$ 有

$$e^{-\lambda t}AT(t)v_o = e^{-\lambda t}T(t)Av_o = e^{-\lambda t}T(t)A_1 v_o \qquad (7.5.12)$$

在 $(0,\infty)$ 上对式 (7.5.12) 积分，有

$$AR(\lambda,A_1)v_o = R(\lambda,A_1)A_1 v_o \qquad (7.5.13)$$

但是 $A_1 R(\lambda;A_1)v_o = R(\lambda;A_1)A_1 v_o$，从而有 $AR(\lambda;A_1)v_o = A_1 R(\lambda;A_1)v_o$，$\forall v_o \in D(A^2)$. 由于 $A_1 R(\lambda;A_1)$ 是一致有界的，A 是闭的以及 $D(A^2)$ 在 H 中稠密，则有 $\forall v_o \in$ H，$AR(\lambda;A_1)v_o = A_1 R(\lambda;A_1)v_o$. 这就是说 .$D(A) \supset$ 值域 $R(\lambda;A_1) = D(A_1)$ 以及 $A \supset A_1$. 从而 $A = A_1$. 证毕.

对任一初值 $u_o \in$ H，还有其它保证始值问题 (7.5.1) 有唯一解的充分条件.

定理 7.5.2 设 A 是 H 中稠密定义的线性算子. 如果 $\forall \lambda \geqslant \lambda_o$，$R(\lambda,A)$ 存在且满足

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1}\log\|R(\lambda;A)\| = 0 \qquad (7.5.14)$$

则 $\forall u_o \in$ H 始值问题 (7.5.1) 最多有一个解.

证 首先注意始值问题 (7.5.1) 式有解 $u(t)$ 的充要条件是 $e^{zt}u(t)$ 是始值问题

$$\frac{dv}{dt} = (A + zI)v,\ v(0) = u_o$$

的解. 从而可以用常数乘以恒等算子平移 A，同时假设 $\forall \lambda$

$\geqslant 0$, $R(\lambda;A)$ 存在而且满足式 (7.5.14).

设 $u(t)$ 是式 (7,5.1) 始值问题的解且 $u(0)=0$, 我们要证明 $u(t)\equiv 0$. 为此 $\forall\lambda>0$, 考虑函数 $t\to R(\lambda;A)u(t)$, 因为 $u(t)$ 是问题 (7.5.1) 的解, 有

$$\frac{d}{dt}R(\lambda;A)u(t)=R(\lambda;A)Au(t)=\lambda R(\lambda;A)u(t)-u(t)$$

即
$$R(\lambda;A)u(t)=-\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau \tag{7.5.15}$$

由于假设 (7.5.14), $\forall\sigma>0$, 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}e^{-\sigma\lambda}\|R(\lambda;A)\|=0$$

从而由式(7.5.15)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\sigma}e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau=0 \tag{7.5.16}$$

由式 (7.5.2) 式知 $u(\tau)\equiv 0\quad\forall 0\leqslant\tau\leqslant t-\sigma$. 因为 t 和 σ 是任意的, $\forall t>0$, $u(t)\equiv 0$. 证毕.

定理 7.5.3　如果 A 是可微半群无限小生成元, 则 $\forall u_o\in \mathbf{H}$, 始值问题 (7.5.1) 具有唯一的解.

证　由定理 7.5.2 可得唯一性. 由定理 7.5.1 又得 $\forall u_o\in D(A)$, 其解是存在的. 如果 $u_o\in\mathbf{H}$, 由 $S(t)u_o$ 的可微性, 由

$$\frac{d}{dt}S(t)u_o=AS(t)u_o\qquad\forall t>0$$

以及对于 $t>0$, $AS(t)u_o$ 是 Lipschitz 连续的, 知 $S(t)u_o$ 是问题 (7.5.1) 的解. 证毕.

由这个定理容易得出:

定理 7.5.4　设 A 是一个解析半群的无限小生成元, 则 $\forall u_o\in\mathbf{H}$, 始值问题 (7.5.1) 有唯一解.

如果 A 是 C° 类半群的无限小生成元，但不可微，那么一般地说，如果 $u_o \notin D(A)$，则问题 (7.5.1) 的解是不存在的．此时函数 $t \to S(t)u_o$ 是始值问题 (7.5.1) 的广义解．有许多方法定义 (7.5.1) 的广义解，其中之一是如果有 $u_{on} \in D(A)$ 使得当 $n \to \infty$ 时，$u_{on} \to u(0)$，而且在有界区间上 $S(t)u_{on} \to u(t)$ 是一致的，则 $[0,\infty)$ 上的连续函数 $u(t)$ 是问题 (7.5.1) 的广义解．显然，这样定义的广义解不依赖于 $\{u_{on}\}$，是唯一的．而且如果 $u_o \in D(A)$，它也就是问题 (7.5.1) 的解．

现在我们讨论非齐次的始值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = u_o \end{cases} \tag{7.5.17}$$

这里 $f:[0,T] \to \mathbf{H}$. 在这一段中，我们假设 A 是 C° 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，使得 $\forall u_o \in D(A)$，相应的齐次问题，即 $f \equiv 0$，问题 (7.5.1) 有唯一的解．

定义 7.5.1 设 $u \in \mathbf{C}([0,T);\mathbf{H}) \cap \mathbf{C}^1([0,T);\mathbf{H})$，$\forall 0 < t < T$，$u(t) \in D(A)$，而且 $u(t)$ 满足式 (7.5.17)，则称 $u(t)$ 是始值问题 (7.5.17) 的经典解．

设 A 是 C° 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元．$u_o \in \mathbf{H}$，$f \in \mathbf{L}^1(0,T;\ \mathbf{H})$，则函数 $u(t) \in C([0,T);\mathbf{H})$，满足

$$u(t) = S(t)u_o + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{7.5.18}$$

称为始值问题 (7.5.17) 在 $[0,T]$ 上的广义解．

设在 $[0,T]$ 上，函数 u 几乎处处可微，而且 $u' \in \mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{H})$.

如果它满足

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \text{a.e. 在}[0,T]\text{上} \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

则称 u 为始值问题 (7.5.17) 的强解．

下面分别讨论广义解，强解和经典解存在的条件．

定理 7.5.5 如果 $f \in L^1(0,T;H)$，则 $\forall u_o \in H$，始值问题 (7.5.17) 最多有一个广义解，它是由式 (7.5.18) 给出的．

证 设 $S(t)$ 是由 A 生成的 C^o 类半群，u 是 (7.5.17) 的解，则 $\forall 0 < \tau < t$，$g(\tau) = S(t-\tau)u(\tau)$ 是可微的，且

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= -AS(t-\tau)u(\tau) + S(t-\tau)u'(\tau) \\ &= -AS(t-\tau)u(\tau) + S(t-\tau)Au(\tau) + S(t-\tau)f(\tau) \\ &= S(t-\tau)f(\tau) \end{aligned} \tag{7.5.19}$$

因为 $f \in L^1(0,T;H)$，则 $S(t-\tau)f(\tau)$ 是可积的．由零到 t 积分 (7.5.19)，得

$$u(t) = S(t)u_o + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

证毕.

由定理 7.5.5 知，如果 $f \in L^1(0,T:H)$，始值问题 (7.5.17) 最多有一个广义解．人们感兴趣的是如何改善 f，使得 (7.5.17) 有强解和经典解．实际上，$f \in C([0,T),H)$ 还不足以保证 (7.5.17) 有经典解．例如设 A 是 C^o 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，$u_o \in H$，但是 $\forall t \geqslant 0$，$S(t)u_o \notin D(A)$．令 $f(\tau) = S(\tau)$，则 $\forall \tau \geqslant 0, f(\tau)$ 是连续的．考察始值问题

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + S(t)u_o$$

$$u(0)=0 \tag{7.5.20}$$

即使 $u(0)=0\in D(A)$，问题 (7.5.20) 没有解．事实上，(7.5.20) 的广义解是

$$u(t)=\int_0^t S(t-\tau)S(\tau)u_o d\tau = tS(t)u_o$$

但是对于 $t>0$，$tS(t)u_o$ 是不可微的，从而它不是 (7.5.17) 的经典解．

定理 7.5.6 设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无穷小生成元，如果 $f\in C^1([0,\infty),\mathrm{H})$，则对任意的 $u_o\in D(A)$，问题 (7.5.17) 有唯一的经典解 $u\in \mathrm{C}([0,\infty),D(A))\bigcap \mathrm{C}^1([0,\infty),\mathrm{H})$，且它可以表示为

$$u(t)=S(t)u_o+\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{7.5.21}$$

证 唯一性 我们只须证明当 $f(t)\equiv 0$，$u_o\equiv 0$ 时，始值问题 (7.5.17) 的解 $u(t)\equiv 0$. 若不然，设 u 是一非零解，那么 $\forall t>\tau$，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(S(t-\tau)u(\tau)) &= \lim_{h\to 0} h^{-1}\{S(t-\tau-h)u(\tau+h)-S(t-\tau)u(\tau)\}\\ &= \lim_{h\to 0} h^{-1}\{S(t-\tau-h)-S(t-\tau)\}u(\tau)\\ &\quad + \lim_{h\to 0} h^{-1}S(t-\tau-h)(u(\tau+h)-u(\tau))\\ &= -S(t-\tau)Au(\tau)+S(t-\tau)u'(\tau)=0\end{aligned}$$

从而 $t>\tau_o$，$S(t-\tau)u(\tau)=S(t)u(0)=0$. 令 $t\to\tau^+$，有 $u(\tau)=S(0)u(\tau)=0$，对所有 $\tau\geqslant 0$ 成立．这与假设相矛盾．

存在性 我们验证由式 (7.5.21) 给出的 u 满足 (7.5.17). 首

先注意 $u(0)=u_o$ 且 $(\frac{d}{dt})S(t)u_o = AS(t)u_o$. 因此只需证明函数

$$g(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \in \mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{H}) \tag{7.5.22}$$

且 $g(t)\in D(A)$ 以及 $g'(t)=Ag(t)+f(t)$ 即可. 实际上

$$\begin{aligned}
&h^{-1}\{g(t+h)-g(t)\}\\
&=h^{-1}\left\{\int_0^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau-\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\}\\
&=h^{-1}\left\{\int_{-h}^{t}S(t-\tau)f(\tau+h)d\tau-\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\}\\
&=\int_0^t S(t-\tau)h^{-1}\{f(\tau+h)-f(\tau)\}d\tau\\
&\quad+h^{-1}\int_t^{t+h}S(\tau)f(t+h-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

因为 $f\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{H})$, 故

$$g'(t)=\int_0^t S(t-\tau)f'(\tau)d\tau+S(t)f(0) \tag{7.5.23}$$

存在且 $g'(t)\in\mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{H})$. 另一方面

$$\begin{aligned}
h^{-1}\{g(t+h)-g(t)\}&=\int_0^t h^{-1}(S(h)-S(0))S(t-\tau)f(\tau)d\tau\\
&\quad+h^{-1}\int_t^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau\\
&=h^{-1}\{S(h)-I\}g(t)+h^{-1}\int_0^h S(h-\tau)f(h+\tau)d\tau
\end{aligned}$$

由式 (7.2.11) 和 f 的连续性, 有

$$\lim_{h\to 0^+}h^{-1}\int_0^h S(h-\tau)f(t+\tau)d\tau=f(t)$$

注意到式 (7.5.23) 有

$$\lim_{h \to 0^+} h^{-1}\{S(h)-I\}g(t) \text{存在, 即} g(t) \in D(A)$$

从而 $g'(t) = Ag(t) + f(t)$. 证毕.

和定理 7.5.6 的证明类似，可以给出始值问题 (7.5.17) 强解存在唯一性条件，即

定理 7.5.7　设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果 f 在 $[0,T]$ 上几乎处处可微，且 $f' \in L^1(0,T;H)$，则 $\forall u_0 \in D(A)$，始值问题 (7.5.17) 在 $[0,T]$ 上有唯一强解.

通常，对于 $u_0 \in D(A)$，f 在 $[0,T]$ 上的 Lipschitz 连续性不足以保证 (7.5.17) 的强解存在. 但是，如果 H 是自反的，f 在 $[0,T]$ 上是 Lipschitz 连续的，即

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leqslant c|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T]$$

则由经典的泛函分析知，f 几乎处处可微，且 $f' \in L^1(0,T;H)$. 于是由定理 7.5.7 可得

定理 7.5.8　设 H 是 Hilbert 空间，A 是 H 上 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果在 $[0,T]$ 上 f 是 Lipschitz 连续的，则 $\forall u_0 \in D(A)$，始值问题 (7.5.17) 在 $[0,T]$ 上有唯一的强解，且由下式给出：

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

以上讨论表明，改善 f 的光滑性可以使广义解改善为强解，下面，我们讨论改善半群的性质以得到更光滑的广义解.

定理 7.5.9　设 A 是解析半群 $S(t)$ 的无限小生成元，$f \in L^p(0,T;H)$，$1 < p < \infty$. 如果 u 是问题 (7.5.17) 的广义解，则 $\forall \varepsilon > 0$，u 在 $[\varepsilon,T]$ 上是指数为 $(p-1)/p$ 的 Hoelder 连续的.

而且如果 $u_o\in D(A)$，则在 $[0,T]$ 上 u 是具有相同指数的 Hoelder 连续的．

证　由于 $S(t)$ 是解析的，由定理 7.1.3 知 $S(t)$ 是有界的，即 $\forall\, t\in[0,T]$，有 $\|S(t)\|\leqslant M$ 以及 $\|AS(t)\|\leqslant ct^{-1}$．此即 $\forall\,\varepsilon>0$，$S(t)u_o$ 在 $[\varepsilon,T]$ 上是 Lipschitz 连续的．如果 $u_o\in D(A)$，$S(t)u_o$ 在 $[0,T]$ 上是 Lipschitz 连续的．从而只须证明如果 $f\in \mathrm{L}^p[0,T;\mathrm{H}),1<p<\infty$，则 $v(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ 在 $[0,T]$ 上是指数为 $(p-1)/p$ 的 Hoelder 连续的即可．对于 $h>0$，有

$$v(t+h)-v(t)=\int_t^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t\{S(t+h-\tau)-S(t-\tau)\}f(\tau)d\tau=I_1+I_2$$

我们分别估计 I_1 和 I_2．对 I_1，利用 Hoelder 不等式 $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ 有

$$\|I_1\|\leqslant M\int_t^{t+h}\|f(\tau)\|d\tau\leqslant Mh^{(p-1)/p}\left(\int_t^{t+h}\|f(\tau)\|^p d\tau\right)^{1/p}$$

$$\leqslant Mh^{1/q}\|f\|_{\mathrm{L}^p(0,T;\ \mathrm{H})}\qquad(7.5.24)$$

对于 I_2，因为 $\forall h>0$，有

$$\|S(t+h)-S(t)\|\leqslant 2M\quad \forall t,\ t+h\in[0,T]$$

$$\|S(t+h)-S(t)\|\leqslant cht^{-1}\quad \forall t,\ t+h\in[0,T]$$

从而

$$\|S(t+h)-S(t)\|\leqslant c_1\mu(h,t)=c_1\min(1,ht^{-1})$$

$$\forall t,t+h\in[0,T]\qquad(7.5.25)$$

这里 c_1 是常数，它满足 $c_1 > \max(2M, c)$. 利用(7.5.25)以及 Hoelder 不等式，有

$$\|I_2\| \leqslant c_1 \int_0^t \mu(h, t-\tau) \|f(\tau)\| d\tau$$

$$\leqslant c_1 \|f\|_{L^p(0,T;\ H)} \left(\int_0^t \mu(h, t-\tau)^q d\tau \right)^{1/q} \qquad (7.5.26)$$

但是因为 $\mu \geqslant 0$，有

$$\int_0^t \mu(h, t-\tau)^q d\tau = \int_0^t \mu(h,\tau)^q d\tau \leqslant \int_0^\infty \mu(h,\tau)^q d\tau = ph$$

代入式 (7.5.26)，即得 $\|I_2\| \leqslant c_2 h^{1/q}$. 证毕.

定理 7.5.10　设 A 是解析半群 $S(t)$ 的无限小生成元，$f \in L^1(0,T;H)$. 而且假设如果 $\forall t \in (0,T)$，存在 $\delta_t > 0$ 和连续的实函数 $W_t(\tau):[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$\|f(t) - f(\tau)\| \leqslant W_t(|t-\tau|) \qquad (7.5.27)$$

和

$$\int_0^{\delta_t} \tau^{-1} W_t(\tau) d\tau < +\infty \qquad (7.5.28)$$

则 $\forall u_0 \in H$，问题 (7.5.17) 的广义解 u 就是经典解.

证　因为 $S(t)$ 是解析半群，$\forall u_0 \in H, S(t)u_0$ 是问题 (7.5.17) 齐次 (即 $f \equiv 0$) 始值问题的解. 所以我们只须证明 $v(t) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau) d\tau \in D(A)$，$\forall t \in (0,T)$ 以及在 $(0,T)$ 上 $Av(t)$ 是连续的. 为此记

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$= \int_0^t S(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau + \int_0^t S(t-\tau)f(t)d\tau \quad (7.5.29)$$

由定理 7.2.3(2) 知 $v_2(t) \in D(A)$ 以及 $Av_2(t) = (S(t)-I)f(t)$. 由假设知 f 在 $(0,T)$ 上是连续的，因此 $Av_2(t)$ 在 $(0,T)$ 上也是连续的．为了证明 v_1 具有同样的结论，我们定义

$$v_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} S(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau \quad \forall t \geqslant \varepsilon \quad (7.5.30)$$

$$v_{1,\varepsilon}(t) = 0 \qquad \forall t < \varepsilon \quad (7.5.31)$$

由此显然可知当 $\varepsilon \to 0$ 时，$v_{1,\varepsilon}(t) \to v_1(t)$. 而且 $v_{1,\varepsilon}(t) \in D(A)$, $\forall t \geqslant \varepsilon$, 有

$$Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AS(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau \quad (7.5.32)$$

由式 (7.5.27) 和 (7.5.28) 知，$\forall t > 0$, 当 $\varepsilon \to 0$ 时，$Av_{1,\varepsilon}(t)$ 是收敛的，而且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^t AS(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau$$

又因 A 是闭的，则有 $\forall t > 0$, $v_1(t) \in D(A)$ 以及

$$Av_1(t) = \int_0^t AS(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau \quad (7.5.33)$$

我们还要指出 $Av_1(t)$ 在 $(0,T)$ 上是连续的．$\forall 0 < \delta < t$, 有

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AS(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau + \int_\delta^t AS(t-\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau \quad (7.5.34)$$

对于固定的 $\delta > 0$, (7.5.34) 右端第二个积分是 t 的连续函数．而

第一个积分对 t 是一致 $O(\delta)$. 从而 $Av_1(t)$ 是连续的. 综上所述，我们已证明了 $v(t)\in D(A)$ 以及在 $(0,T)$ 上 $Av(t)$ 是连续的.

下面证明，$\forall t>0$，$v(t)$ 是连续可微的. 注意等式，$\forall h>0$，有

$$h^{-1}(S(h)-I)v(t)=h^{-1}(v(t+h)-v(t))$$
$$-h^{-1}\int_t^{t+h}S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (7.5.35)$$

由于 $v(t)\in D(A)$，由上式可知在 t 处 $v(t)$ 有右导数 $D^+v(t)$，而且 $D^+v(t)=Av(t)+f(t)$. 因为由假设知 f 是连续的以及 $Av(t)$ 是连续的，得 $D^+v(t)$ 是连续的，此即 $v(t)$ 是连续可微的，而且 $v'(t)=Av(t)+f(t)$. 证毕.

由定理 7.5.10 可推出：

定理 7.5.11　设 A 是解析半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果 $f\in \mathbf{L}^1(0,T;H)$ 在 $(0,T)$ 上是局部 Lipschitz 连续的，则 $\forall u_o\in \mathbf{H}$，始值问题 (7.5.17) 有唯一的经典解.

现在我们给出非齐次始值问题 (7.5.17) 的广义解的渐近性质.

定理 7.5.12　设 $\mu>0$，A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，$S(t)$ 满足 $\|S(t)\|\leqslant Me^{-\mu t}$. 又设 f 是 $[0,\infty)$ 上的有界可测函数. 如果

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=f_o \qquad (7.5.36)$$

则始值问题 (7.5.17) 的广义解 u 满足

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=-A^{-1}f_o \qquad (7.5.37)$$

证　因为 $\|S(t)\|\leqslant Me^{-\mu t}$，由定理 7.3.5 得 $0\in\rho(A)$ 以及

当 $t\to\infty$ 时，$\|S(t)u_o\|\to 0$. 考察

$$v(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t S(t-\tau)[f(\tau)-f_o]d\tau$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)f_o d\tau=v_1(t)+v_2(t)$$

与定理 7.3.1 的证明中类似，有

$$\lim_{t\to\infty}v_2(t)=\int_0^\infty S(t)f_o dt=R(0;A)f_o=-A^{-1}f_o$$

为了证明 (7.5.37)，我们还要证明 $\lim_{t\to\infty}v_1(t)=0$

任给 $\varepsilon>0$，选取 t_o，使得 $t>t_o$，且

$$\|f(t)-f_o\|<\frac{\varepsilon\mu}{2M} \tag{7.5.38}$$

则有
$$\|v_1(t)\|\leqslant\int_0^{t_o}\|S(t-\tau)\|\|f(\tau)-f_o\|d\tau$$

$$+\int_{t_o}^{t}\|S(t-\tau)\|\|f(\tau)-f_o\|d\tau$$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty M\mu^{-1}e^{-\mu(t-t_o)}+\varepsilon/2$$

这里 $\|f\|_\infty=\sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|$. 选取足够大的 $t>t_o$，使得上式右端第一项小于 $\varepsilon/2$，则有 $\|v_1(t)\|<\varepsilon$. 证毕.

然而，怎样的半群才具有下列性质，即

$$\|S(t)\|\leqslant Me^{-\mu t},\quad \mu>0,\ M>0 \tag{7.5.39}$$

这里不加证明地给出几个充分条件：

(1) 设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，如果对某个 p，$1<p\leqslant\infty$，有

$$\int_0^\infty \|S(t)u\|^p dt < +\infty \quad \forall u \in \mathbf{H}$$

则存在 $M \geqslant 1$, $\mu > 0$, 使得 $\|S(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$;

(2) 设 A 是一解析半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果 $\sigma = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$, 则存在 $M \geqslant 1$, $\mu > 0$, 使得 $\|S(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$. 这里 $\sigma(A)$ 是 A 的谱集.

§ 7.6 对抛物型方程的应用

考察$2m$阶椭圆算子

$$A(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha (a^{\alpha\beta} \partial_\beta u)$$

满足强椭圆条件, 即

$$\mathrm{Re}(-1)^m A_m(x,\xi) \geqslant c|\xi|^{2m} \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbf{R}^n$$

共中 $\quad A_m(x,\partial) = \sum_{|\alpha| = m, |\beta| = m} (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha (a^{\alpha\beta} \partial_\beta)$

由 Gårding 公式知, 双线性形式 $B(u,v) = (Au,v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} (a^{\alpha\beta} \partial_\beta u, \partial_\alpha v)$ 是 $\mathbf{H}_o^m(\Omega) - \mathbf{L}^2(\Omega)$ 强制的. 即存在 $c_o > 0$, $\lambda_o > 0$. 使得

$$B(u,u) \geqslant c_o \|u\|_{m,\Omega}^2 - \lambda_o \|u\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall u \in \mathbf{H}_o^m(\Omega)$$

设 $\mathbf{V} = \mathbf{H}_o^m(\Omega)$, $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$, 考察混合问题

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + A(x,\partial)u = f && \forall x \in \Omega \\
&u(0,x) = u_o(x) && \\
&u(x,t) = 0 && \forall x \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{7.6.1}$$

设 A 为相应的双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 在空间套

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'$$

中相应的形式算子(见 §5.5)，那么抛物型方程混合问题(7.6.1)可以归结为下列 Hilbert 空间中抽象的一阶发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + Au = f \\ u(0) = u_o \end{cases} \quad \text{在}[0,T)\text{上} \tag{7.6.2}$$

定理 7.6.1 设 A 是由三重结构 $(\mathbf{V},\mathbf{H},B)$ 所决定的形式算子，其中双线性形式 $B(\cdot,\cdot):\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$，是连续的和 $\mathbf{V}-\mathbf{H}$ 强制的：存在 $c_o>0$, $\lambda_o>0$，使得

$$B(u,u) \geqslant c_o \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \lambda_o \|u\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall u\in\mathbf{V} \tag{7.6.3}$$

则 $-A$ 是 H 上 C^o 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，且

$$\|S(t)\| \leqslant e^{\omega t}, \quad \omega \geqslant 0 \tag{7.6.4}$$

而 $\forall\lambda\geqslant\lambda_o$，$-A_\lambda = -(\lambda I + A)$ 是 H 上 C^o 类压缩半群 $S_\lambda(t)$ 的无限小生成元．

证 为了证明 $-A$ 是 C^o 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，只须验证定理 7.3.6 的条件即可．由于双线性形式 B 是 $\mathbf{V}-\mathbf{H}$ 强制的，所以 $D(A)$ 在 H 中稠密，且 A 是闭的(见定理 5.8.6). 同时有 $\forall\lambda>\lambda_o$，$A+\lambda I$ 是双射，且

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant (\lambda - \lambda_o)^{-1} \tag{7.6.5}$$

实际上，边值问题

$$(\lambda I + A)u = f \qquad u\in D(A), \quad f\in\mathbf{H} \tag{7.6.6}$$

等价于变分问题

$$\begin{aligned} &\text{求} u\in D(A)\text{，使得} \\ &B(u,v) + \lambda(u,v) = (f,v) \quad \forall v\in\mathbf{V} \end{aligned} \tag{7.6.7}$$

但是，$\forall u \in \mathbf{V}$

$$B(u,u) + \lambda \|u\|_{\mathrm{H}}^{2} \geqslant c_{o}(\|u\|_{\mathrm{V}}^{2} + (\lambda - \lambda_{o})\|_{\mathrm{H}}^{2})$$

从而双线性形式$B(u,v) + \lambda(u,v)$是V强制的，即

$$B(u,u) + \lambda(u,u) \geqslant c_{o}\|u\|_{\mathrm{V}}^{2} \quad \forall u \in \mathbf{V} \tag{7.6.8}$$

所以变分问题 (7.6.7) 存在唯一解 $u \in \mathbf{V}$. 由光滑性定理，$\forall f \in \mathbf{H}$，有 $u \in D(A)$，并且

$$(\lambda - \lambda_{o})\|u\|_{\mathrm{H}}^{2} \leqslant (f,u) \leqslant \|f\|_{\mathrm{H}}\|u\|_{\mathrm{H}}$$

即
$$\|u\|_{\mathrm{H}} \leqslant (\lambda - \lambda_{o})^{-1}\|f\|_{\mathrm{H}}$$

或
$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant (\lambda - \lambda_{o})^{-1}$$

反复应用上面的讨论，可以得到式 (7.3.28)，且 $M = 1$. 因此 $-A$ 是 C^{o} 类半群无限小生成元，并有 (7.6.4) 式 .

为了证明 $-A_{\lambda}$ 是 C^{o} 类压缩半群无限小生成元，只要证明 $-A_{\lambda}$ 满足定理 7.3.4 的条件即可．由上面的讨论，$D(A_{\lambda})$ 在 H 中稠密以及 A_{λ} 是 $D(A_{\lambda})$ 到 H 上的双射 . 所以这里只须证明 $-A_{\lambda}$ 是耗散的（或 $+A_{\lambda}$ 是增殖的）即可 . 而这些由式 (7.6.8) 立即可以得出 . 证毕 .

定理 7.6.2　如果 $A(x,\partial)$ 是 $2m$ 阶的强椭圆算子，$B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 相应的双线性形式，A 是由三重结构 $(\mathbf{V},\mathbf{H},B)$ 所定义的形式算子，则 $-A$ 是 H 上的解析半群的无限小生成元 .

证　设$A_{\lambda_{o}} = A + \lambda_{o} I$，则由$B$的V－H强制性，有

$$((A_{\lambda_{o}} + \lambda I)u,u) \geqslant \lambda\|u\|_{\mathrm{H}}^{2}$$

由B的连续性，有

$$((A_{\lambda_{o}} + \lambda I)u,u) \leqslant \|(A_{\lambda_{o}} + \lambda I)u\|_{\mathrm{H}}\|u\|_{\mathrm{H}}$$

故 $$\lambda\|u\|_H \leqslant \|(A_{\lambda_o}+\lambda I)u\|_H$$

此即 $$\|\lambda R(\lambda;A_{\lambda_o})\| \leqslant 1 \tag{7.6.9}$$

另一方面，$\rho(A_{\lambda_o})$ 包括整个正实轴，所以

$$\rho(A)\supset \sum = \{\lambda:\ |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}+\delta\}\bigcup\{0\}$$

而由式 (7.6.9) 有

$$\|R(\lambda;A_{\lambda_o})\| \leqslant |\lambda|^{-1} \quad \forall\lambda\in\sum,\ \lambda\neq 0$$

则由定理 7.4.3(3) 知 $-A_{\lambda_o}$ 是解析半群的无限小生成元．

同时，由于一个解析半群的无限小生成元 A，加上一个线性有界算子 C 后，$A+C$ 仍是一个解析半群的无限小生成元．所以 $-A$ 也是 $\mathbf{H}$ 上的一个解析半群的无限小生成元．证毕．

定理 7.6.3 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 有界，且边界足够光滑，$f(x,t)\in\mathbf{H},\forall t\geqslant 0$，以及 $t\to\|f(\cdot,t)\|_H$ 是指标为 θ 的 Hoelder 连续的，即

$$\|f(\cdot,t)-f(\cdot,\tau)\|_H \leqslant M|t-\tau|^{\theta} \quad 0<\theta\leqslant 1$$

同时 $u_o\in\mathbf{H}$，则抛物型方程混合问题 (7.6.1) 有唯一解 $u\in\mathbf{C}^1((0,\infty);\mathbf{H}^{2m}(\Omega)\bigcap\mathbf{H}_o^m(\Omega))$.

这个定理是定理 7.6.1, 7.6.2 和定理 7.5.10 的直接结果．

§7.7 在某些非线性发展方程中的应用

半群方法不仅是讨论线性发展方程的有力工具，而且在研究非线性发展方程时，也是很有用处的．这里举几个例子，说明它在研究非线性发展方程方面的应用．

我们研究下面的半线性初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)),\ t>t_o\\ u(t_o)=u_o\end{cases} \tag{7.7.1}$$

这里 $-A$ 是 Hilbert 空间 H 中的一个 C^o 类半群无穷小生成元 $.f:[t_o,T]\times \mathbf{H}\to\mathbf{H}$ 关于 t 是连续的和关于 u 满足 Lipschitz 条件．

始值问题 (7.7.1) 不必有任何种类的解．但是如果它有一个经典解或强解（见定义 7.5.1）时，则在 § 7.5 开始时所给出的讨论表明这个解 u 必须满足积分方程

$$u(t)=S(t-t_o)u_o+\int_{t_o}^{t}S(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \tag{7.7.2}$$

从而有

定义 7.7.1　积分方程 (7.7.2) 的一个连续解 u 称为始值问题 (7.7.1) 的一个广义解．

我们首先给出重要的 Gronwall 引理，然后讨论问题 (7.71) 广义解的性质．

引理 7.7.1　设在 $(0,T)$ 上 m 是可积的，几乎处处为正的函数，$c\geqslant 0$ 是个常数，如果 $\varphi\in C([0,T])$ 且满足

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant c+\int_0^t m(s)\varphi(s)ds,\quad\forall t\in[0,T] \tag{7.7.3}$$

则 φ 是有界的，其界为

$$\varphi(t)\leqslant c\exp\left(\int_0^t m(s)ds\right),\quad\forall t\in[0,T] \tag{7.7.4}$$

证　首先设 $c>0$，则由式 (7.7.3) 有

$$0\leqslant m(t)\varphi(t)(c+\int_0^t m(s)\varphi(s)ds)^{-1}\leqslant m(t)\quad\forall t\in[0,T]$$

对上面这个不等式从零到 t 积分，有

$$\ln(c+\int_0^t m(s)\varphi(s)ds) \leqslant \int_0^t m(s)ds + \ln c$$

即
$$c+\int_0^t m(s)\varphi(s)ds \leqslant c\exp\left(\int_0^t m(s)ds\right)$$

则由式 (7.7.3) 可得式 (7.7.4).

又若 $c=0$，则只能从 ε 到 t 积分，则有

$$\ln\left(\int_0^t m(s)\varphi(s)ds\right) \leqslant \ln\left(\int_0^\varepsilon m(s)\varphi(s)ds\right) + \int_\varepsilon^t m(s)ds$$

即 $$\varphi(t) \leqslant \int_0^t m(s)\varphi(s)ds \leqslant \int_0^\varepsilon m(s)\varphi(s)ds \cdot \exp\left(\int_\varepsilon^t m(s)ds\right)$$

令 $\varepsilon \to 0$，则得 $\varphi=0$，故 (7.7.4) 依然成立．证毕．

定理 7.7.1 设 $f:[t_o,T]\times \mathbf{H}\to \mathbf{H}$ 在 $[t_o,T]$ 上对 t 连续，在 H 上是一致 Lipschitz 连续 (其常数为 L). 如果 $-A$ 是 H 上一个 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，则对每一个 $u_o \in \mathbf{H}$，始值问题 (7.7.1) 有唯一的广义解 $u\in \mathbf{C}([t_o,T];\mathbf{H})$. 而且映照 $u_o \to u$ 是从 H 到 $\mathbf{C}([t_o,T];\mathbf{H})$ 内 Lipschitz 连续的．

证 $\forall u_o \in \mathbf{H}$ 定义

$$F:\quad \mathbf{C}([t_o,T];\mathbf{H}) \to \mathbf{C}([t_o,T];\mathbf{H})$$

为

$$(Fu)(t) = S(t-t_o)u_o + \int_{t_o}^t S(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

$$\forall t_o \leqslant t \leqslant T \tag{7.7.5}$$

若记 $\|u\|_\infty = \|u\|_{C([t_o,T];\mathbf{H})}$，由 (7.7.5) 式有

$$\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\| \leqslant ML(t-t_o)\|u-v\|_\infty \tag{7.7.6}$$

这里 M 是 $\|S(t)\|$ 在 $[t_o,T]$ 上的界．利用式 (7.7.5) 和 (7.7.4)，并对 n 用归纳法易得

$$\|(F^n u)(t)-(F^n v)(t)\| \leqslant (n!)^{-1}(ML(t-t_o))^n \|u-v\|_\infty$$

因此

$$\|F^n u - F^n v\| \leqslant (n!)^{-1}(MLT)^n \|u-v\|_\infty \tag{7.7.7}$$

对充分大的 n，有 $(MLT)^n(n!)^{-1}<1$，由压缩映象原理的一个熟知的推论，F 在 $\mathbf{C}([t_o,T],\mathrm{H})$ 中有唯一的不动点，这个不动点正是积分方程 (7.7.2) 的解．

u 的唯一性和映象 $u_o \to u$ 的 Lipschitz 连续性可由下面的讨论得出．设 v 是式 (7.7.1) 在 $[t_o,T]$ 上具有始值 v_o 的一个广义解．则

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leqslant \|S(t-t_o)u_o - S(t-t_o)v_o\| \\ &\quad + \int_{t_o}^{t} \|S(t-\tau)(f(\tau,u(\tau))-f(\tau,v(\tau)))\| d\tau \\ &\leqslant M\|u_o - v_o\| + ML\int_{t_o}^{t}\|u(\tau)-v(\tau)\| d\tau\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式 (引理 7.7.1) 知

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant M\exp(ML(T-t_o))\|u_o - v_o\|$$

从而 $\qquad \|u-v\|_\infty \leqslant M\exp(ML(T-t_o))\|u_o-v_o\|$

由此得 u 的唯一性和映象 $u_o \to u$ 的 Lipschitz 连续性．证毕．

不难看出，如果 $g\in \mathbf{C}([t_o,T];\mathrm{H})$ 和在定理 7.7.1 中我们定义 F 为

$$(Fu)(t) = g(t) + \int_{t_o}^{t} S(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

则可得到更为一般的结果：

推论 7.7.1 如果 A 和 f 满足定理 7.7.1 的条件，则 $\forall g \in C([t_o,T];H)$ 积分方程

$$\omega(t)=g(t)+\int_{t_o}^{t} S(t-\tau)f(\tau,\omega(\tau))d\tau \tag{7.7.8}$$

有唯一的解 $\omega \in C([t_o,T],H)$.

在定理 7.7.1 中函数 f 的一致 Lipschitz 条件保证了问题 (7.7.1) 广义解在整个 $[t_o,T]$ 上存在．如果我们只假设对于 u, f 满足局部的 Lipschitz 条件，且它对有界区间上的 t 是一致的，即对每一个 $t'\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, 存在一个常数 $L(c,t')$, 使得

$$\|f(t,u)-f(t,v)\| \leqslant L(c,t')\|u-v\| \tag{7.7.9}$$

对所有的 u、$v\in H$, $\|u\|\leqslant c$, $\|v\|\leqslant c$ 以及 $t\in[0,t']$ 成立．则可得定理 7.7.1 的局部表示为

定理 7.7.2 设 $f:[0,\infty)\times H\to H$, 对于 $t\geqslant 0$ 连续和对于 u 局部 Lipschitz 连续，而且此连续性关于有界区间上的 t 是一致的．如果 $-A$ 是 H 上一个 C^o 类半群的无限小生成元，则 $\forall u_o \in H$, 存在 $t_{max}\leqslant\infty$, 使得

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)) & t\geqslant 0\\ u(0)=u_o\end{cases} \tag{7.7.10}$$

在 $[0,t_{max})$ 上有唯一的广义解．而且如果 $t_{max}<+\infty$, 则

$$\lim_{t\to t_{max}}\|u(t)\|=\infty.$$

证 首先证明，$\forall t_o\geqslant 0$, $\forall u_o\in H$, 在本定理的条件下，在 $[t_o,t_1]$ 上，始值问题 (7.7.1) 有唯一的广义解．而区间 $[t_o,t_1]$ 长度的下界为

$$\delta(t_o,\|u_o\|)=\min\{1,\|u_o\|(k(t_o)L(k(t_o),t_o+1)+N(t_o))^{-1}\}\quad(7.7.11)$$

这里 $L(c,t)$ 是式 (7.7.9) 式中所定义的 f 的局部 Lipschitz 常数，$M(t_o)=\max\{\|S(t)\|:\ 0\leqslant t\leqslant t_o+1\}$，$k(t_o)=2\|u_o\|M(t_o)$ 和 $N(t_o)=\max\{\|f(t,0)\|:\ 0\leqslant t\leqslant t_o+1\}$. 事实上，设 $t_1=t_o+\sigma(t_o,\|u_o\|)$，其中 $\sigma(t_o,\|u_o\|)$ 是由式 (7.7.11) 给出的 . 由式 (7.7.5) 所定义的映照 F 把 $\mathbf{C}([t_o,t_1];\mathrm{H})$ 中球心为零，半径为 $K(t_o)$ 的球映到它自身 . 这是由下面的估计得到的：

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t)\| &\leqslant M(t_o)\|u_o\| \\
&\quad+\int_{t_o}^{t}\|S(t-\tau)\|(\|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,0)\|+\|f(\tau,0)\|)ds \\
&\leqslant M(t_o)\|u_o\|+M(t_o)K(t_o)L(K(t_o),t_o+1)(t-t_o) \\
&\quad+M(t_o)N(t_o)(t-t_o) \\
&\leqslant M(t_o)\{\|u_o\|+K(t_o)L(K(t_o),\ t_o+1)(t-t_o) \\
&\quad+N(t_o)(t-t_o)\} \\
&\leqslant 2M(t_o)\|u_o\|=K(t_o)
\end{aligned}$$

其中由 t_1 的定义得最后一个不等式 . 在这个球里，F 满足系数为 $L=L(K(t_o),t_o+1)$ 的一致 Lipschitz 条件，从而和定理 7.7.1 中的证明一样，在这个球里 F 具有唯一的不动点 u，它就是区间 $[t_o,t_1]$ 上，始值问题 (7.7.1) 所要求的解 .

从上面的证明可知，如果 u 是始值问题 (7.7.10) 在区间 $[0,\tau]$ 上的广义解，它就可以延拓到 $[0,\tau+\delta](\delta>0)$ 上 . 在 $[\tau,\tau+\delta]$ 上，$u(t)=w(t)$. 而 $w(t)$ 是下述积分方程的解，即

$$w(t)=S(t-\tau)u(\tau)+\int_{\tau}^{t}S(t-r)f(r,w(r))dr$$

$$\tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta \tag{7.7.12}$$

而且 δ 只与 $\|u(\tau)\|$, $K(\tau)$ 和 $N(\tau)$ 有关．

设 $[0,t_{max}]$ 是 (7.7.10) 的广义解 u 存在的最大区间．如果 $t_{max} < \infty$，则 $\lim\limits_{t \to t_{max}} \|u(t)\| = \infty$. 因为，若不然，则存在序列 $t_n \to t_{max}$，使得对所有 n, 有 $\|u(t_n)\| \leqslant c$. 和上面刚刚讨论过的延拓一样，对每一个与 t_{max} 充分近的 t_n，在 $[0,,t_n]$ 上所定义的解 u 可以延拓到在 $[0,t_n+\delta]$ 上，其中 $\delta > 0$ 与 t_n 无关．从而 u 可以延拓到 t_{max} 以外，这与 t_{max} 的定义矛盾．

为了证明式 (7.7.10) 的局部广义解 u 的唯一性，只需注意，如果 v 也是式 (7.7.10) 的广义解，则根据定理 7.7.1 证明中所给出的唯一性的讨论，可以证明在 u 和 v 都存在的每一个闭区间 $[0,t_o]$ 上 ,$u=v$. 从而 u 和 v 都存在相同的 t_{max} 以及在 $[0,t_{max}]$ 上，$u \equiv v$. 证毕．

众所周知，通常如果 f 只满足定理 7.7.1 或定理 7.7.2 的条件，始值问题 (7.7.1) 的广义解不一定是式 (7.7.1) 的经典解或强解．下面给出一个使 (7.7.1) 的广义解成为经典解的充分条件．

定理 7.7.3 设 $-A$ 是 $\mathbf{H}$ 上 C^0 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元，如果 $f:[t_o,T]\times\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ 是由 $[t_o,T]\times\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{H}$ 的连续可微的，则 $\forall u_o \in D(A)$, 始值问题 (7.7.1) 的广义解是它的经典解．

证 首先要注意 f 由 $[t_o,T]\times\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{H}$ 的连续可微，蕴涵着对于 t,f 是连续的；对于 u, 它是 Lipschitz 连续的，而且对于 $t\in[t_o,T]$ 是一致的．从而由定理 7.7.1 知始值问题 (7.7.1) 在 $[t_o,T]$ 上具有唯一的广义解 u. 其次，我们证明在 $[t_o,T]$ 上，这个广义解是连续可微的．为此，记 $B(r)=(\partial/\partial u)f(r,u)$ 以及

$$g(t) = S(t - t_o)f(t_o, u(t_o)) - AS(t - t_o)u_o$$
$$+ \int_{t_o}^{t} S(t - r)\frac{\partial}{\partial r} f(r, u(r))dr \tag{7.7.13}$$

由假设知 $g \in \mathbf{C}([t_o, T]; \mathbf{H})$ 以及 $h(t,u) = B(t)u$ 对 t 由 $[t_o, T]$ 到 $\mathbf{H}$ 是连续的，并且因为 $r \to B(r)$ 由 $[t_o, T]$ 到 $B(\mathbf{H})$ 是连续的，$h(t,u)$ 对 u 是一致 Lipschitz 连续的．设 w 是下面积分方程的解

$$w(t) = g(t) + \int_{t_o}^{t} S(t - r)B(r)w(r)dr \tag{7.7.14}$$

由推论 7.7.1 可得 $w \in \mathbf{C}([t_o, T]; \mathbf{H})$ 的存在性和唯一性．而且由假设知

$$f(r, u(r + h)) - f(r, u(r))$$
$$= B(r)(u(r + h) - u(r)) + w_1(r, h) \tag{7.7.15}$$

以及

$$f(r + h, u(r + h)) - f(r, u(r + h))$$
$$= (\partial / \partial r)f(r, u(r + h))h + w_2(r, h) \tag{7.7.16}$$

其中 $h^{-1}\|w_i(r,h)\| \to 0$，当 $h \to 0$ 时，在 $[t_o, T]$ 上一致成立 $(i = 1,2)$. 如果 $w_h(t) = h^{-1}(u(t + h) - u(t)) - w(t)$，则由 u 定义以及由式 (7.7.14)，(7.7.15)，(7.7.16) 有

$$w_h(t) = [h^{-1}(S(t + h - t_o)u_o - S(t - t_o)u_o) + AS(t - t_o)u_o]$$
$$+ h^{-1}\int_{t_o}^{t} S(t - r)(w_1(r, h) + w_2(r, h))dr$$
$$+ \int_{t_o}^{t} S(t - r)\left(\frac{\partial}{\partial r} f(r, u(r + h)) - \frac{\partial}{\partial r} f(r, u(r))\right)dr$$

$$+h^{-1}[\int_{t_o}^{t_o+h} S(t+h-r)f(r,u(r))dr$$

$$-S(t-t_o)f(t_o,u(t_o))]+\int_{t_o}^{t} S(t-r)B(r)w_h(r)dr \tag{7.7.17}$$

不难看出式 (7.7.17) 右端前四项中每一项的范数当 $h\to 0$ 时都趋于零．从而有

$$\|w_h(t)\|\leqslant \varepsilon(h)+M\int_{t_o}^{t}\|w_h(r)\|dr \tag{7.7.18}$$

这里 $M=\max\{\|S(t-r)\|\|B(r)\|:t_o-r\leqslant T\}$ 以及 $h\to 0$ 时，$\varepsilon(h)\to 0$. 由式 (7.7.18)，利用引理 7.7.1，有 $\|w_h(t)\|\leqslant \varepsilon(h)\exp((T-t_o)M)$，从而 $h\to 0$ 时，$\|w_h(t)\|\to 0$. 这就是说，在 $[t_o,T]$ 上 $u(t)$ 是可微的而且它的导数是 $w(t)$. 因为 $w\in \mathbf{C}([t_o,T];\mathrm{H})$，$u$ 在 $[t_o,T]$ 上是连续可微的．

最后，还要证明 u 是式 (7.7.1) 的经典解．由 u 的连续可微性以及 f 的可微性假设知在 $[t_o,T]$ 上 $r\to f(r,u(r))$ 是连续可微的．由定理 7.5.6 有

$$v(t)=S(t-t_o)u_o+\int_{t_o}^{t} S(t-r)f(r,u(r))dr \tag{7.7.19}$$

是始值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}+Av(t)=f(r,u(t))\\ v(t_o)=u_o\end{cases} \tag{7.7.20}$$

的经典解．但是由定义，u 是式 (7.7.20) 的广义解，而且由式 (7.7.20) 广义解的唯一性得在 $[t_o,T]$ 上，$u=v$. 从而 u 是始值问题 (7.7.1) 的经典解．证毕．

下面给出 $u_o\in D(A)$ 时始值问题 (7.7.1) 的广义解成为强解的充分条件.

定理 7.7.4 设 $-A$ 是 $\mathbf{H}$ 上 C^o 类半群 $S(t)$ 的无限小生成元. 如果 f: $[t_o,T]\times\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ 对两个变量是 Lipschitz 连续的:

$$\|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\|\leqslant c(|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|)$$

$$x_1,\ x_2\in\mathrm{H},\quad t_1,\ t_2\in[t_o,T]\tag{7.7.21}$$

$u_o\in D(A)$ 以及 u 是始值问题 (7.7.1) 的广义解, 则 u 是这个始值问题的强解.

证 设 $\|S(t)\|\leqslant M$, $\|f(t,u(t))\|\leqslant N\quad\forall t_o\leqslant t\leqslant T.\forall 0<h<t-t_o$, 有

$$u(t+h)-u(t)=S(t+h-t_o)u_o-S(t-t_o)u_o$$

$$+\int_{t_o}^{t_o+h}S(t+h-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

$$+\int_{t_o}^{t}S(t-\tau)[f(\tau+h,u(\tau+h))-f(\tau,u(\tau))]d\tau$$

从而

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant hM\|Au_o\|+hMN$$

$$+Mc\int_{t_o}^{t}(h+\|u(\tau+h)-u(\tau)\|)d\tau$$

$$\leqslant c_1h+Mc\int_{t_o}^{t}\|u(\tau+h)-u(\tau)\|d\tau$$

由引理7.1.1得

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant c_1h\exp(TMc)\tag{7.7.22}$$

即 u 是 Lipschitz 连续的.

由 u 的 Lipschitz 连续和 f的 Lipschitz 连续知 $t\to f(t,u(t))$

在 $[t_o,T]$ 上是 Lipschitz 连续的．由定理 7.5.8 知始值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = f(t,u(t)) \\ v(t_o) = u_o \end{cases} \tag{7.7.23}$$

在 $[t_o,T]$ 上有唯一的强解 v 且满足

$$v(t) = S(t-t_o)u_o + \int_{t_o}^{t} S(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau = u(t)$$

从而 u 是式 (7.7.1) 的强解．证毕．

§7.8　一阶线性发展方程的Galerkin方法

本节中将讨论和数值分析有密切关系的 Galerkin 方法．设 V, H 为两个 Hilbert 空间，其中 H 为主元空间，它们满足 $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'$，这里嵌入是稠密的．$((\cdot,\cdot))$, $(\cdot,\cdot)$ 分别记为 V, H 的内积，而 $\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|$ 分别记为相应的范数．

考察一阶线性发展方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

这里 A 是 $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ 线性连续算子，对应的双线性形式为

$$a(u,v) = \langle Au,v \rangle \qquad \forall u,v \in \mathbf{V}$$

A 是 V 椭圆的．即存在 $\alpha > 0$，使得 $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2$, $\forall u \in \mathbf{V}$. 所以 A 是 $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ 的同构，也是从 $D(A) = \{u \in \mathbf{V}: Au \in \mathbf{H}\}$ 到 H 上的线性连续算子．

设 $t > 0, u_o \in \mathbf{H}; f$ 是 $[0,T] \to \mathbf{H}$ 的抽象函数，$f \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$. 现在求函数 $u:[0,T] \to \mathbf{V}$，它满足始值问题

$$\frac{du}{dt} + Au = f \qquad 在[0,T]上 \tag{7.8.1}$$

$$u(0)=u_o \tag{7.8.2}$$

根据引理 4.3.3，上述方程是有意义的．因为 $A\in\pounds(\mathbf{V},\mathbf{V}')$. 若 $f\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$，$u\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$，则式 (7.8.1) 指出，在分布意义下 $u'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$. 由引理 4.3.3 知，$u$ 几乎处处等于一个从 $[0,T]$ 到 $\mathbf{V}'$ 的连续函数，所以式 (7.8.1) 有意义．

我们用 Galerkin 方法，证明下述存在唯一性定理，这种构造性证明，在数值分析中至关重要．

由于 $\mathbf{V}$ 是可分的．那么在 $\mathbf{V}$ 中存在完全正交系 $\{w_i\}$，$i=1,2,\cdots$. 尤其是，如果 A 是对称正定的，那么在 $\mathbf{H}$ 中存在本征函数系 $\{w_i\}$，满足

$$Aw_i=\lambda_i w_i \qquad i=1,2,\cdots \tag{7.8.3}$$

$\{w_i\}$ 构成 $\mathbf{H}$ 的正交完备系．对任何正整数 $m>0$，我们寻求始值问题 (7.8.1), (7.8.2) 下列形式的逼近解：

$$u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}g_{mi}(t)w_i \tag{7.8.4}$$

其中 u_m: $[0,T]\to W_m$，这里 W_m 是由 $w_1,\cdots,w_m$ 张成的空间．u_m 满足式 (7.8.1),(7.8.2) 的 Galerkin 方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(u_m,v)+a(u_m,v)=(f,v) & \forall v\in W_m\\ u_m(0)=P_m u_o=u_{om}\end{cases} \tag{7.8.5}$$

其中 P_m 是 $\mathbf{H}\to W_m$ 的正交投影，式 (7.8.5), (7.8.6) 等价于下列常微分方程组（取 $v=w_i$，$i=1,2,\cdots,m$）

$$\sum_{j=1}^{m}(w_j,w_i)g'_{mj}(t)+\sum_{j=1}^{m}a(w_j,w_i)g_{mj}(t)=\langle f,w_i\rangle \tag{7.8.6}$$

由于矩阵 (w_j,w_i) 满秩，令 (β_{ij}) 为它的逆矩阵，那么上式可以

归结为

$$g'_{mj}+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}g_{mj}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\langle f,w_i\rangle \quad i=1,2,\cdots,m \tag{7.8.7}$$

$$g_{mj}(0)=\gamma_{mj},\ (u_{om}=\sum_{j=1}^{m}\gamma_{mj}w_j) \tag{7.8.8}$$

由常数微分方程经典理论可知(7.8.7), (7.8.8)存在唯一解，并且由于 $t\to\langle f,w_i\rangle$ 是平方可积的，所以 g_{mi} 也是平方可积的，从而对每个 m，有

$$u_m\in L^2(0,T;V)\cap C([0,T],H),\ u'_m\in L^2(0,T;V') \tag{7.8.9}$$

于是，有下列解的存在唯一性定理和 Galerkin 逼近解收敛性定理：

定理 7.8.1 设 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V\to R$ 的 V 强制的连续双线性形式，$A\in £(V,V')$ 为相应的形式算子．

设 $$u_o\in H,\ f\in L^2(0,T;V') \tag{7.8.10}$$

那么始值问题(7.8.1), (7.8.2)存在唯一解u，即

$$u\in L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H) \tag{7.8.11}$$

$$u'\in L^2(0,T;V') \tag{7.8.12}$$

而(7.8.5), (7.8.6)的 Galerkin 逼近解 u_m 在下列意义下收敛于 u:

$$\begin{cases} u_m\to u, & \text{在}L^2(0,T,V)\text{和}L^p(0,T,H)\text{中强收敛}(1\leqslant p<\infty) \\ u_m\to u, & \text{在}L^\infty(0,T,H)\text{弱星收敛}\end{cases} \tag{7.8.13}$$

证 首先对 u_m 进行估计．为此在式(7.8.6)中，两端同乘以 g_{mi}，相加得．

$$(u'_m,u_m)+a(u_m,u_m)=\langle f,u_m\rangle \tag{7.8.14}$$

利用 $a(\cdot,\cdot)$ 的强制性，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\alpha\|u_m\|^2\leqslant\|f\|_{V'}\|u_m\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u_m\|^2+\frac{1}{2\alpha}\|f\|_{V'}^2$$

$$\frac{d}{dt}|u_m|^2+\alpha\|u_m\|^2\leqslant\frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}^2 \tag{7.8.15}$$

两边积分以后，得

$$|u_m(s)|^2\leqslant|u_m(0)|^2+\frac{1}{\alpha}\int_0^s\|f\|_{V'}^2dt$$

$$\leqslant|u_o|^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(0,T;\ V')}^2$$

即 $$\sup_{s\in[0,T]}|u_m(s)|^2\leqslant|u_o|^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(0,T;\ V')}^2 \tag{7.8.16}$$

上式右边与m无关，所以

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;\ H)}\ \text{一致有界} \tag{7.8.17}$$

另一方面，同样可以得

$$|u_m(T)|^2+\alpha\|u_m\|_{L^2(0,T;\ V)}^2\leqslant|u_o|^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(0,T;\ V')}^2$$

从而有

$$\alpha\|u_m\|_{L^2(0,T;\ V)}^2\leqslant|u_o|^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(0,T;\ V')}^2 \tag{7.8.18}$$

即 $$\|u_m\|_{L^2(0,T;\ V)}\text{一致有界} \tag{7.8.19}$$

由式(7.8.5)有

$$\|u_m'\|_{V'}=\sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}}\langle u_m',v\rangle/\|v\|\leqslant M\|u_m\|_V+\|f\|_{V'}$$

从而 $\|u_m'\|_{L^2(0,T;\ V')}\leqslant c(\|u_m\|_{L^2(0,T;\ V)}+\|f\|_{L^2(0,T;\ V')})$

或 $$\|u_m'\|_{L^2(0,T;\ V')}\leqslant c(|u_o|+\|f\|_{L^2(0,T;\ V')}) \tag{7.8.20}$$

应当说明，不同地方出现的常数 c 表示不同的意义．从而

$$\|u_m'\|_{L^2(0,T;\ V')}\text{一致有界} \tag{7.8.21}$$

其次进行极限过渡．式 (7.8.15), (7.8.19) 和 (7.8.21) 保证存在一个子序列（仍记为 u_m）和 $u\in \mathbf{V}$, $u^*\in \mathbf{H}$, 使得

$$u_m \to u, \quad \text{在} \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \text{中弱收敛} \tag{7.8.22}$$

$$u_m \to u^*, \quad \text{在} \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \text{中弱星收敛} \tag{7.8.23}$$

$$u_m' \to \frac{du}{dt}, \quad \text{在} \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}') \text{中弱收敛} \tag{7.8.24}$$

此即

$$\int_0^T \langle u_m(t)-u(t),\ v(t)\rangle dt \to 0 \quad \forall v\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}') \tag{7.8.25}$$

$$\int_0^T (u_m(t)-u^*(t),\ v)dt \to 0 \quad \forall v\in \mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{H}) \tag{7.8.26}$$

由式(7.8.22)还可推出

$$\int_0^T (u_m(t)-u(t),\ v(t))dt \to 0 \quad \forall v\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$$

故

$$\int_0^T (u^*-u, v(t))dt \to 0 \quad \forall v\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}) \tag{7.8.27}$$

也就是

$$u=u^*\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \tag{7.8.28}$$

现在证明 u 满足式 (7.8.1), (7.8.2). 为此，取 $[0,T]$ 上连续可微函数 ψ, 使得

$$\psi(T)=0 \tag{7.8.29}$$

在式 (7.8.14) 两边同乘 ψ 并对 t 积分，利用

$$\int_0^T (u_m'(t),\psi w_i)dt = -\int_0^T (u_m,\psi' w_i)dt-(u_m(0),w_i)\psi(0)$$

得

$$-\int_0^T (u_m,\psi' w_i)dt + \int_0^T a(u_m,\psi w_i)dt$$

$$=(u_{om},w_i)\psi|_{to} + \int_o^T \langle f,w_i\rangle \psi dt$$

令 $m\to+\infty$，注意$|u_{om}-u_o|\to 0$（当 $m\to\infty$ 时），得

$$-\int_0^T (u,\psi' w_i)dt + \int_0^T a(u,\psi w_i)dt$$

$$=(u_o,w_i)\psi(0) + \int_0^T \langle f,w_i\rangle \psi dt \qquad (7.8.30)$$

取 $v_m\in W_m$，由式(7.8.30)的线性组合，得

$$-\int_0^T (u,\psi' v_m)dt + \int_0^T a(u,\psi v_m)dt$$

$$=(u_o,v_m)\psi(0) + \int_0^T \langle f,v_m\rangle \psi dt$$

令 $m\to\infty, v_m\to v$（在 V 内），则 $\forall v\in \mathrm{V}$ 有

$$-\int_0^T (u,\psi' v)dt + \int_0^T a(u,\psi v)dt$$

$$=(u_o,v)\psi(0) + \int_0^T \langle f,v\rangle \psi dt \qquad (7.8.31)$$

取 $\psi=\varphi\in \mathrm{D}([0,T])$，那么在分布意义下有

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) = \langle f,v\rangle \qquad \forall v\in \mathrm{V} \qquad (7.8.32)$$

从这里也可以推出 $u'\in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{V}')$，并且成立

$$u' + Au = f \qquad (7.8.33)$$

对式(7.8.32)两边乘 ψ，并从 0 到 T 积分，再分部积分，则有

$$-\int_0^T (u,v)\psi' dt + \int_0^T a(u,v)\psi\, dt$$

$$= (u(0),v)\psi(0) + \int_0^T \langle f,v\rangle \psi\, dt \quad \forall v \in \mathbf{V} \tag{7.8.34}$$

比较式 (7.8.4) 和 (7.8.31),

$$(u_o - u(0),v)\psi(0) = 0 \qquad \forall v \in \mathbf{V}$$

选取 ψ, 使得 $\psi(0) \neq 0$, 则 $u_o = u(0)$.

我们还须证明 u 的连续性和唯一性，为此引用 Lions - Magenes 插值定理 (参看 [19]).

引理 7.8.1 设 $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{V}'$ 是三个 Hilbert 空间，$\mathbf{V}'$ 是 $\mathbf{V}$ 的对偶空间 . 如果 $u \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $u' \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$, 那么 u 几乎处处等于一个从 $[0,T] \to \mathbf{H}$ 的连续函数，即 $u \in \mathbf{C}([0,T];\mathbf{H})$, 并且在分布意义下，有

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u',u\rangle \tag{7.8.35}$$

这个引理和式 (7.8.22), (7.8.24) 推出 $u \in \mathbf{C}([0,T];\mathbf{H})$. 为了证明唯一性，设 u_1, u_2 为式 (7.8.1), (7.8.2) 的两个解，令 $w = u_1 - u_2$, 则

$$w' + Aw = 0, \quad w(0) = 0$$

两边对 w 作 $\mathbf{H}$ 的内积，利用式 (7.8.35), 有

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + 2\|w\|^2 = 0$$

$$|w(t)|^2 \leqslant |w(0)|^2 = 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$

因而 $u_1 = u_2$, $\forall t \in [0,T]$. 唯一性得证 .

下面证明强收敛结果 . 为此令

$$d_m = \frac{1}{2}\left|u_m(T) - u(T)\right|^2 + \int_0^T a(u_m - u, u_m - u)dt \quad (7.8.36)$$

在 $[0,T]$ 上积分式 (7.8.14) 得

$$\frac{1}{2}\left|u_m(T)\right|^2 + \int_0^T a(u_m, u_m)dt = \frac{1}{2}\left|u_m(0)\right|^2 + \int_0^T \langle f, u_m \rangle dt$$

所以，d_m 可以改写为

$$d_m = -(u_m(T), u(T)) + \frac{1}{2}\left|u(T)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_m(0)\right|^2$$

$$+ \int_0^T [a(u,u) - a(u_m, u) - a(u, u_m) + \langle f, u_m \rangle]dt$$

应用式 (7.8.22),(7.8.23) 得

$$\lim_{m\to\infty} d_m = -\frac{1}{2}\left|u(T)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_o\right|^2 + \int_0^T (a(u,u) + \langle f, u \rangle)dt$$

然而在 (7.8.32) 中令 $v = u$，并且在 $[0,T]$ 上积分后，可得 $\lim_{m\to\infty} d_m = 0$，利用$a(\cdot,\cdot)$的强制性，有

$$\frac{1}{2}\left|u_m(T) - u(T)\right|^2 \leqslant d_m$$

$$\alpha\|u_m - u\|^2_{L^2(0,T;\ V)} \leqslant d_m$$

所以
$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{L^2(0,T;\ V)} = 0$$

即
$$\begin{cases} \text{在}L^2(0,T,V)\text{中，}u_m\text{强收敛于}u \\ \text{在}L^\infty(0,T,H)\text{中，}u_m\text{强收敛于}u \end{cases} \quad (7.8.37)$$

联合式 (7.8.37) 和 (7.8.17)，由 Lebesque 控制收敛定理，有在 $L^p(0,T;H)(1 \leqslant p < \infty)$ 中 u_m 强收敛于 u. 证毕.

现在我们来改善定解条件，提高解的光滑性. 为此注意 A 也是 $D(A)$ 到 H 上的线性连续算子，并且

$$a(u,v)=(Au,v) \quad \forall u,v\in D(A)$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 强制性可知，$a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2 \quad \forall u\in D(A)$，因此在 $D(A)$ 上可以定义范数

$$\|u\|_A^2=a(u,u)=(Au,u).$$

定理 7.8.2 设定理 7.8.1 的假设成立，并且

$$f,f'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}),\ u_o\in D(A) \tag{7.8.38}$$

那么式 (7.8.1), (7.8.2) 的解满足

$$u\in\mathbf{C}([0,T],D(A)) \tag{7.8.39}$$

$$u'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{C}([0,T],\mathbf{H}) \tag{7.8.40}$$

$$u''\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}') \tag{7.8.41}$$

而式 (7.8.5) 和 (7.8.6) 的 Galerkin 逼近解 u_m 在下列意义下收敛于 u: 在 $\mathbf{L}^2(0,T;D(A))$ 和 $\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{V})$ 中，$u_m\to u$ (7.8.42)

$$在\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})中,\ u_m\to u(弱星收敛) \tag{7.8.43}$$

证 设 $v=u'$，微分 (7.8.1) 后，则得

$$v'+Av=f' \tag{7.8.44}$$

$$v(0)=u'(0)=f(0)-Au_o \tag{7.8.45}$$

由于式 (7.8.38) 和引理 4.3.3，则 $f\in\mathbf{C}([0,T],H)$，$f(0)$ 有意义．由式 (7.8.38) 和 (7.8.45) 知 $v(0)\in\mathbf{H}$. 所以式 (7.8.44), (7.8.45) 可以运用定理 7.8.1 得 $u'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H})$，$u''\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$，此即式 (7.8.40), (7.8.41). 另一方面 $Au=f-u'$，由于 $f-u'\in\mathbf{C}([0,T],\mathbf{H})$ 以及 A 是 $D(A)$ 到 H 的同构，可知 $u\in\mathbf{C}([0,T],\mathbf{H})$，此即式 (7.8.39).

现在讨论 Galerkin 逼近解 u_m 的估计．为此，在式 (7.8.5) 中取 $v=Au_m$，注意 $(Au_m,u_m)=\|u_m\|^2$，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m^2\| + a(u_m, Au_m) = \langle f, Au_m \rangle \tag{7.8.46}$$

或
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + |Au_m|^2 = \langle f, Au_m \rangle$$

但
$$\langle f, Au_m \rangle \leqslant |f||Au_m| \leqslant \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|Au_m|^2$$

故有
$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + |Au_m| \leqslant |f|^2 \tag{7.8.47}$$

在 $[0,T]$ 上积分后，得

$$\|u_m(T)\|^2 + \int_0^T |Au_m|^2 dt \leqslant \|u_m(0)\|^2 + \int_0^T |f|^2 dt$$
$$\leqslant \|u_o\|^2 + \int_0^T |f|^2 dt$$

所以

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;\ D(A))} \quad 一致有界 \tag{7.8.48}$$
$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;\ V)} \quad 一致有界 \tag{7.8.49}$$
$$\left\|\frac{du_m}{dt}\right\|_{L^2(0,T;\ H)} \quad 一致有界 \tag{7.8.50}$$

因而存在子序列，仍记为 u_m 使得

$$在L^2(0,T;D(A))中,\quad u_m \to u(弱收敛) \tag{7.8.51}$$
$$在L^\infty(0,T;V)中,\quad u_m \to u(弱星收敛) \tag{7.8.52}$$
$$在L^2(0,T;H)中,\quad \frac{du_m}{dt} \to \frac{du}{dt}(弱收敛) \tag{7.8.53}$$

设

$$d_m = \frac{\|u_m(T) - u(T)\|^2}{2} + \int_0^T a(u_m - u, Au_m - Au)dt$$

$$= \frac{\|u_m(T) - u(T)\|^2}{2} + \int_0^T |Au_m - Au|^2 dt \tag{7.8.54}$$

积分式(7.8.46)得

$$\frac{\|u_m(T)\|^2}{2} + \int_0^T |Au_m|^2 dt$$

$$= \int_0^T \langle f, Au_m \rangle dt + \frac{\|u_m(0)\|^2}{2} \tag{7.8.55}$$

代入式(7.8.54)，有

$$d_m = -((u_m(T), u(T)) + \|u(T)\|^2 / 2 + \|u_{mo}\|^2 / 2$$
$$+ \int_0^T (a(u, Au) - a(u_m, Au) - a(u, Au_m))dt$$
$$+ \int_0^T \langle f, Au_m \rangle dt \tag{7.8.56}$$

利用式 (7.8.51)，(7.8.52)，对式 (7.8.56) 进行极限过渡，得

$$\lim_{m \to \infty} d_m = \frac{-\|u(T)\|^2}{2} + \frac{\|u_o\|^2}{2} - \int_0^T a(u, Au)dt$$
$$+ \int_0^T \langle f, Au \rangle dt$$

利用式 (7.8.1) 可知 $\lim_{m \to \infty} d_m = 0$.

但是 $\|u_m - u\|^2_{L^2(0,T;\ D(A))} \leqslant d_m$，$\|u_n(T) - u(T)\|^2 / 2 \leqslant d_m$，所以 $\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{L^2(0,T;\ D(A))} = 0$，并且 u_m 在 V 中强收敛于 u. 利用式 (7.8.49) 和 Lebesque 控制收敛定理可知，在 $L^p(0,T;V)$ 中 u_m 强收敛于 u，所以式 (7.8.42) 成立. 证毕.

定理 7.8.3 设定理 7.8.1) 假设成立，并且

(1) $a(u,u)$是对称的. $\forall u,v\in\mathbf{V}$ (7.8.57)

(2) $\mathbf{V}\subset\mathbf{H}$的嵌入是紧的 (7.8.58)

(3) $u_o\in\mathbf{V}$, $f\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ (7.8.59)

那么(7.8.1)和(7.8.2)的解满足

$$u\in\mathbf{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{D}(\mathbf{A}))\cap\mathbf{C}([0,T];\mathbf{V}) \tag{7.8.60}$$

$$u'\in\mathbf{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}) \tag{7.8.61}$$

如果 u_m 是相应的 Galerkin 逼近解，那么还有下式成立

$$\begin{cases}\|u-u_m\|_{L^2(0,T;\ V)}\leqslant c\lambda_{m+1}^{-1/2}(\|u_o\|+\|f\|_{L^2(0,T;\ H)})\\ \|u-u_m\|_{L^2(0,T;\ H)}\leqslant c\lambda_{m+1}^{-1}(\|u_o\|+\|f\|_{L^2(0,T;\ H)})\end{cases} \tag{7.8.62}$$

共中 $\{\lambda_i\}$ 为 A 的特征值

证 由(1), (2)可知，A^{-1} 是线性紧算子，并且本征函数系 $\{w_i\}(i=1,2,\cdots)$ 是 H 的正交完备系．由于

$$Aw_i=\lambda_i w_i,\quad i=1,2,\cdots \tag{7.8.63}$$

且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m+1}\leqslant\cdots,\lambda_m\to\infty$, 当 $m\to\infty$ 时．又

$$((u'_m,w_i))=(u'_m,\lambda_i w_i) \tag{7.8.64}$$

$$a(u_m,\lambda_i w_i)=(Au_m,\lambda_i w_i)=(Au_m,Aw_i) \tag{7.8.65}$$

$$(f,\lambda_i w_i)=(f_m,Aw_i) \tag{7.8.66}$$

若 Galerkin 逼近解 $u_m=\sum_{j=1}^{m}g_{mj}w_j$, 则 $Au_m=\sum_{j=1}^{m}g_{mj}\lambda_j w_j$.

利用式(7.8.46), 同样可以得到式(7.8.48)以及收敛性结果(7.8.51)—(7.8.53). 所以式(7.8.1), (7.8.2)的解满足式(7.8.60)和(7.8.61)．现在还须证明 $u\in\mathbf{C}([0,T];\mathbf{V})$．为此要用到下述引理(参看[24]).

引理 7.8.2 设 X,Y 为两个 Banach 空间，$X\subset Y$ 是连续内

射．如果一个函数 $\varphi \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{X})$ 并且在 $\mathbf{Y}$ 内是弱连续的，那么 φ 在 $\mathbf{X}$ 内也是弱连续的．

利用这个引理，u 是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{V}$ 上的弱连续函数，即

$$t \to ((u(t),v)) \text{是连续的}, \ \forall v \in \mathbf{V} \tag{7.8.67}$$

类似地，$t \to a(u(t),v)$ 是连续的，$\forall v \in \mathbf{V}$ (7.8.68)

对式 (7.8.1) 两边乘以 Au_m，再作 $\mathbf{H}$ 内积，则

$$(u',Au_m) + (Au,Au_m) = (f,Au_m) \tag{7.8.69}$$

和定理 7.8.2 证明一样，式 (7.8.42) 和 (7.8.43) 也成立，对式 (7.8.69) 两边求极限，得 $(u',Au) + |Au|^2 = (f, Au)$.

由于 A 是对称正定的，利用引理 7.8.1，得

$$(u',Au) = (A^{1/2}u',A^{1/2}u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^{1/2}u,A^{1/2}u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u)$$

从而有

$$\frac{d}{dt}a(u,u) + 2|Au|^2 = 2(f,Au) \tag{7.8.70}$$

联合式 (7.8.67), (7.8.68) 和 (7.8.70)，可得

$t \to a(u(t),u(t))$ 在 $[0,T]$ 上也是连续的，由于 $a(\cdot,\cdot)$ 的强制性，在 $\mathbf{V}$ 中，范数 $\{c(u,u)\}^{1/2}$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，故 $u \in \mathbf{C}([0,T],\mathbf{V})$.

下面估计 $e_m = u - u_m$，$u_m \in \mathbf{W}_m$，P_m 为 $\mathbf{V} \to \mathbf{W}_m$ 的 $\mathbf{H}$ 正交投影算子，$Q_m = I - P_m$. 于是由

$$\frac{du_m}{dt} + Au_m = P_m f, \ \frac{du}{dt} + Au = f$$

得

$$\frac{de_m}{dt} + Ae_m = Q_m f \tag{7.8.71}$$

两边对 e_m 作 $\mathbf{H}$ 的内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_m|^2+a(e_m,e_m)=(Q_mf,e_m)\leqslant|Q_mf||e_m|$$

但是$e_m\in Q_mV$，故

$$\|e_m\|\geqslant\lambda_{m+1}^{1/2}|e_m| \qquad (7.8.72)$$

其中 λ_1，$\lambda_2\cdots$ 是 A 的特征值，$\lambda_m\to+\infty$，当 $m\to\infty$ 时．利用式 (7.8.72)，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_m|^2+\alpha\|e_m\|^2\leqslant\lambda_{m+1}^{-1/2}|Q_mf|\|e_m\|$$

$$\leqslant(\lambda_{m+1}^{-1/2}|Q_mf|)^2/2\alpha+\alpha\|e_m\|^2/2$$

即
$$\frac{d}{dt}|e_m|^2+\alpha\|e_m\|^2\leqslant\lambda_{m+1}^{-1}|Q_mf|^2/\alpha$$

再一次利用式 (7.8.72)，则

$$\frac{d}{dt}|e_m|^2+\lambda_{m+1}\alpha|e_m|^2\leqslant\lambda_{m+1}^{-1}|Q_mf|^2/\alpha$$

积分后得

$$|e_m(t)|^2\leqslant|e_m(0)|^2\exp(-\alpha\lambda_{m+1}t)$$
$$+\int_0^t\lambda_{m+1}^{-1}\exp(-\alpha\lambda^{m+1}(t-s))|Q_mf|^2/\alpha ds$$

对于 $e_m(0)$，利用式 (7.8.72)，则

$$|e_m(t)|^2\leqslant\lambda_{m+1}^{-1}\exp(-\alpha\lambda_{m+1}t)\|u_o-u_{om}\|^2$$
$$+\lambda_{m+1}^{-1}\int_0^t|Q_mf|^2\exp(-\alpha\lambda_{m+1}(t-s))/\alpha ds \qquad (7.8.73)$$

故两边对 t 从 0 到 T 积分，并注意

$$\int_0^T\int_0^t|Q_mf(s)|^2\exp(-\alpha\lambda_{m+1}(t-s))/\alpha dsdt$$

$$= \int_0^T \int_s^T |Q_m f(s)|^2 \exp(-\alpha\lambda_{m+1}(t-s))dtds$$

$$= -\int_0^T |Q_m f(s)|^2 (\exp(-\alpha\lambda_{m+1} T) - 1)ds / \alpha^2 \lambda_{m+1}$$

于是

$$\|u - u_m\|^2_{L^2(0,T;\ H)} \leqslant c\lambda^{-1}_{m+1}(\|u_o - u_{om}\| + \|f\|_{L^2(0,T;\ H)})$$

$$\leqslant c\lambda^{-1}_{m+1}(\|u_o\| + \|f\|_{L^2(0,T;\ H)}) \qquad (7.8.74)$$

同理，若对式 (7.8.71) 两边对 Ae_m 作 H 的内积，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + |Ae_m|^2 = (Q_m f, Ae_m) \leqslant |Q_m f||Ae_m|$$

所以 $$\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + |Ae_m|^2 \leqslant |Q_m f|^2$$

由谱分析知$|Ae_m| \geqslant \lambda^{1/2}_{m+1}\|e_m\|$. 故

$$\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + \lambda_{m+1}\|e_m\|^2 \leqslant |Q_m f|^2$$

$$\|e_m(t)\|^2 \leqslant \|e_m(0)\|^2 \exp(-\lambda_{m+1} t) + \int_0^t |Q_m f(s)|^2 \exp(-\lambda_{m+1}(t-s))ds$$

两边对 t 积分，可得

$$\|u - u_m\|_{L^2(0,T;\ V)} \leqslant \lambda^{-1/2}_{m+1}(\|u_o\| + \|f\|_{L^2(0,T;\ H)}) \qquad (7.8.75)$$

联合式 (7.8.75) 和 (7.8.74) 即可得式 (7.8.62). 证毕 .

第八章 隐式及二阶发展方程

本章主要讨论隐式以及二阶发展方程.除了具有标准边界条件的古典的热传导和波动方程以外，本章中还给出了许多非标准问题，如伪抛物型、Соболев、粘弹性等方程.

§8.1 一阶正则方程

设 V_m 是一个 Hilbert 空间，其内积为 $(\cdot,\cdot)_m$，并用 Z 表示由 V_m 到其对偶空间 V'_m 上的 Riesz 映射，即

$$Zx(y)=(x,y)_m,\quad \forall x,\ y\in V_m$$

设 D 是 V_m 的子空间，L：$D\to V'_m$ 是一线性映射.如果给出 $u_0\in V_m$ 以及 $f\in C((0,\infty),V'_m)$，考虑下述问题：

求 $u\in C([0,\infty),V_m)\cap C^1((0,\infty),V_m)$，使得

$$\begin{cases}Zu'(t)+Lu(t)=f(t),\ t>0\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{8.1.1}$$

因为 Riesz 映射 Z 是 $V_m\to V'_m$ 上的同构，所以 (8.1.1) 是正则方程.又应该注意，方程 (8.1.1) 是方程 (7.5.17) 的推广，因为如果 V_m 是主元空间，即 $Z=I$(恒等算子)，则式 (8.1.1) 即为 (7.5.17) 的形式.在一般情况下，我们将通过把式 (8.1.1) 化为与式 (7.5.17) 等价的 Cauchy 问题来求解 (8.1.1).

首先，对于问题 (8.1.1) 的解 u，应有一个先验估计，为了简单起见，设 $f=0$.对于这样的解，我们有

$$D_t(u(t),u(t))_m = -2\mathrm{Re}Lu(t)(u(t))$$

由此有下述定义：

定义 8.1.1 线性算子 $L: D \to \mathbf{V}'_m$，$D \subset \mathbf{V}_m$，是单调的（或非负的）如果成立

$$\mathrm{Re}Lx(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in D$$

进而我们称 L 是严格单调的（或正的），如果

$$\mathrm{Re}Lx(x) > 0 \qquad \forall x \in D,\ x \neq 0$$

由定理 7.3.4 及定理 7.5.5 易知，只要 L 是单调的，问题 (8.1.1) 的 Cauchy 问题至少有一个解．这也表明 $\mathbf{V}_m$ 是使得 (8.1.1) 适定的合适的空间．

为了得到与 (8.1.1) 等价的 V_m 上的发展方程，我们只需要对 (8.1.1) 作用 Riesz 映象 Z 的逆，即

$$u'(t) + Z^{-1} \cdot Lu(t) = Z^{-1} f(t) \qquad \forall t > 0 \tag{8.1.2}$$

从而我们定义了算子 $A = Z^{-1} \cdot L$，$D(A) = D$，而且 (8.1.2) 与 (7.5.17) 是等价的．又因为 Z 是由内积 $(\cdot,\cdot)_m$ 定义的 Riesz 映射，所以有

$$(Ax,y)_m = Lx(y) \qquad \forall x \in D,\ y \in \mathbf{V}_m \tag{8.1.3}$$

由此得知 L 是单调的充要条件是 A 是增生的．又由定理 7.3.4 知，在 $\mathbf{V}_m$ 上 $-A$ 生成 C^0 类压缩半群的充要条件是，L 是单调的以及 $I + A$ 是满的．因为 $Z(I + A) = Z + L$，从而由定理 7.5.6 得出如下结果：

定理 8.1.1 设 $\mathbf{V}_m$ 是内积为 $(\cdot,\cdot)_m$ 的 Hilbert 空间，A 是 $\mathbf{V}_m$ 的 Riesz 映射，又 $D \subset \mathbf{V}_m$，L: $D \to \mathbf{V}'_m$ 是线性的．如果 L 是单调的而且 $Z + L$: $D \to \mathbf{V}'_m$ 是满的，则对每一个 $f \in \mathbf{C}^1([0,\infty),\mathrm{V}'_m)$ 以及 $u_0 \in D$，问题 (8.1.1) 有唯一的解．

下面讨论与 §7.4 解析半群类似的情况．设 L 是由连续的半双线性形式得到的．特别地，设 $\mathbf{V}$ 是 Hilbert 空间，$\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{V}_m$ 的稠密子集合而且 $\mathbf{V}\subset\mathbf{V}_m$，从而有 $\mathbf{V}_m\subset\mathbf{V}'$，设 $l(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}$ 上的连续的半双线性形式并且定义相应的线性算子 $\tilde{L}$: $\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$ 如下：

$$\tilde{L}x(y)=l(x,y)\qquad \forall x,y\in\mathbf{V}$$

定义 $D=\{x\in\mathbf{V}:\ \tilde{L}x\in\mathbf{V}_m'\}$ 以及 $L=\tilde{L}|_D$．则此时 (8.1.3) 为

$$l(x,y)=(Ax,y)_m\qquad \forall x\in D,\ y\in\mathbf{V}$$

从而和定理 7.6.1 一样，A 是由三重结构 $\{\mathbf{V}_m,\ \mathbf{V},\ l(u,v)\}$ 所定义的算子．由与定理 7.6.2 和定理 7.5.6 证明类似的方法，可以得到：

定理 8.1.2　设 $\mathbf{V}_m$ 是内积为 $(\cdot,\cdot)_m$ 的 Hilbert 空间，Z 是 $\mathbf{V}_m$ 上的 Riesz 映射，$l(\cdot,\cdot)$ 是 Hilbert 空间 $\mathbf{V}$ 上的连续的半双线性形式而且是 $\mathbf{V}$ 椭圆的，$\mathbf{V}\subset\mathbf{V}_m$，且 $\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{V}_m$ 中稠密，$\tilde{L}$ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的同构．则对每一个 Hoelder 连续函数 f: $[0,\infty)\to\mathbf{V}'_m$ 以及 $u_o\in\mathbf{V}_m$，存在唯一的 $u\in C([0,\infty),\mathbf{V}_m)\cap C^1((0,\infty),\mathbf{V}_m)$ 使得 $u(0)=u_o$，$\tilde{L}u(t)\in\mathbf{V}_m$，$t>0$，以及

$$Zu'(t)+\tilde{L}u(t)=f(t)\qquad t>0 \tag{8.1.4}$$

例 1　$\mathbf{V}_m=\mathbf{H}_o^1(0,1)$，取 $D=\{u\in\mathbf{H}^2(0,1)\cap\mathbf{H}_o^1(0,1):\ u'(0)=cu'(1)\}$，这里 $|c|\leqslant 1$，定义 $L=-\partial^3u$．从而有 $Lu(\varphi)=(\partial^2u,\partial\varphi)\quad \forall\varphi\in\mathbf{H}_o^1(0,1)$ 以及

$$2\mathrm{Re}Lu(u)=|u'(1)|^2-|u'(0)|^2\geqslant 0\qquad \forall u\in D$$

由定理 8.1.1 知下列初边值问题：

$$\begin{cases}(\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) - \partial_x^3 U(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t \geqslant 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = 0,\ \partial_x U(0,t) = c\partial_x U(1,t),\ t \geqslant 0 \\ U(x,0) = U_o(x) \end{cases}$$

有唯一的解，只要$U_o \in D$.

例2　$\mathbf{V}_m = \mathbf{H}_o^1(0,1)$,　$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m$.定义

$$l(u,v) = \int_0^1 \partial^2 u \partial^2 v dx \qquad \forall u,v \in \mathbf{V}$$

则 $D = \mathbf{H}_o^2 \cap \mathbf{H}^3(0,1)$,　$Lu = \partial^4 u$, $u \in D$. 由定理 8.1.2 知，$\forall U_o \in \mathbf{H}_o^1(0,1)$, 下述方程

$$\begin{cases}(\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) + \partial_x^4 U(x,t) = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = \partial_x U(0,t) = \partial_x U(1,t) = 0.\ t > 0 \\ U(x,0) = U_o(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

的解存在且唯一.

例3　$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m = \mathbf{H}_o^1(0,1)$, 定义

$$l(u,v) = \int_0^1 \partial u \partial \bar{v} dx \qquad \forall u \cdot v \in \mathbf{V}$$

取 $Lu = -\partial^2 u$, $u \in D$, 则由上面的定理得，只要 $U_o \in D = \mathbf{V}_m$, 下述方程：

$$\begin{cases}(\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) - \partial_x^2 U(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = 0,\ t > 0 \\ U(x,0) = U_o(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

的解存在且唯一. 称此方程为伪抛物型方程.

例4 引入内积

$$(u,v)_m=\int_\Omega m(x)u(x)\bar{v}(x)dx$$

记 $\mathbf{V}_m$ 是 $\mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$ 在上述内积下的完备化得到的空间 . $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一开集，$m\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ 且 $m(x)>0$, a.e. $x\in\Omega$. 取 $\mathbf{V}=\mathbf{H}_o^1(\Omega)$, 定义

$$l(u,v)=\int_\Omega \operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}\bar{v}\qquad\forall u,v\in\mathbf{V}$$

由定理 8.1.2, 下述问题

$$\begin{cases}m(x)\partial_t U(x,t)-\Delta_n U(x,t)=0 & x\in\Omega,\ t>0\\ U(s,t)=0 \quad s\in\partial\Omega, & t>0\\ U(x,0)=U_o(x) & x\in\Omega\end{cases}$$

的解存在而且是唯一的 . 注意初值条件是在下述意义上取得的 :

$$\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega m(x)\left|U(x,t)-U_o(x)\right|^2dx=0$$

在以后的讨论中，我们将假设 $m(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\Omega$; 此时方程是混合型的；当 $m(x)>0$ 时，是抛物型的；当 $m(x)=0$ 时，是椭圆型的 .

§ 8.2 伪抛物型方程

下面讨论由例 3 推广的一类发展型方程 .

定理 8.2.1 设 V 是 Hilbert 空间，$m(\cdot,\cdot)$, $l(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的连续的半双线性形式 . 又 $M\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$, $L\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 定义为 $Mx(y)=m(x,y)$, $Lx(y)=l(x,y)$, $\forall x,y\in\mathbf{V}$, 并且 $m(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制的，则 $\forall u_o\in\mathbf{V}$, $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{V}')$, 存在唯一的 u

$\in \mathbf{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{V})$，使得

$$\begin{cases} Mu'(t)+Lu(t)=f(t) & t\in\mathbf{R} \\ u(0)=u_o \end{cases} \tag{8.2.1}$$

证 $m(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制的假设使得 M 是由 V 到 V′ 上的同构，所以算子 $A=M^{-1}\cdot L\in\mathcal{L}(\mathbf{V})$. 又由定理 7.2.1 知，$\mathrm{Exp}(-tA)\in\mathcal{L}(\mathbf{V})$. 从而定义

$$u(t)=\mathrm{Exp}(-tA)u_o+\int_0^t \mathrm{Exp}(A(\tau-t)) \cdot M^{-1}f(\tau)d\tau \quad t\geqslant 0 \tag{8.2.2}$$

由简单的计算易知(8.2.2)是问题

$$\begin{cases} u'(t)+Au(t)=M^{-1}f(t) \\ u(o)=u_o \end{cases}$$

的唯一解，从而是问题 (8.2.1) 的解 .$t<0$ 时，$\mathrm{Exp}(-tA)$ 仍是一致有界的 C^o 类半群 . 经过适当的变量替换，可证明它也是 (8.2.1) 的解 . 唯一性的证明是简单的，读者可以自行完成 . 证毕 .

我们称由定理 8.2.1 给出的解 $u(t)$ 是问题 (8.2.1) 的弱解 . 设给出 Hilbert 主元空间 U，V 嵌入 U，且 V 是 U 的稠密子集合，从而 $\mathbf{U}'\subset\mathbf{V}'$. 定义 $D(\tilde{M})=\{v\in\mathbf{V}:\ Mv\in\mathbf{U}\}$，$D(\tilde{L})=\{v\in\mathbf{V}:\ Lv\in\mathbf{U}\}$ 和相应的算子 $\tilde{M}=M|_{D(\tilde{M})}$，$\tilde{L}=L|_{D(\tilde{L})}$(限制是在 U 中取的).

当问题 (8.2.1) 中的每一项均属于 $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{U})$，而不是 $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{V}')$ 时，则问题 (8.2.1) 的解 $u(t)$ 称为强解，这样的解满足

$$\tilde{M}u'(t)+\tilde{L}u(t)=f(t) \quad t\in\mathbf{R} \tag{8.2.3}$$

定理 8.2.2 设 Hilbert 空间 V，算子 M，$L\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 和定理 8.2.1 中给出的相同 .Hilbert 主元空间 U，$D(\tilde{M})$，$D(\tilde{L})$ 及算

子$\tilde{M}$，$\tilde{L}$ 如上所述，并且设 $D(\tilde{M})\subset D(\tilde{L})$，则$\forall u_o\in D(\tilde{M})$ 和 $f\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{U})$，始值问题 (8.2.3)($u(0)=u_o$) 存在唯一的强解．

证 对某个充分大的 $\lambda>0$，作变量替换 $v(t)=e^{-\lambda t}u(t)$，因此不失一般性，可以假设 $D(\tilde{M})=D(\tilde{L})$ 以及 $l(\cdot,\cdot)$ 是 V 强制的，从而$\tilde{L}$ 是 U 上的双射并且可以定义 $D(\tilde{L})$ 上的范数为 $\|v\|_{D(\tilde{L})}=\|\tilde{L}v\|_U$，$\forall v\in D(\tilde{L})$．这样，$D(\tilde{L})$ 是 Banach 空间（显然，也是个 Hilbert 空间）．因为 $l(\cdot,\cdot)$ 是V 强制的，对某个 $c>0$，有

$$c\|v\|_{\mathbf{V}}^2\leqslant\|\tilde{L}v\|_{\mathbf{U}}\|v\|_{\mathbf{U}}\qquad\forall v\in(\tilde{L})$$

又由 V 嵌入 U 是连续的知，$D(\tilde{L})$ 嵌入 V 是连续的．因此算子 $A=M^{-1}\cdot L\in\mathcal{L}(\mathbf{V})$ 的不变子空间为 $D(\tilde{L})$．这就是说，在 $D(\tilde{L})$ 的范数上，算子 A 在 $D(\tilde{L})$ 上的限制是闭算子．这是因为如果 $v_n\in D(\tilde{L})$ 以及

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-u_o\|_{D(\tilde{L})}=0,\qquad\lim_{n\to\infty}\|Av_n-v_o\|_{D(\tilde{L})}=0$$

则有

$$\begin{aligned}\|v_n-Au_o\|_V&\leqslant\|v_o-Av_n\|_{\mathbf{V}}+\|A(v_n-u_o)\|_{\mathbf{V}}\\&\leqslant\|v_o-Av_n\|_{\mathbf{V}}+\|A\|_{\mathcal{L}(V)}\|v_n-u_o\|_{\mathbf{V}}\end{aligned}$$

又由上面已经得出的 $D(\tilde{L})$ 嵌入 V 知，上述最后一个不等式中各项收敛于零，从而 $v_o=\mathrm{A}u_o$．

因为 $A|_{D(\tilde{L})}$ 是闭的并且在 $D(\tilde{L})$ 是处处有定义，由闭图像定理 5.8.5 得 $A\in\mathcal{L}(D(\tilde{L}))$，因此算子 $\mathrm{Exp}(-tA)$，$t\in\mathbf{R}$ 在 $D(\tilde{L})$ 上的限制是连续的，在 $D(\tilde{L})$ 上给出的公式 (8.2.2) 就是所需要的强解．证毕．

推论 8.2.1 在定理 8.2.2 的条件下，弱解 $u(t)$ 是强解的充

要条件是 $u_o \in D(\tilde{M})$.

§8.3 退化方程

重新考虑发展方程 (8.1.1), 此时算子 Z 可以是退化的，即 $Zu=0$, $u\neq 0$. 虽然这时再不能把方程 (8.1.1) 写为式 (8.1.2) 的形式，但我们设法把 Z 的零空间 $N(Z)$ 从方程 (8.1.1) 中分出来，然后得到一个相应的正则方程.

设 $\mathbf{V}$ 是一线性空间，$\mathbf{V}$ 上的半双线性形式 $m(\cdot,\cdot)$ 是对称的，非负的，即

$$m(x,y)=\overline{m(y,x)} \qquad \forall x,y\in \mathbf{V}$$

$$m(x,x)\geqslant 0 \qquad \forall x\in \mathbf{V}$$

从而有

$$|m(x,y)|^2\leqslant m(x,x)m(y,y) \qquad \forall x,y\in \mathbf{V} \tag{8.3.1}$$

以及 $x\to m(x,x)^{1/2}=\|x\|_m$ 是 $\mathbf{V}$ 上的半范. 用 $\mathbf{V}_m$ 表示这个半范空间，其对偶空间 $\mathbf{V}_m'$ 是 Hilbert 空间.

定义算子 $Z\in \mathcal{L}(\mathbf{V}_m,\mathbf{V}_m')$ 为 $Zx(y)=m(x,y)$, $\forall x,y\in \mathbf{V}$. 令 $D\subset \mathbf{V}$, $L\in \mathbf{L}(D,\mathbf{V}_m')$, $f\in \mathbf{C}((0,\infty),\ \mathbf{V}_m)$, $g_o\in \mathbf{V}_m'$, 则考虑下述问题:

求$u(t):[0,\infty)\to \mathbf{V}$使得, $u(t)\in D$满足

$$Zu(t)\in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{V}_m')\bigcap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{V}_m'),Zu(0)=g_o \qquad ,$$

$$(Zu)'(t)+Lu(t)=f(t), \qquad t>0 \tag{8.3.2}$$

注意如果 $m(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}_m$ 上的内积并且 $\mathbf{V}_m$ 是完备的时候，Z 就是 $\mathbf{V}_m$ 上的 Riesz 映射.

记 $\mathbf{U}=N(Z)$, 记相应的商空间为 $\mathbf{V}/\mathbf{U}$. 商映射 q: $\mathbf{V}$

$\to \mathbf{V}/\mathbf{U}$ 是线性满射，则我们可定义商空间 $\mathbf{V}/\mathbf{U}$ 上的内积 $m_o(\cdot,\cdot)$ 为

$$m_o(q(x),q(y)) = m(x,y) \qquad \forall x,y \in \mathbf{V}$$

商空间 $\mathbf{V}/\mathbf{U}$ 在 $m_o(\cdot,\cdot)$ 意义下的完备化是一个 Hilbert 空间 $\mathbf{W}$，其内积仍记为 $m_o(\cdot,\cdot)$. 把 q 看作 $\mathbf{V}_m \to \mathbf{W}$ 内的映射，则它是保范的，且有稠密的值域，从而根据 Hilbert 空间对偶算子理论知由

$$q'(f)(x) = f(q(x)) \qquad f \in \mathbf{W}', \quad x \in \mathbf{V}_m$$

定义的 q 的对偶算子 q': $\mathbf{W}' \to \mathbf{V}_m'$，它是保范的同构. 如果 Z_o 是内积为 $m_o(\cdot,\cdot)$ 的 Hilbert 空间 $\mathbf{W}$ 上的 Riesz 映射，则有

$$q'Z_o q(x)(y) = Z_o q(x)(q(y)) = m_o(q(x),q(y)) = Zx(y)$$

从而

$$q'Z_o q = Z \tag{8.3.3}$$

从线性映射 L: $D \to \mathbf{V}_m'$ 出发，我们希望通过 q 构造 $q[D]$, $D \subset \mathbf{V}_m$ 上的线性映射 L_o，使得

$$q'L_o q = L \tag{8.3.4}$$

注意到商映射的性质：如 $T \in \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, $M \subset \mathbf{N}(T)$, 则存在唯一的映射 $\hat{T}$: $\mathbf{V}/\mathbf{M} \to \mathbf{W}$, 使得 $\hat{T} \cdot q_M = T$. 可以知道，只要 $\mathbf{U} \cap D \subset \mathbf{N}(L)$, 则构造 $L_o \in \mathbf{L}(\mathbf{W},\mathbf{W}')$ 是可能的. 因此可以假设式 (8.3.4) 成立.

设 $f(t)$, g_o 和式 (8.3.2) 中是一样的，考虑问题：

求 $v(t) \in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{W}) \cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{W})$ 使得 $v(0) = (qZ_o)^{-1} g_o$ 以及

$$Z_o v'(t) + L_o v(t) = (q')^{-1} f(t) \qquad t > 0 \tag{8.3.5}$$

因为，$D(L_o) = q[D]$，如果 v 是式 (8.3.5) 的解，则对每一个 $t > 0$，我们可以找到 $u(t) \in D$，使得 $v(t) = q(u(t))$. 但是 $q'Z_o$：$W \to V_m'$ 是一个同构并由式 (8.3.3)，(8.3.4) 和 (8.3.5) 知 $u(t)$ 是 (8.3.2) 的解且有 $Zu(0) = g_o$，因此有下述结论：

定理 8.3.1 设 V_m 是由对称、非负半双线性形式 $m(\cdot,\cdot)$ 得到的半范空间，设 $Z \in \mathcal{L}(V_m, V_m')$ 是由 $Zx(y) = m(x,y)$，$\forall x,y \in V_m$ 定义的线性算子. 又设 D 是 V_m 的子空间以及 L: $D \to V_m'$ 是线性单调的.

(1) 如果 $N(Z) \cap D \subset N(L)$ 以及 $Z + L$: $D \to V_m'$ 是满的，则对每一个 $f \in C^1([0,\infty), V_m')$ 以及 $u_o \in D$，问题 (8.3.2) 存在唯一的解 $u(t)$，而且 $(Zu)(0) = Zu_o$.

(2) 如果 $N(Z) \cap N(L) = \{0\}$，则最多存在一个解.

证 如果我们证明了 L_o：$q[D] \to W'$ 是单调的而且 $Z_o + L_o$ 是满的，则可由定理 8.1.1 证明问题 (8.3.5) 的解的存在性. 但是式 (8.3.4) 说明 L_o 是单调的，恒等式

$$q'(Z_o + L_o)q(x) = (Z + L)(x), \quad \forall x \in D$$

说明只要 $Z + L$ 是满的，则 $Z_o + L_o$ 也是满的. 从而得到问题 (8.3.2) 的解的存在性.

为了建立唯一性的结论. 考虑问题 (8.3.2) 的齐次问题，即当 $f \equiv 0$，$Zu(0) = 0$ 时，设 $u(\cdot)$ 是问题 (8.3.2) 的解. 定义 $v(t) = qu(t)$，$t \geqslant 0$，则

$$D_t m_o(v(t), v(t)) = 2\mathrm{Re}(Z_o v'(t))(v(t)), \quad t > 0$$

注意 (8.3.3)，又有

$$D_t m(u(t)) = 2\mathrm{Re}Zu'(t)(u(t)) = -2\mathrm{Re}Lu(t)(u(t)), \quad t>0$$

因为 L 是单调的，由上式可得出 $Zu(t)=0$, $t\geqslant 0$ 时，从而由齐次的式 (8.3.2) 得 $Lu(t)=0$, $t\geqslant 0$, 由此得出唯一性结果．证毕．

与定理8.1.2类似，可以得到:

定理 8.3.2 设 $\mathbf{V}_m$ 是由对称，非负半双线性形式 $m(\cdot,\cdot)$ 得到的半范空间，设 $Z\in\pounds(\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_m')$ 定义为

$$Zx(y)=m(x,y) \quad \forall x,y\in\mathbf{V}_m$$

又设 Hilbert 空间 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{V}_m$ 的稠密子集合而且 $\mathbf{V}\subset\mathbf{V}_m$．如果 $l(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}$ 上的连续的，半双线性和椭圆的以及 L 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 上相应的同构，记 $D=\{u\in\mathbf{V}:\ Lu\in\mathbf{V}_m'\}$．则对每一个 Hoelder 连续的 f: $[0,\infty)\to\mathbf{V}'_m$ 和每一个 $u_o\in\mathbf{V}_m$，问题 (8.3.2) 存在着唯一的解 $u(t)$, 且 $(Zu)(0)=Zu_o$.

§ 8.4 二阶正则方程

从本节起，我们开始讨论包含解对时间的二阶导数的发展方程，即二阶发展方程，其抽象的形式是

$$Bu''(t)+Eu'(t)+Au(t)=f(t) \qquad t>0 \tag{8.4.1}$$

和前面几节的讨论思路一样，首先讨论正则方程即 B 是可逆的情况．

设 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 是 Hilbert 空间，$\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{W}$ 的稠密子空间且 $\mathbf{V}$ 嵌入 $\mathbf{W}$. 从而有 $\mathbf{W}'\subset\mathbf{V}'$. 给出算子 $\tilde{A}\in\pounds(\mathbf{V},\mathbf{V}'),\tilde{B}\in\pounds(\mathbf{W},\mathbf{W}')$. 设 $D(E)\subset\mathbf{V}$ 且 $E:D(E)\to\mathbf{V}'$ 是线性的．如果给定 $u_o\in\mathbf{V}$, u_1

$\in \mathbf{W}$, $f \in \mathbf{C}((0,\infty), \mathbf{W}')$. 考虑下述问题

$$
\begin{cases}
\text{求} u \in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{V}) \cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{V}) \cap \mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{W}) \\
\cap \mathbf{C}^2((0,\infty),\mathbf{W}) \text{使得} \\
\tilde{B}u''(t) + Eu'(t) + \tilde{A}u(t) = f(t) \qquad \forall t > 0 \\
u(0) = u_o \\
u'(0) = u_1
\end{cases}
\tag{8.4.2}
$$

注意，对于问题 (8.4.2) 的任意解 $u(t)$，有 $u'(t) \in D(E)$ 以及 $Eu'(t) + \tilde{A}u(t) \in \mathbf{W}' \quad \forall t > 0$.

为了求解问题 (8.4.2) 首先把它化成乘积空间上的一阶方程，然后利用 §8.1 中的结果 . 更详细的是把式 (8.4.2) 写为

$$
\begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A} \\ \tilde{A} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}
$$

定义乘积 Hilbert 空间 $\mathbf{V}_m = \mathbf{V} \times \mathbf{W}$，其内积为

$$
([x_1,x_2],[y_1,y_2])_{\mathbf{V}_m} = (x_1,y_1)_V + (x_2,y_2)_{\mathbf{W}}
$$
$$
\forall [x_1,x_2],\ [y_1,y_2] \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}
$$

从而我们有 $\mathbf{V}_m' = \mathbf{V}' \times \mathbf{W}'$，并定义 $Z \in \pounds(\mathbf{V}_m \times \mathbf{V}_m')$ 为

$$
Z([x_1,x_2]) = [\tilde{A}x_1, \tilde{B}x_2],\ \forall [x_1,x_2] \in \mathbf{V}_m
$$

定义 $D = \{[x_1,x_2] \in \mathbf{V} \times D(E):\ \tilde{A}x_1 + Ex_2 \in \mathbf{W}'\}$ 以及 $L \in \pounds(D,\mathbf{V}_m')$ 为

$$
L([x_1,x_2]) = [-\tilde{A}x_2, \tilde{A}x_1 + Ex_2] \qquad \forall [x_1,x_2] \in D
$$

如果 $u(t)$ 是 (8.4.2) 的解，则由 $w(t) = [u(t),u'(t)]$, $t \geqslant 0$ 所定义的 w 满足

$$
w \in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{V}_m) \cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{V}_m), w(0) = [u_o,u] \in \mathbf{V}_m
$$

以及

$$Zw'(t)+Lw(t)=[0,f(t)] \qquad \forall t>0 \qquad (8.4.3)$$

这正是 §8.1 中的情况，所以我们只需确定 (8.4.2) 中给定的算子$\tilde{A}$, $\tilde{B}$, E 以及 f, u_o, u_1 等应满足的条件，以便我们可以利用定理 8.1.1 或 8.1.2.

定理 8.4.1 V 和 W 是两个 Hilbert 空间，V 稠密而且连续地嵌入到 W. 设$\tilde{A}\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 和$\tilde{B}\in\mathcal{L}(\mathbf{W},\mathbf{W}')$ 分别是 V 和 W 的 Riesz 映射，$E\in\mathrm{L}(D(E),\mathbf{V}')$, 这里 $D(E)$ 是 V 的子空间，如果 E 是单调的，$\tilde{A}+E+\tilde{B}$: $D(E)\to\mathbf{V}'$ 是满的，则对每一个 $f\in C_1([0,\infty),\mathbf{W}')$ 和 $u_o\in\mathbf{V}$, $u_1\in D(E)$ 且$\tilde{A}u_o+Eu_1\in\mathbf{W}'$, 问题 (8.4.2) 有唯一的解 $u(t)$, $t\geqslant 0$.

证 因为$\tilde{A}$ 和$\tilde{B}$ 是它们相应空间上的 Riesz 映射，有

$$\begin{aligned}Z([x_1,x_2])([y_1,y_2]) &= \tilde{A}x_1(y_1)+\tilde{B}x_2(y_2)\\ &=(x_1,y_1)_{\mathbf{V}}+(x_2,y_2)_{\mathbf{W}}\\ &=([x_1,x_2],[y_1,y_2])_{\mathbf{V}_m}\\ &\qquad \forall\ [x_1,x_2],[y_1,y_2]\in\mathbf{V}_m\end{aligned}$$

从而 Z 是 $\mathbf{V}_m$ 的 Riesz 映射．同样 $\forall[x_1,x_2]\in D$, 有

$$L([x_1,x_2])([y_1,y_2])=-\tilde{A}x_2(y_1)+(\tilde{A}x_1+Ex_2)(y_2)$$
$$\forall[y_1,y_2]\in\mathbf{V}_m$$

从而

$$L([x_1,x_2])([x_1,x_2])=-\tilde{A}x_1(x_2)+\tilde{A}x_1(x_2)+Ex_2(x_2)$$

因为$\tilde{A}$ 是对称的．由此得

$$\mathrm{Re}L([x_1,x_2])([x_1,x_2])=\mathrm{Re}Ex_2(x_2) \quad \forall[x_1,x_2]\in D$$

则由 E 的单调性可推知 L 的单调性．

其次，如果 $f_1 \in V'$，$f_2 \in W'$，则由 $\tilde{A} + E + \tilde{B}$: $D(E) \to V'$ 是满的知存在 $x_2 \in D(E)$，使得 $(\tilde{A} + E + \tilde{B})x_2 = f_2 - f_1$。置 $x_1 = x_2 + \tilde{A}^{-1} f_1 \in V$，则有 $[x_1, x_2] \in D$，使得 $(Z + L)[x_1, x_2] = [f_1, f_2]$. 注意，如同所要求的那样，$\tilde{A}x_1 + Ex_2 = f_2 - \tilde{B}x_2 \in W'$，由此得出 $Z + L$ 是由 D 到 V_m' 上的满射 . 由定理 8.1.1 知问题 (8.4.3) 的解 $w(t) = [u(t), v(t)]$ 存在 . 因为 $\tilde{A}$ 是保范的同构，$v(t) = u'(t)$，从而得到所需的结论 . 证毕 .

在应用中经常遇到的上述定理的特殊情况是 $D(E) = V$ 以及 $E = \tilde{E} \in \mathcal{L}(V, V')$，此时只需检验 $\tilde{E}$ 是否单调，然后检验 $\tilde{A} + \tilde{E} + \tilde{B}$ 是否 V 强制，从而确定满射 . 进一步，此时我们可以定义 $\tilde{L} \in \mathcal{L}(V_l, V_l')$，$V_l = V \times V$，为

$$\tilde{L}([x_1, x_2])([y_1, y_2]) = -\tilde{A}x_2(y_1) + (\tilde{A}x_1 + \tilde{E}x_2)(y_2)$$
$$\forall [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in V_l$$

从而，如果我们能够证明 $\tilde{L}(\cdot)(\cdot)$ 是 V_l 椭圆的，就可以应用定理 8.1.2. 当然我们只需检验对某个 $\lambda > 0$，$(\lambda Z + \tilde{L})(\cdot)(\cdot)$ 是否是 V_l 椭圆的 . 由此有

定理 8.4.2　设 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 分别是 Hilbert 空间 V 和 W 上的 Riesz 映射，这里 V 是稠密而且连续地嵌入到 W. 设 $\tilde{E} \in \mathcal{L}(V, V')$ 并设对某个 $\lambda > 0$，$\tilde{E} + \lambda\tilde{B}$ 是 V 椭圆的，则对每一个 Hoelder 连续函数 $f: [0, \infty) \to W'$，$u_o \in V$ 以及 $u_1 \in W$，下述问题

$$\begin{cases} \tilde{B}u''(t) + \tilde{E}u'(t) + \tilde{A}u(t) = f(t) \quad t > 0 \\ u(0) = u_o \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{8.4.4}$$

存在唯一的解.

定理 8.4.3 除了定理 8.4.1 的假设外，设对所有的 $x\in D(\tilde{E})$，$\mathrm{Re}\tilde{E}x(x)=0$ 以及算子 $\tilde{A}+\tilde{E}+\tilde{B}$ 和 $\tilde{A}-\tilde{E}+\tilde{B}$ 都是 $D(\tilde{E})$ 到 $\mathbf{V}'$ 上的满射. 则对每一个 $f\in \mathbf{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{W}')$，$u_o\in\mathbf{V}$，$u_1\in D(\tilde{E})$ 而且 $\tilde{A}u_o+\tilde{E}u_1\in\mathbf{W}'$，对于 $t\in\mathbf{R}$，问题 (8.4.4) 存在唯一的解.

它的证明是定理 8.4.1 的直接推论.

§ 8.5 Соболев方程

与 § 8.2 伪抛物型方程类似，对另一类发展方程，我们给出它具有弱解或强解的充分条件.

定理 8.5.1 令 $\mathbf{V}$ 是 Hilbert 空间，$\tilde{A}$，$\tilde{E}$，$\tilde{B}\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$. 设与$\tilde{B}$ 的对应的半双线性形式是 $\mathbf{V}$ 椭圆的. 则对每一个 u_o，$u_1\in\mathbf{V}$ 和 $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{V})$，存在唯一的 $u\in\mathbf{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{V})$ 使得

$$\begin{cases}\tilde{B}u''(t)+\tilde{E}u'(t)+\tilde{A}u(t)=f(t) \qquad t\in R\\ u(0)=u_o,\quad u'(0)=u_1\end{cases} \tag{8.5.1}$$

证 变量替换 $v(t)=e^{-\lambda t}u(t)$ 给出一个与式 (8.5.1) 等价的方程，此方程中以$\tilde{A}+\lambda\tilde{E}+\lambda^2\tilde{B}$ 代替了式 (8.5.1) 中的$\tilde{A}$，如果 λ 选取得充分大，则$\tilde{A}+\lambda\tilde{E}+\lambda^2\tilde{B}$ 是 $\mathbf{V}$ 椭圆的，从而可以假设$\tilde{A}$ 是 $\mathbf{V}$ 椭圆的.

又如果定义 $\mathbf{V}_m=\mathbf{V}\times\mathbf{V}$，与 § 8.4 一样，定义 $Z\in\mathcal{L}(\mathbf{V}_m,\mathbf{V}_m')$ 为

$$Z([x_1,x_2])=[\tilde{A}x_1,\tilde{B}x_2] \qquad \forall[x_1,x_2]\in\mathbf{V}_m$$

定义$\tilde{L}\in \mathcal{L}(\mathbf{V}_m,\mathbf{V}_m')$为

$$\tilde{L}([x_1,x_2])([y_1,y_2]) = -\tilde{A}x_2(y_1) + (\tilde{A}x_1 + \tilde{E}x_2)(y_2)$$
$$\forall [x_1,x_2],[y_1,y_2]\in \mathbf{V}_m,$$

则有 Z 是 $\mathbf{V}_m$ 椭圆的，从而由定理 8.2.1 知方程 (8.4.3),即

$$Zw(t) + \tilde{L}w(t) = [0,f(t)]$$

的解存在且唯一，由此可得出所需要的结论．证毕．

问题 (8.5.1) 的解 $u\in \mathbf{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{V})$ 称之为弱解，如果给出 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$，使得 $\mathbf{V}\subset \mathbf{H}$，且 $\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{H}$ 中稠密．又定义 $D(B)=\{v\in \mathbf{V}:\ \tilde{B}v\in \mathbf{H}\}$ 以及 $B=\ \tilde{B}|_{D(B)}$，$\tilde{E}$ 和$\tilde{A}$ 在 $\mathbf{H}$ 上的限制类似地表示为 E 和 A．对于 $t\in\mathbf{R}$，如问题 (8.5.1) 中方程的各项都属于 $\mathbf{H}$，则 (8.5.1) 的解 $u(t)$ 称之为强解并且满足

$$Bu''(t) + Eu'(t) + Au(t) = f(t) \quad t\in\mathbf{R} \tag{8.5.2}$$

定理 8.5.2 设 Hilbert 空间 $\mathbf{V}$ 和算子$\tilde{A}$，$\tilde{E}$，$\tilde{B}$，$\in \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 和定理 8.5.1 中一样，Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 和相应的算子 A，E，B 定义如上，设 $D(B)\subset D(A)\subset D(E)$，则对每一组 $u_o\in D(A)$，$u_1\in D(B)$ 和 $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{H})$，

$$\begin{cases} Bu''(t) + Eu'(t) + Au(t) = f(t) \quad t\in\mathbf{R} \\ u(0)=u_o, \quad u'(0)=u_1 \end{cases}$$

存在唯一的强解$u(t)$.

证 定义 $D(M)=D(A)\times D(B)$，和 $M[x_1,x_2]=[Ax_1,Bx_2]$，$\forall [x_1,x_2]\in D(M)$ 以及 $L[x_1,x_2]=[-Ax_2,Ax_1+Ex_2]$，$\forall [x_1,x_2]\in D(A)\times D(A)\bigcap D(E)$，然后利用定理 8.2.2，即得所需结论．证毕．

推论 8.5.1 在定理 8.5.1 的情况下，弱解 $u(t)$ 是强解的充要条件是，对某个 $t_o\in\mathbf{R}$，$u(t_o)\in\mathbf{R}$，$u(t_o)\in D(A)$ 以及 $u'(t_o)$

$\in D(B)$.

例 8 下面的例子包括流体力学中经典的 Соболев 方程以及描述某些振动问题的发展方程．

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开的，$\partial\Omega$ 充分光滑，Γ 是 $\partial\Omega$ 的闭子集合，令 $\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega):\ \gamma_o v(s) = 0\ \ \forall a.e.\ s \in \Gamma\}$ 以及

$$\tilde{B}u(v) = (u,v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \qquad \forall u,v \in \mathbf{V}$$

设 $a_j(\cdot) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)\quad \forall j = 1,2,\cdots,n$.定义

$$\tilde{A}u(v) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} a_j(x)\partial_j u(x)\partial_j \overline{v(x)}dx \qquad \forall u,v \in \mathbf{V}$$

设函数 $t \to F(\cdot,t)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ 以及函数 $t \to g(\cdot,t)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ 是连续的，并定义 $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{V}')$ 为

$$f(t)(v) = \int_{\Omega} F(x,t)\overline{v(x)}dx + \int_{\partial\Omega} g(s,t)\gamma_o \overline{v(s)}ds \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

从而对每组 U_o，$U_1 \in \mathbf{V}$，由定理 8.5.1 得下述问题的唯一的广义解：

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 U(x,t) - \Delta_n \partial_t^2 U(x,t) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(a_j(x)\partial_j u(x,t)) = F(x,t) \qquad x \in \Omega \quad t > 0 \\
&U(s,t) = 0 \qquad s \in \Gamma \\
&\partial_\nu \partial_t^2 U(s,t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(s)\partial_j U(s,t) = g(s,t) \\
&U(x,0) = U_o(x), \quad \partial_t U(x,0) = U_1(x)
\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

在 $a_j \equiv 0$，$1 \leqslant j \leqslant n-1$ 以及 $a_n(x) = 1$ 的特殊情况下，上面的偏微分方程称为 Соболев 方程．

现在如取 $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$，令 $g \equiv 0$，则 $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{H}')$，如果再

设 $\Gamma = \partial\Omega$，则 $\mathbf{V} = \mathbf{H}_o^1(\Omega)$ 以及 $D(B) = \mathbf{H}_o^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \subset D(A)$，所以只要 U_o，$U_1 \in D(B)$，由定理 8.5.2 给出问题 (8.5.3) 的一个光滑解．

§8.6 二阶退化方程

现在我们讨论发展方程 (8.4.2)，此时 $\tilde{B}$ 不一定是一个 Hilbert 空间上的 Riesz 映射的情况．我们首先利用定理 8.4.1 或 8.4.2 求解与问题 (8.4.3) 类似的一阶方程组，然后证明此方程组的解的分量，在某种意义下是二阶发展方程 (8.4.2) 的解．最后当方程 (8.4.2) 中二阶项的 $\tilde{B}$ 不必一定是对称的情况下，给出它的适定性的讨论．

设 V 是 Hilbert 空间，$\tilde{A} \in \pounds(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 是 Riesz 映射，$\tilde{B} \in \pounds(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 以及与 $\tilde{B}$ 对应的半双线性形式在 V 上是对称的和非负的．从而与 §8.4 类似地有 $x \to \tilde{B}x(x)^{1/2}$ 是 V 上的半范．设 W 表示相应的半范空间．其次设 $D(E) \subset \mathbf{V}$ 以及 $E \in \pounds(D(E),\mathbf{V}')$ 是给定的．定义乘积空间 $\mathbf{V}_m = \mathbf{V} \times \mathbf{W}$，其半范是由对称非负的半双线性形式

$$m(x,y) = \tilde{A}x_1(y_1) + \tilde{B}x_2(y_2) \qquad \forall x,y \in \mathbf{V}_m$$

诱导出的．从而算子 $Z \in \pounds(\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_m')$ 定义为 $Zx(y) = m(x,y), \forall x,y \in \mathbf{V}_m$．最后定义 $D = \{[x_1,x_2] \in \mathbf{V} \times D(E)\colon \tilde{A}x_1 + Ex_2 \in \mathbf{W}'\}$ 以及 $L \in \pounds(D,\mathbf{V}_m')$ 定义为

$$L(x_1,x_2) = [-\tilde{A}x_2, \tilde{A}x_1 + Ex_2]$$

从而由定理8.3.1可得

定理 8.6.1 设 $\tilde{A}$ 是 Hilbert 空间 V 上的 Riesz 映射，W 是

由对称单调算子 $\tilde{B}\in \mathcal{L}(V,V')$ 得到的半范空间．其次设 $D(E)\subset V$，$E\in L(D(E),V')$ 是单调的．最后设 $E+\tilde{B}$ 是严格单调以及 $\tilde{A}+E+\tilde{B}$: $D(E)\to V'$ 是满的．而始值数据 $f\in C([0,\infty),W')$，$g\in C^1([0,\infty),V')$ 以及乘积空间 V_m，D 定义如上，则 $\forall\,[u_o,u_1]\in D$，存在唯一的函数 $w(\cdot)$: $[0,\infty)\to D$，使得 $Zw(\cdot)\in C^1([0,\infty),V_m')$ 满足

$$\begin{cases}(Zw)'(t)+Lw(t)=[-g(t),f(t)] & t\geqslant 0\\ Zw(0)=Z[u_o,u_1]\end{cases}\tag{8.6.1}$$

证　现在只需验证定理 8.3.1 的条件成立即可．首先注意 $N(Z)\cap D=\{[0,x_2]: x_2\in D(E),\ Ex_2\in W',\ \tilde{B}x_2=0\}$．但是如果 $y\in D(E)$ 且 $Ey\in W'$，则存在一个常数 $c\geqslant 0$，使得

$$|Ey(x)|\leqslant c|\tilde{B}x(x)|^{1/2}\qquad \forall x\in V$$

从而，如果 $\tilde{B}y=0$，就有 $|Ey(y)|\leqslant c|\tilde{B}y(y)|^{1/2}=0$．因此有

$$\mathrm{Re}(E+\tilde{B})x_2(x_2)=0\qquad \forall x=[0,x_2]\in N(Z)\cap D$$

又 $E+\tilde{B}$ 是严格单调的保证 $N(Z)\cap D=\{[0,0]\}$．最后，和定理 8.4.1 的证明一样，由 $\tilde{A}+E+\tilde{B}$ 是满的可推得 $Z+L$ 是满的，从而定理 8.3.1 的条件全部成立．证毕．

设 $w(t)$ 是问题 (8.6.1) 根据定理 8.6.1 得到的解，并且对每一个 $t\geqslant 0$，记 $w(t)=[u(t),v(t)]$．如果令 $g=0$，并从方程组 (8.6.1) 中消去 $v(t)$，则可得到 $u(t)$ 满足的等价的二阶发展方程．同时有

推论 8.6.1　设这里所用到的空间、算子和定理 8.6.1 中的相同．对每一个 $f\in C^1([0,\infty),W')$ 以及每组 $u_o\in V$，$u_1\in D(E)$，且 $\tilde{A}u_o+Eu_1\in W'$，则存在唯一的 $u(t)\in C^1([0,\infty),V)$ 使得 $\tilde{B}u'(t)$

$\in \mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{W}'), u(0)=u_o$, $\tilde{B}u'(0)=\tilde{B}u_1$ 以及对每一个 $t \geqslant 0$, $u'(t)\in D(E)$, $\tilde{A}u(t)+Eu'(t)\in\mathbf{W}$, 并且成立

$$(\tilde{B}u'(t))' + Eu'(t) - \tilde{A}u(t) = f(t) \tag{8.6.2}$$

类似地，由问题 (8.6.1) 的解得到的 $v(t)$ 也满足这个二阶方程.

推论 8.6.2 设给出的空间和算子与定理 8.6.1 相同. 如果 $F \in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{W}')$, $g\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$, $u_1\in D(E)$ 以及 $U_2\in\mathbf{W}'$, 则存在唯一的 $v(t)$: $[0,\infty)\to D(E)$, 使得 $\tilde{B}v(t)\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$, $(\tilde{B}v)' + Ev(t)\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$, $\tilde{B}v(0)=\tilde{B}u_1$, $(\tilde{B}v'+Ev)(0)=U_2+Eu_1$, 以及对每一个 $t\geqslant 0$, 有

$$((\tilde{B}v)'(t) + Ev(t))' + \tilde{A}v(t) = F(t) + g(t) \tag{8.6.3}$$

证 给定 $F(\cdot)\in C([0,\infty),\mathbf{W}')$, 定义 $f(\cdot)\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{W}')$ 为 $f(t)=\int_0^t F dt$. 又 u_1, U_2 如定理所给，则存在唯一的 $u_o\in\mathbf{V}$, 使得 $\tilde{A}u_o = -Eu_1 - U_2$, 从而 $\tilde{A}u_o + Eu_1\in\mathbf{W}'$. 由定理 8.6.1 给出唯一的解. 置 $w(t)=[u(t),v(t)]$, $\forall t\geqslant 0$, 则有 $\forall t\geqslant 0, v(t)\in D(E)$, $\tilde{B}v\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{W}')$ 以及 $\tilde{B}v(0)=\tilde{B}u_1$. 方程组 (8.6.1) 中的第二个方程变为

$$(\tilde{B}v)' + Ev = f - \tilde{A}u \in \mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$$

再由上面选取的 u_o, 给出 $(\tilde{B}v)'(0)+Ev(0)=U+Eu_1$. 从方程组 (8.6.1) 中消去 $u(t)$, 则可得到 (8.6.3), 从而得到 $v(t)$ 的存在性. 通过由方程 (8.6.1) 中第二个方程定义 $u(t)$ 并注意到 $w(t)=[u(t),v(t)]$ 是问题 (8.6.1) 的解，则可得到唯一性结论. 证毕.

最后，给出当 $\tilde{B}=0$ 时，推论 8.6.2 的一个重要的特例. 这也导出一个一阶发展方程的适定性问题. 但与 § 8.3 不同的是与

一阶导数有关的算子必是对称的.

推论 8.6.3 除了$\tilde{B}=0$以外，空间 V, $D(E)$和算子 E, $\tilde{A}$ 与定理 8.6.1 相同，从而 $\mathbf{W}'=\{0\}$, 则对每一个 $g\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$ 以及 $u_1\in D(E)$. 存在唯一的 v: $[0,\infty)\to D(E)$ 使得 $Ev(\cdot)\in\mathbf{C}^1([0,\infty),\mathbf{V}')$, 且

$$\begin{cases}(Ev)'(t)+\tilde{A}v(t)=g(t) & \forall t\geqslant 0\\ Ev(0)=Eu_1\end{cases}\tag{8.6.4}$$

下面的每一个结论都是与抛物型方程平行的.

定理 8.6.2 设$\tilde{A}$是 Hilbert 空间 V 的 Riesz 映射，W 是由对称单调算子$\tilde{B}\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$得到的半范空间，又设$\tilde{E}\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$是单调的并且对某个 $\lambda>0$, $\tilde{E}+\lambda\tilde{B}$ 是 V 椭圆的，则对每一组 Hoelder 连续函数 f: $[0,\infty)\to\mathbf{W}'$, g: $[0,\infty)\to\mathbf{V}'$ 以及每一组 $u_o\in\mathbf{V}$, $u_1\in\mathbf{W}'$, 存在唯一的函数 $w:[0,\infty)\to\mathbf{V}_m$ 使得

$Zw(\cdot)\in\mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{V}_m')\cap\mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{V}_m')$ 满足

$$\begin{cases}(Zw)'(t)+\tilde{L}w(t)=[-g(t),f(t)], & t>0\\ Zw(0)=[\tilde{A}u_o,u_1]\end{cases}\tag{8.6.5}$$

这里$\tilde{L}\in\mathcal{L}(\mathbf{V}\times\mathbf{V},\mathbf{V}'\times\mathbf{V}')$定义为

$$\tilde{L}[x_1,x_2]=[-\tilde{A}x_2,\tilde{A}x_1+\tilde{E}x_2]$$

Z的定义与定理8.6.1中的相同.

证 必要时，可以引进变量替换，从而可以用$\lambda Z+\tilde{L}$代替$\tilde{L}$, 因为对 $x=[x_1,x_2]\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}$, 有

$$\mathrm{Re}(\lambda Z+\tilde{L})x(x)=\lambda\tilde{A}x_1(x_1)+(\tilde{E}+\lambda\tilde{B})x_2(x_2)$$

所以可以假设$\tilde{L}$是 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ 椭圆的，从而由定理 8.3.2 得出所需结论. 证毕.

推论 8.6.4 设给出的空间和算子与推论 8.6.3 中的一样.

对每一个 Hoelder 连续函数 f: $[0,\infty)\to \mathbf{W}'$，$u_0\in\mathbf{V}$ 和 $u_1\in\mathbf{W}'$，存在唯一的解 $u(\cdot)\in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{V})\cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{V})$ 使得 $\tilde{B}u'(\cdot)\in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{W}')\cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{W}')$ 满足

$$\begin{cases}(\tilde{B}u'(t))'+\tilde{B}u'(t)+\tilde{A}u(t)=f(t), & t>0\\ u(0)=u_0 \\ \tilde{B}u'(0)=U_1\end{cases}\tag{8.6.6}$$

推论 8.6.5 设空间和算子与定理 8.6.1 中的相同．设 F: $(0,\infty)\to \mathbf{W}'$ 在除去有限个点以外所有的点上是连续的，对某个 $p>1$，对所有 $T>0$，有

$$\int_0^T \|f(t)\|_{\mathbf{W}'}^p dt<\infty$$

如果 g: $[0,\infty)\to \mathbf{V}'$ 是 Hoelder 连续的，$u_1\in\mathbf{V}$，$u_2\in\mathbf{V}'$，则存在唯一的解 $v(\cdot)$: $[0,\infty)\to\mathbf{V}$ 使得

$$\tilde{B}v\in \mathbf{C}([0,\infty),\mathbf{W}')\cap \mathbf{C}^1((0,\infty),\mathbf{W}'),\ (\tilde{B}v)'+\tilde{E}v\in \mathbf{C}([0,\infty),\ \mathbf{V}')$$

并且除去有限个点外，在所有点上都是连续可微的，$\tilde{B}v(0)=\tilde{B}u_1$，$(\tilde{B}v'+\tilde{E}v)(0)=u_2+\tilde{E}u_1$，在其导数存在的点上，下式成立

$$((\tilde{B}v)'(t)+\tilde{E}v(t))'+\tilde{A}(t)=F(t)+g(t).\tag{8.6.7}$$

证 几乎所有结论与推论 8.6.3 一样．但要注意，不同的是由本推论所给出的 $F(t)$，函数 $f(t)=\int_0^t F dt$ 满足

$$\|f(t)-f(\tau)\|_{\mathbf{W}'}\leqslant\int_\tau^t\|F\|_{\mathbf{W}'}\leqslant|t-\tau|^{1/q}\left(\int_\tau^t\|F\|_{\mathbf{W}'}^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant|t-\tau|^{1/q}\left(\int_0^T\|F\|_{\mathbf{W}'}^p\right)^{1/p}\quad\forall\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$$

这里 $1/q=1-1/p\geq 0$，从而，f 是 Hoelder 连续的．证毕．

§8.7 二阶发展方程Galerkin方法

本节中我们研究二阶发展方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\alpha\frac{du}{dt}+Au=f$$

用 Galerkin 方法证明它的解的存在性，用能量不等式证明解的唯一性．(涉及到部分非线性分析内容，请参阅附录 A.)

这里，仍然使用 §7.8 中所用的记号和相应的假设．如 $\mathbf{H},\mathbf{V}$ 为两个 Hilbert 空间，$\mathbf{H}$ 为主元空间，并且有连续嵌入关系，$\mathbf{V}\subset\mathbf{H}=\mathbf{H}'\subset\mathbf{V}'$,$(\cdot,\cdot)$, $((\cdot,\cdot))$ 分别记为 $\mathbf{H}$, $\mathbf{V}$ 的内积，$|\cdot|^2=(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|^2=((\cdot,\cdot))$ 为相应的范数，$\|\cdot\|_*$ 记为对偶空间 $\mathbf{V}'$ 的范数．

双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$ 的连续，对称和强制的．即

$$|a(u,v)|\leq M\|u\|\,\|v\|\qquad\forall u,v\in\mathbf{V}\tag{8.7.1}$$

$$a(u,u)\geq\alpha_o\|u\|^2\qquad\forall u\in\mathbf{V}\tag{8.7.2}$$

$$a(u,v)=a(v,u)\qquad\forall u,v\in\mathbf{V}\tag{8.7.3}$$

算子 A 是由 $a(\cdot,\cdot)$ 产生的线性有界算子，即 $a(u,v)=\langle Au,v\rangle$, $\forall u,v\in\mathbf{V}.A\in\pounds(\mathbf{V},\mathbf{V}')$, 由 (8.7.2) 和 (8.7.3) 可知，A 是强椭圆．自共轭的，特别是 $D(A)=\{u\in\mathbf{V}:\ Au\in\mathbf{H}\}$, 那么 A 在 $D(A)$ 上的限制是 $D(A)\to\mathbf{H}$ 的连续线性泛函，并且

$$a(u,v)=(Au,v)\qquad\forall u,v\in D(A)$$

定义 A 的幂算子 A^s，$s\in\mathbf{R}$，引入 Hilbert 空间 $\mathbf{V}_{2s}=D(A^s)$.

$$|u|_{2s}^2=(u,u)_{2s},\ (u,v)_{2s}=(A^su,A^sv)\forall u,v\in\mathbf{V}.$$

尤其是 $s=1/2$，$V_1=\mathrm{V}$，$(u,v)_1=(A^{1/2}u,A^{1/2}u)=(Au,v)$ $=a(u,v)$，$|u|_1^2=(u,u)_1=(A^{1/2}u,A^{1/2}u)=|A^{1/2}u|^2=a(u,u)$.

设 A 与 t 无关，且 f，u_o，u_1 满足如下条件

$$f\in \mathrm{L}^2(0,T;\ \mathrm{H}),\ u_o\in \mathrm{V},\ u_1\in \mathrm{H} \tag{8.7.4}$$

这里 $0<T<\infty$. 于是二阶发展方程的始值问题（或 Cauchy 问题）是：求 $u\in \mathrm{V}$，使得

$$\begin{cases} u''+\alpha u'+Au=f & (8.7.5)\\ u(0)=u_o,\quad u'(0)=u_1 & (8.7.6)\end{cases}$$

这里$u'=\dfrac{du}{dt}$.

V 是可分的 Hilbert 空间．令 $\{w_i\}$，$i=1,2,\cdots$ 为 V 中的线性独立完备系．那么始值问题 (8.7.5)，(8.7.6) 的 Galerkin 逼近解 u_m 为

$$u_m=\sum_{i=1}^{m} g_{mi}w_i \tag{8.7.7}$$

$$(u_m'',w_j)+\alpha(u_m',w_j)+a(u_m,w_j)=(f,w_j)$$
$$j=1,2,\cdots,m \tag{8.7.8}$$

$$u_m(0)=u_{om},\ u_m'(0)=u_{1m} \tag{8.7.9}$$

这里 u_{om}，u_{1m} 是 u_o，u_1 在 $\mathrm{V}_m=\mathrm{span}\{w_1,\ w_2,\cdots,w_m\}$ 上的投影，且

$$\lim_{m\to\infty} u_{om}=u_o \qquad \text{(在H中强收敛)}$$

$$\lim_{m\to\infty} u_{1m}=u_1 \qquad \text{(在H中强收敛)} \tag{8.7.10}$$

(8.7.7)—(8.7.9) 是一个常微分方程组的始值问题，它们

在$[0,T]$上存在唯一解u_m：

$$u_m, u_m' \in \mathbf{C}([0,T],\mathbf{V}),\ u_m'' \in \mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}) \tag{8.7.11}$$

在引理 7.7.1 中我们曾给出 Gronwall 引理．为了应用的需要，这里给出它的另一种表述．

引理8.7.1 如果$y(t)$满足

$$y'(t) \leqslant a(t) + Q(t)y(t) \tag{8.7.12}$$

那么 $y(t) \leqslant y(0)\exp\left(\int_0^t Q(s)ds\right) + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^t Q(\tau)d\tau\right)ds$

$$\leqslant [y(0) + \int_0^t a(\tau)d\tau]\exp\left(\int_0^t Q(\tau)d\tau\right) \tag{8.7.13}$$

证 由式(8.7.12)容易得

$$\frac{d}{dt}(y(t)\exp(-\int_0^t Q(\tau)d\tau)) \leqslant a(t)\exp(-\int_0^t Q(\tau)d\tau)$$

两边积分后，即可得到式(8.7.13). 证毕．

引理8.7.2 设w满足

$$w \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}),\ w' \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}) \tag{8.7.14}$$

$$w'' + Aw \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}) \tag{8.7.15}$$

那么，在一个零测集上修改以后，函数w满足

$$w \in \mathbf{C}([0,T],\mathbf{V}),\ w' \in \mathbf{C}([0,T],\mathbf{H}) \tag{8.7.16}$$

并且在广义意义下，有

$$(w'' + Aw, w') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'|^2 + a(w,w)) \tag{8.7.17}$$

证 如果 w 足够光滑(关于 t)，则式(8.7.17)是显然的．这是因为 A 是自共轭的．有

$$(Aw,w') = a(w.w') = \frac{1}{2}(a(w,w') + a(w',w))$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(w,w)$$

如果 w 满足 (8.7.14) 和 (8.7.15)，则可以延拓 w，使得

$$\tilde{w} = \begin{cases} \theta w & \text{在}[0,T]\text{的子区间上} \\ 0 & \text{在}\mathbf{R}\setminus[0,T]\text{上} \end{cases}$$

其中 $\theta \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R})$ 是一个截断函数：$0 \leqslant \theta \leqslant 1$；

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{在}[0,T]\text{上} \\ 0 & \text{在}\mathbf{R}\setminus[0,T]\text{上} \end{cases}$$

显然，$\tilde{w} \in L^2(\mathbf{R},\mathbf{V})$，$\tilde{w}' \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R},\mathbf{H})$，$\tilde{w}'' + A\tilde{w} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R},\mathbf{H})$. 令 $\tilde{w}_\varepsilon = \tilde{w} * \rho_\varepsilon$，$\rho_\varepsilon$ 为软化子（见 §1.8). 于是有 $\tilde{w}_\varepsilon \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R},\mathbf{V})$，故在 $\mathbf{R}$ 上成立

$$(\tilde{w}_\varepsilon'' + A\tilde{w}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\tilde{w}_\varepsilon'|^2 + a(\tilde{w}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)) \tag{8.7.18}$$

令 $\varepsilon \to 0$，则有式 (8.7.17) 对 w 成立，从而 θw 也成立．由 θ 的性质，可知式 (8.7.17) 对 w 在 $[0,T]$ 内成立．

余下，我们还须证明式 (8.7.16). 注意到式 (8.7.17) 左边属于 $\mathbf{L}^1(0,T)$. 另一方面，因 $a(w,w)/2$ 是 $\mathbf{V}$ 上等价范数，从而由 (8.7.17) 可以推出 $w' \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{H})$，$w \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{V})$，$w'' \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$. 由引理 4.3.3 可知，$w$ 是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{H}$ 的连续函数，w' 是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{V}'$ 的连续函数．由引理 7.8.2，w 也是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{V}$ 的连续函数，w' 也是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{H}$ 的连续函数．再一次利用 (8.7.17)，有 $t \to |w'(t)|^2 + a(w(t),w(t))$ 是 $[0,T]$ 上连续函数，从而 w 是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{V}$ 的强连续函数，w' 是 $[0,T]$ 到 $\mathbf{H}$ 的强连续函数．证毕．

引理 8.7.3 （能量不等式）

设 $u \in \mathbf{V}$ 是始值问题 (8.7.5)，(8.7.6) 的解．u_m 是它

的 Galerkin 逼近解，满足式(8.7.7), (8.7.8)和(8.7.9)，那么下面的能量不等式成立：$0 \leqslant t \leqslant T$

$$\|u(t)\|^2 + |u'(t)|^2 \leqslant c(\|u_o\|^2 + |u_1|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;\ H)}) \tag{8.7.19}$$

$$\|u_m(t)\|^2 + |u_m'(t)|^2 \leqslant c(\|u_o\|^2 + |u|_1{}^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;\ H)}) \tag{8.7.20}$$

其中 c 是与 u, u_m, m 无关的常数.

证 式(8.7.5)等价于

$$(u'',v) + \alpha(u',v) + a(u,v) = (f,v) \tag{8.7.21}$$

若令 $v = u'$, 则得

$$(u'',u') + \alpha|(u',u')| + a(u,u') = (f,u') \tag{8.7.22}$$

由引理8.7.2, 则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'|^2 + a(u,u)) + \alpha|u'|^2 = (f,u') \leqslant \frac{|f|^2}{4\alpha} + \alpha|u'|^2 \tag{8.7.23}$$

同样地有

$$(u_m'',v_m) + \alpha(u_m',v_m) + a(u_m,v_m) = (f,v_m) \quad \forall v_m \in V_m \tag{8.7.24}$$

取 $v_m = u_m'$, 得

$$\begin{aligned}&(u_m'',u_m') + \alpha|u_m'|^2 + a(u_m,u_m')\\ &= (f,u_m') \leqslant \frac{|f|^2}{4\alpha} + \alpha|u_m'|^2\end{aligned} \tag{8.7.25}$$

所以

$$\frac{d}{dt}(|u'|^2 + a(u,u)) \leqslant \frac{|f|^2}{2\alpha} \tag{8.7.26}$$

$$\frac{d}{dt}(|u_m'|^2 + a(u_m,u_m)) \leqslant \frac{|f|^2}{2\alpha} \tag{8.7.27}$$

两边积分，利用式(8.7.1)—(8.7.3)，可得式(8.7.19), (8.7.20). 证毕.

定理 8.7.1 设 $a(\cdot,\cdot)$ 满足式 (8.7.1) – (8.7.3), f, u_0, u_1 满足式 (8.7.4), 那么始值问题 (8.7.5), (8.7.6) 存在唯一解 u:

$$u\in \mathbf{C}([0,T];\mathbf{V}),\ u'\in \mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}) \tag{8.7.28}$$

证 式 (8.7.20) 表明 Galerkin 逼近解 u_m 在 $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})$ 中有界，u_m' 在 $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ 中有界．所以存在子序列，仍记为 u_m,u_m'，使得存在 $u\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})$, $u'\in\mathbf{L}(0,T;\mathbf{H})$ 满足

$$\begin{cases}\text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{V})\text{中}u_m\text{弱星收敛于}u\\ \text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})\text{中}u_m'\text{弱星收敛于}u'\end{cases} \tag{8.7.29}$$

这里，和 § 7.8 中证明类似，有 $u'=\dfrac{du}{dt}$．同样 u_m 也在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ 中有界，u_m' 在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ 中有界，故也有

$$\begin{cases}\text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})\text{中},\ u_m\text{弱收敛于}u\\ \text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})\text{中},\ u_m'\text{弱收敛于}u'\end{cases} \tag{8.7.30}$$

现在我们证明 u 是式 (8.7.5), (8.7.6) 的解．为此，引入连续函数空间

$$\mathbf{C}_T^1[0,T]=\{\varphi\in\mathbf{C}^1([0,T]):\ \varphi(T)=\varphi'(T)=0\}$$

作 $\quad \psi\equiv\sum_{j=1}^{k}\varphi_j w_j \qquad \forall\varphi_j\in\mathbf{C}_T'[0,T] \quad \varphi\in\mathbf{C}_T^1[0,T]$

对于$m>k$，从式(8.7.8)不难得到

$$(u_m'',\psi)+a(u_m,\psi)+\alpha(u_m',\psi)=(f,\psi)$$

对t积分后，利用

$$\int_0^T u_m''\psi\,dt=-\int_0^T(u_m',\psi')dt+u_m'(T)\psi(T)-u_m'(0)\psi(0)$$

得

$$\int_0^T [a(u_m,\psi) + \alpha(u'_m,\psi) - (u'_m,\psi')]dt$$

$$= \int_0^T (f,\psi)dt + u_{1m}\psi(0) \qquad (8.7.31)$$

进行极限过渡得

$$\int_0^T [a(u,\psi) + \alpha(u',\psi) - (u',\psi')]dt = \int_0^T (f,\psi)dt + u_1\psi(0) \quad (8.7.32)$$

由于 $\{w_i\}$ 是 V 的完全基，故 $\{\psi\}$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中稠密，且使得 $\psi'\in L^2(0,T;H), \psi(T)=0$. 因而，由式 (8.7.31) 可以得到在分布意义下，u 满足式 (8.7.5)，且

$$(u'',v) + \alpha(u',v) + a(u,v) = (f,v) \quad \forall v\in V \qquad (8.7.33)$$

对于 (8.7.33) 两边乘 φ，对 t 积分得

$$\int_0^T (a(u,v)\varphi + \alpha(u',v)\varphi - (u',v)\varphi')dt$$

$$= \int_0^T (f,v)\varphi dt + (u'(0),v)\varphi(0) \qquad (8.7.34)$$

与式 (8.7.32) 比较得 $u'(0)=u_1$.

若对式 (8.7.31) 和 (8.7.34) 中的项 $\alpha(u',\cdot)$ 再进行分部积分，然后进行极限过渡，相互比较，利用 $\varphi(0)$ 的任意性，同样可得 $u(0)=u_0$. 这样证明了 u 满足初始条件 (8.7.6).

现在，还须证明 u 满足式 (8.7.28). 利用引理 7.8.2 和式 (8.7.29) 可以得到 u 是 $[0,T]$ 到 V 的弱连续函数. 另外 $u''=f-\alpha u'-Au$. 由于 $f\in L^2(0,T;H)$，$u'\in L^\infty(0,T;H)$，$u\in L^\infty(0,T;V)$，$Au\in L^\infty(0,T;V')$，可以推出 $u''\in L^2(0,T;V')$. 利用引理 4.3.3 知 u 是 $[0,T]\to V'$ 的连续函数. 由定理 7.8.2 和

式 (8.7.29) 知 u' 是 $[0,T]\to\mathrm{H}$ 弱连续函数．利用引理 8.7.2 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'|^2+a(u,u))+\alpha|u'|^2=(f,u')$$

这表明 $t\to|u'(t)|^2+a(u(t),u(t))$ 在 $[0,T]$ 上连续．和上面讨论的弱连续性一起，可得

$$u\in\mathbf{C}([0,T];\mathrm{V}),\quad u'\in\mathbf{C}([0,T];\mathrm{H})$$

现在证明唯一性．设存在二个解 u, $\tilde{u}$. 令 $w=u-\tilde{u}$, 则

$$\begin{cases} w''+\alpha w'+Aw=0 \\ w(0)=0,\ w''(0)=0 \end{cases}$$

利用引理8.7.2, 有

$$\frac{d}{dt}(|w'|^2+a(w,w))+2\alpha|w'|^2=0$$

如果 $\alpha\geqslant 0$, 则得

$$|w'(t)|^2+a(w(t),w(t))\leqslant 0 \qquad \forall t \tag{8.7.35}$$

如果$\alpha<0$, 则

$$\frac{d}{dt}(|w'|^2+a(w,w))\leqslant -2\alpha\{|w'|^2+a(w,w)\}$$

利用引理 8.7.1, 同样可得式 (8.7.35), 故 $w(t)=0$, $\forall t\in[0,T]$. 证毕．

定理 8.7.2 在定理 8.7.1 假设下，Galerkin 逼近解 u_m 在下列意义下收敛于始值问题 (8.7.5), (8.7.6) 的解 u:

$$\text{在}\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{V})\text{中}u_m\text{强收敛于}u \tag{8.7.36}$$

$$\text{在}\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H})\text{中}u'_m\text{强收敛于}u' \tag{8.7.37}$$

证 始值问题(8.7.5), (8.7.6)等价于

$$\begin{cases} (u'',v)+\alpha(u',v)+a(u,v)=(f,v) \qquad \forall v\in\mathrm{V} & (8.7.38) \\ u(0)=u_o,\ u'(0)=u_1 & (8.7.39) \end{cases}$$

相应的Galerkin逼近解u_m满足

$$(u_m'', v) + \alpha(u_m', v) + a(u_m, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_m \tag{8.7.40}$$

$$u_m(0) = u_{om},\ u'(0) = u_{1m} \tag{8.7.41}$$

在 (8.7.38) 中取 $v = u'$，在 (8.7.40) 中取 $v = u_m'$，并利用式 (8.7.17) 则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'|^2 + a(u,u)) + \alpha|u'|^2 = (f, u')$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m'\right|^2 + a(u_m, u_m)\right) + \alpha\left|u_m'\right|^2 = (f, u_m')$$

两边在$[0,t]$上积分，则

$$\frac{1}{2}(|u'(t)|^2 + a(u(t),u(t))) + \alpha\int_0^t |u'(t)|^2 ds$$

$$= \int_o^t (f, u')ds + \frac{1}{2}(|u_1|^2 + a(u_o, u_o)) \tag{8.7.42}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + a(u_m(t), u_m(t))\right) + \alpha\int_0^t \left|u_m'(t)\right|^2 ds$$

$$= \int_0^t (f, u_m')ds + \frac{1}{2}\left(\left|u_{1m}\right|^2 + a(u_{om}, u_{om})\right) \tag{8.7.43}$$

令$$d_m(t) = \frac{1}{2}(|u'(t) - u_m(t)|^2 + a(u(t) - u_m(t), u(t) - u_m(t)))$$

$$+ \alpha\int_0^t |u'(s) - u'_m(s)|^2 ds \tag{8.7.44}$$

利用式(8.7.42), (8.7.43), 则$d_m(t)$可改写为

$$d_m(t) = \int_0^t (f, u + u_m)ds + (|u_1|^2 + a(u_o, u_o))/2$$

$$+ (|u_{1m}|^2 + a(u_{om}, u_{om}))/2 - (u'(t), u_m'(t))$$

$$- a(u(t),u_m(t)) - \alpha\int_0^t (u',u'_m)ds$$

利用定理 8.7.1 以及在 H 中，u_{1m} 强收敛于 u_1，在 V 中 u_{om} 强收敛于 u_o，则

$$\lim_{m\to\infty} d_m(t) = 2\int_0^t (f,u)ds + |u_1| + a(u_o,u_o)$$

$$- |u'|^2 - a(u(t),u(t)) - \alpha\int_0^t |u'|^2 ds$$

再一次利用式(8.7.42)得

$$\lim_{m\to\infty} d_m(t) = 0 \tag{8.7.45}$$

另一方面，由式(8.7.43)和(8.7.44)得

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;\ V)} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \|u' - u'_m\|_{L^\infty(0,T;\ H)} = 0$$

由此得式(8.7.36),(8.7.37).证毕.

定理 8.7.3 设 $s\in\mathbf{R}$，关于 $A, a(\cdot,\cdot)$ 的假设 (8.7.1) – (8.7.3) 成立，且

$$f\in L^2(0,T;V_s), u_o\in V_{s+1},\ u_1\in V_s \tag{8.7.46}$$

那么始值问题(8.7.5)，(8.7.6)存在唯一解u满足

$$u\in C([0,T];V_{s+1}),\quad u'\in C([0,T],V_s) \tag{8.7.47}$$

并且下列能量等式成立:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_{s+1}^2 + |u'|_s^2) + \alpha|u'|_s^2 = (f,u') \tag{8.7.48}$$

证 在定理 8.7.1 中，用 V_{s+1}，V_s，V_{s-1} 代替 V,H,V′，由于 A 的假设，A 是 V_{s+1} 到 V_{s-1} 上的同构映射，把 V_{s-1} 视

为 V_{s+1} 的对偶空间，那么 V_s 和它的对偶空间全同．所以式 (8.7.5),(8.7.6) 存在唯一解 u，它满足式 (8.7.47).

对于 $s=0$，式 (8.7.48) 与 (8.7.17) 相同．由于式 (8.7.5) 是线性的，所以两边作用 $A^{s/2}$ 后，再与 $A^{s/2}u$ 作 H 内积，则可得到对任何 s 成立的 (8.7.17)，即 (8.7.42) 成立．证毕．

定理 8.7.4　设定理 8.7.3 的条件对于 $s=1$ 时满足，那么相应的 Galerkin 逼近解 u_m，在下列意义下收敛于 (8.7.5), (8.7.6) 的解 u:

$$\text{在}L^{\infty}(0,T;V)\text{中},\ u_m\text{强收敛于}u \tag{8.7.49}$$

并且有估计式

$$\max(\|u_m-u\|_{L^{\infty}(0,T;\ V)},\|u_m'-u'\|_{L^{\infty}(0,T;\ H)})\leqslant cE \tag{8.7.50}$$

其中

$$E=\{\inf_{v\in V_m}|u_1-v|+\inf_{v\in V_m}\|u_o-v\|+\inf_{v\in V_m}\|u'-v\|_{L^{\infty}(0,T;\ V)}$$

$$+\inf_{v\in V_m}\|u''-v\|_{L^{\infty}(0,T;\ V)}\} \tag{8.7.51}$$

证　始值问题(8.7.15), (8.7.6)等价于

$$(u'',v)+\alpha(u',v)+a(u,v)=(f,v)\quad\forall v\in V \tag{8.7.52}$$

$$u(0)=u_o,\quad u'(0)=u_1 \tag{8.7.53}$$

而相应的Galerkin逼近解u_m满足

$$(u_m'',v)+\alpha(u_m',v)+a(u_m,v)=(f,v)\qquad\forall v\in V_m \tag{8.7.54}$$

$$u_m(0)=u_{om},\quad u_m'(0)=u_{1m} \tag{8.7.55}$$

其中u_{om}和u_{1m}为

$$\begin{cases}(u_{om},v)=(u_o,v)&\forall v\in V_m\\(u_{1m},v)=(u_1,v)&\forall v\in V_m\end{cases} \tag{8.7.56}$$

令 $e(t)=u(t)-u_m(t)$，那么 $e(0)=u(0)-u_{om}=u_o-u_{om}$，$e'(0)=u_1-u_{1m}$，于是

$$(e''(t),v)+\alpha(e',v)+a(e,v)=0 \qquad \forall v\in \mathbf{V}_m \tag{8.7.57}$$

$$e(0)=u_o-u_{om},\ e'(0)=u_1-u_{1m} \tag{8.7.58}$$

引入u的Galerkin投影$\tilde{u}$

$$a(\tilde{u},v)=a(u,v) \qquad \forall v\in \mathbf{V}_m \tag{8.7.59}$$

令$\tilde{e}(t)=u(t)-\tilde{u}(t)$，那么

$$a(\tilde{e}(t),v)=0 \qquad \forall v\in \mathbf{V}_m \tag{8.7.60}$$

利用(8.7.60)，$\forall v\in \mathbf{V}_m$，有

$$\alpha_o\|\tilde{e}(t)\|^2\leqslant a(\tilde{e},\tilde{e})=a(\tilde{e},u-v+v-\tilde{u})$$

$$=a(\tilde{e},u-v)\leqslant M\|\tilde{e}\|\|u-v\|$$

即 $$\|\tilde{e}(t)\|\leqslant M\|u-v\|/\alpha_o\leqslant c\inf_{v\in \mathbf{V}_m}\|u-v\| \tag{8.7.61}$$

同理有

$$\|\tilde{e}'(t)\|\leqslant c\inf_{v\in \mathbf{V}_m}\|u'-v\| \tag{8.7.62}$$

$$\|\tilde{e}''(t)\|\leqslant c\inf_{v\in \mathbf{V}_m}\|u''-v\| \tag{8.7.63}$$

上面最后三个不等式中$c=M/\alpha_o$.

引入$\tilde{e}_m(t)=\tilde{u}(t)-u_m(t)$，则

$$e(t)=\tilde{e}(t)+\tilde{e}_m(t) \tag{8.7.64}$$

$$\tilde{e}_m(0)=\tilde{u}(0)-u_m(0)=\tilde{u}(0)-u_{om},\ \tilde{e}_m'(0)=\tilde{u}'(0)-u_{1m}$$

$$\begin{cases}\tilde{e}_m(0)=\tilde{u}(0)-u_o+u_o-u_{om}=\tilde{e}(0)+u_o-u_{om}\\ \tilde{e}_m'(0)=\tilde{u}'(0)-u_1+u_1-u_{1m}=\tilde{e}'(0)+u_1-u_{1m}\end{cases} \tag{8.7.65}$$

将式(8.7.64)代入式(8.7.57)，得

$$(\tilde{e}''_m, v) + \alpha(\tilde{e}'_m, v) + a(\tilde{e}_m, v) = -(\tilde{e}''(t), v) - \alpha(\tilde{e}'(t), v)$$

令 $v = \left|\tilde{e}'_m(t)\right|$，并利用式(8.7.17)，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\tilde{e}'_m\right|^2 + a(\tilde{e}_m, \tilde{e}_m)\right) + \alpha\left|\tilde{e}'_m\right|^2$$

$$= -(\tilde{e}''(t), \tilde{e}'_m(t)) - \alpha(\tilde{e}'(t), \tilde{e}'_m(t))$$

$$\leqslant \left|\tilde{e}''(t) + \alpha\tilde{e}'(t)\right|^2 / 4\alpha + \alpha\left|\tilde{e}'_m(t)\right|^2$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\tilde{e}'_m\right|^2 + a(\tilde{e}_m, \tilde{e}_m)\right) \leqslant \left|\tilde{e}''(t) + \alpha\tilde{e}'(t)\right|^2 / 2\alpha$$

$$\left|\tilde{e}'_m(t)\right|^2 + a(\tilde{e}_m(t), \tilde{e}_m(t)) \leqslant \left|\tilde{e}'_m(0)\right|^2 + a(\alpha\tilde{e}_m(0), \tilde{e}_m(0))$$

$$+ (\|\tilde{e}''(t)\|^2_{L^2(0,T;\ H)} + \alpha\|\tilde{e}'(t)\|^2_{L^2(0,T;\ H)}) / 2\alpha$$

利用(8.7.65)，有

$$|\tilde{e}'_m(t)|^2 + \alpha_o\|\tilde{e}_m(t)\|^2 \leqslant |u_1 - u_{1m}|^2 + M\|u_o - u_{om}\|^2$$

$$+ |\tilde{e}'(0)|^2 + M\|\tilde{e}(0)\|^2 + (\|\tilde{e}''(t)\|^2_{L^2(0,T;\ H)}$$

$$+ \alpha\|\tilde{e}'(t)\|^2_{L^2(0,T;\ H)}) / 2\alpha$$

由于V连续嵌入H以及定理8.7.3则

$$\|\tilde{e}_m\|_{L^\infty(0,T;\ V)} \leqslant c(\inf_{v\in V_m}|u_1 - v| + \inf_{v\in V_m}\|u_o - v\|$$

$$+ \inf\|u' - v\|_{L^\infty(0,T;\ V)} + \inf\|u'' - v\|_{L^\infty(0,T;\ V)}) \qquad (8.7.66)$$

$$\|\tilde{e}'_m\|_{L^\infty(0,T;\ H)} \leqslant c(\inf_{v\in V_m}|u_1 - v| + \inf_{v\in V_m}\|u_o - v\|$$

$$+ \inf_{v\in V_m}\|u' - v\|_{L^\infty(0,T;\ V)} + \inf_{v\in V_m}\|u'' - v\|_{L^\infty(0,T;\ V)}) \qquad (8.7.67)$$

从而有(8.7.50).证毕.

§8.8 一般的双曲型方程

考察二阶双曲型方程

$$a^{ij}\partial_i\partial_j u + a^i\partial_i u + a(x)u = f(x) \tag{8.8.1}$$

式(8.8.1)在 x_o 处是双曲型的．如果二次型 $a^{ij}(x_o)\xi_i\xi_j$(上下指标相同表示从 1 到 $m+1$ 求和)的所有特征值都不是零，而且只有一个特征值的符号与其它所有特征值符号不同．今后总假设 $a^{ij}=a^{ji}$，经过变量替换 $y=g(x)$，使得在 $x=x_o$ 处，式(8.8.1)变为

$$\lambda_i(x_o)\partial_i^2 u + b^i(x_o)\partial_i u + b(x_o)u = f(x_o) \tag{8.8.2}$$

$\lambda^{n+1}(x_o)>0$，$\lambda_i(x_o)<0$，$(i=0,1,\cdots,n)$ 是 $a^{ij}(x_o)\xi_i\xi_j$ 的特征值．如果在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 开子集 Ω 的所有点上，式(8.8.1)都是双曲型的，那么称式(8.8.1)在 Ω 上是双曲型的．一般情形，当 $n+1>2$ 时，(8.8.1)在 Ω 上归结为式(8.8.2)形式是不可能的．但许多情况，可以归结为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_{n+1}^2} - b^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial^i u + bu = f \tag{8.8.3}$$

其中 $b^{ij}\xi_i\xi_j$ 在 Ω 是正定的．一个典型的双曲型方程就是波动方程

$$u_{tt} - c^2\Delta u = f \tag{8.8.4}$$

这里 Δ 是 Laplace 算子．在其它情况下式(8.8.1)也可以归结为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_{n+1}^2} + b^{i,n+1}\partial_{n+1}\partial_i u - b^{ij}(y)\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u + bu = f \tag{8.8.5}$$

但是第二项 $b^{i,n+1}\partial_{n+1}\partial_i u$ 本质上不影响我们的讨论，也不影响讨论的结果．所以我们只限讨论式 (8.8.3)，它代表了相当广泛一类双曲型方程．

变量 y_{n+1} 称为时间变量，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 称为空间变量，我们记它们为 x_i，$i = 1,2,\cdots,n$ 因此，我们只讨论如下形式的双曲型方程

$$Hu = u_{tt} - \partial_i(a^{ij}(x,t)\partial_j u) + a^o\frac{\partial u}{\partial t} + a_i(x,t)\partial_i u + a(x,t)u = f \tag{8.8.6}$$

$$\mu|\xi|^2 \geqslant a^{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma|\xi|^2 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \ a^{ij} = a^{ji} \tag{8.8.7}$$

其中上、下指标相同者表示从 1 到 n 求和．

在空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中存在三种类型曲面：

(1) 类空向曲面；(2) 类时向曲面；(3) 特征曲面．

记 $S(x,t) = 0$ 为这类曲面，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 如果在 $S = 0$ 上成立

$$\omega(s) \equiv \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - a^{ij}(x,t)\frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial s}{\partial x_i} > 0 \tag{8.8.8}$$

那么称 S 为关于式 (8.8.6) 的类空向曲面；如果在 $S = 0$ 上，$\omega(s) < 0$，则称 S 为 (8.8.6) 的类时向曲面；如果在 $S = 0$ 上

$$\omega(s) = 0 \tag{8.8.9}$$

则称 S 为式 (8.8.6) 的特征曲面．(8.8.4) 的特征曲面是

$$(t - t_o)^2 = c^{-2}\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_{io})^2 \tag{8.8.10}$$

它是过 (t_o,x_o) 的锥面．

(8.8.6)的定解条件有二种类型

(1) 始值问题，也称Cauchy问题

$$u\big|_{t=t_o}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_o}=\psi(x) \tag{8.8.11}$$

也就是说，对于 $t\in[t_o,T]$, $x\in\mathbf{R}^n$，求式 (8.8.6) 的解 u, 使得 u 满足式 (8.8.11). 通常作变换 $\tau=t-t_o$，则可以认为式 (8.8.11) 是在 $\tau=0$ 上给出．另外，φ, ψ 与式 (8.8.6) 是相互独立的．

$t=t_o$ 有时也称为 Cauchy 问题支柱．也可以选取类空向曲面 S 作为支柱，类空向曲面 S 把时空空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 分为两部分，Cauchy 问题就是在其中之一求解式 (8.8.6), 使得在 S 上满足

$$u\big|_S=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_S=\psi(x) \tag{8.8.12}$$

(2) 初边值问题　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为适当光滑的区域，$\partial\Omega=\Gamma$ 为它的边界，$\Gamma_T=\Gamma\times[t_o,T]$,$\Omega_T=\Omega\times[t_o,T]$, 那么 (8.8.6) 的初边值问题就是在 Ω_T 上求式 (8.8.6) 的解 u，使得

$$u\big|_{t=t_o}=\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_o}=\psi \tag{8.8.13}$$

$$u\big|_{\Gamma_T}=\chi(s,t) \tag{8.8.14}$$

或　$$\partial u/\partial n+\delta(s,t)u=\chi(x,t)\quad 在\ \Gamma_T\ 上 \tag{8.8.15}$$

其中 $\partial u/\partial n=a^{ij}\partial_i u\cdot n_j$，$n=(n_1,n_2,\cdots,n_n)$ 为 Γ 上单位外法线向量，以后总假定 $t_o=0$，并且

$$f(x,t)\in\mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{8.8.16}$$

为讨论方便，不妨设 $\chi(s,t)=0$. 因为对于非齐次边值条件，可

以用迹定理进行齐次化．所以设

$$\varphi(x)\in H_o^1(\Omega),\ \psi\in L^2(\Omega). \tag{8.8.17}$$

而方程系数满足一定的光滑性条件

$$\left|\partial a^{ij}/\partial x_i\right|\leqslant \mu_1,\quad \left|\partial a^{ij}/\partial t,\ a^i, a\right|\leqslant \mu_2 \tag{8.8.18}$$

对于初值问题，$\Omega=\mathbf{R}^n$，这时记 $Q_T=\mathbf{R}\times[0,T]$，取 Q_T 中一个有界区域 $D^\tau,\tau\leqslant T$，它与柱体 $k_1\times[0,\tau]=\{(x,t):|x|\leqslant 1,\ t\in(0,\tau)\}$ 同胚，并且具有如下性质，它的下底在 $t=0$ 平面上，上底在 $t=\tau$ 平面上，侧面上每个点，其侧面是类空向曲面，侧面之法线 $n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1})$ 指向 D_τ 外部的，并且与 t 轴成锐角，记 D_τ 的侧面为 S_τ，则类空向条件是

$$\omega(n)=\alpha_{n+1}^2-a^{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant 0 \tag{8.8.19}$$

$$\alpha_{n+1}=\cos(n,t)>0 \tag{8.8.20}$$

记 D_t 为 Q_t 与 $D_\tau(t\leqslant\tau)$ 相交部分，S_t 为 S_τ 与 $Q_t(t\leqslant\tau)$ 相交部分 .$\Omega(t)$ 为 D_c 与 $t=t$ 相截部分．

用 $2u_t$ 乘 (8.8.6) 两边，并在 D_t，$t\leqslant\tau$ 上积分

$$2\int_{Dt}Huu_t\,dxdt=2\int_{D_t}fu_t\,dxdt \tag{8.8.21}$$

分部积分后得

$$\begin{aligned}&2\int_{D_\tau}Huu_t\,dxdt\\&=\int_{D_t}(\partial u_k^2/\partial t+2a^{ij}\partial_i u\partial_j u_t+2a^i\partial_i uu_t+2auu_t)dxdt\\&\quad-\int_{s_t}2a^{ij}\partial_j uu_t\alpha_i\,ds\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega(t)} (u_t^2 + a^{ij}\partial_i u \partial_j u) dx |_{t=0}^{t=t}$$

$$+ \int_{D_k} ((-\partial a^{ij}/\partial t)\partial_i u \partial_j u + 2a^i \partial_i u u_t + 2auu_t) dx dt$$

$$+ \int_{st} [(u_t^2 + a^{ij}\partial_i u \partial_j u)\alpha_{n+1} - 2a^{ij}\partial_j u \alpha_i u_t] ds$$

(8.8.22)

把(8.8.22)写成

$$y(t) + \int_{st} g ds = y(0) + \int_{Dt} (\partial a^{ij}/\partial t \partial_i u \partial_j u - 2a^i \partial_i u u_t - 2auu_t + 2fu_t) dx dt \quad (8.8.23)$$

其中

$$y(t) = \int_{\Omega(t)} (u_t^2 + a^{ij}\partial_i u \partial_j u) dx \quad (8.8.24)$$

而g表示式(8.8.22)中在积分号$\int_{st}$中的被积表达式.

$$g = \alpha_{n+1}^{-1}[a^{ij}(\partial_i u \alpha_{n+1} - u_t \alpha_i)(\partial_j u \alpha_{n+1} - u_t \alpha_j) + u_t^2(\alpha_{n+1}^2 - a^{ij}\alpha_i \alpha_j)]$$

利用 (8.8.7) 和 (8.8.18) 以及 (8.8.23) 的右端积分项，有

$$y(t) \leqslant y(0) + c\int_0^t y(t) dt + c_1 \int_{D_t} u^2 dx dt + 2\int_0^t \|f\|_{o,\Omega(t)} y^{1/2}(t) dt \quad (8.8.25)$$

另一方面

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t u_\xi(x,\xi) d\xi \quad (8.8.26)$$

$$\int_{\Omega(t)} u^2 dxdt \leqslant 2\int_{\Omega(t)} u^2(x,0)dx + 2\int_{\Omega(t)} (\int_0^t u_t dt)^2 dx$$

$$\leqslant 2\int_{\Omega(0)} u^2(x,0)dx + 2t\int_{D_t} u_t^2 dxdt$$

$$\leqslant 2\int_{\Omega(0)} u^2(x,0)dx + 2t\int_0^t y(t)dt \qquad (8.8.27)$$

联合(8.8.25)和(8.8.27)，并记

$$Z(t) = \int_{\Omega(t)} (u^2 + u_t^2 + a^{ij}\partial_i u \partial_j u)dx$$

则

$$Z(t) \leqslant 2Z(0) + (c + c_1 + 2t)\int_0^t Z(t)dt +$$

$$+ 2\int_0^t \|f\|_{0,\Omega(t)} Z^{1/2}(t)dt \qquad (8.8.28)$$

令 $\hat{Z}(t) = \max\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant t} Z(\xi)$

显然有

$$\hat{Z}(t) \leqslant 2Z(0) + (c + c_1 + 2t)t\hat{Z}(t)$$

$$+ 2\|f\|_{L^1(0,T;\ L^2(\Omega(t)))} \hat{Z}^{1/2}(t)$$

从而对任何$t \leqslant \min(t_1,\tau)$，$t_1$是由$(c + c_1 + 2t)t_1 = \frac{1}{2}$确定，有

$$\hat{Z}^{1/2}(t) \leqslant 4Z^{1/2}(0) + 4\|f\|_{L^1(0,T;\ L^2(\Omega(t)))} \qquad (8.8.29)$$

如果 $t_1 < \tau$，取 $t = t_1$ 作为初值，则同样对任何 $t \leqslant \min(2t_1,\tau)$，有

$$\hat{Z}^{1/2}(t) \leqslant 4Z^{1/2}(t_1) + 4\|f\|_{L^1(0,T;\ L^2(\Omega(t)))} \qquad (8.8.30)$$

如果 $t - t_1$ 满足条件 $(c + c_1 + 2(t - t_1))(t - t_1) = 1/2$，那么对

任何 t_1, $t>t_1$, $t_1\in[0,\tau]$, (8.8.30) 也成立，从而 $\forall t\in[0,\tau]$ 有

$$\hat{Z}^{1/2}(t)=\max_{0\leqslant\zeta\leqslant t}\left(\int_{\Omega(\zeta)}(u^2+u_t^2+a^{ij}\partial_i u\partial_j u)dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c_2(t)Z^{1/2}(0)+c_3(t)\|f\|_{L^1(0,T;\ L^2(\Omega(t)))} \quad (8.8.31)$$

其中 $c_2(t)$, $c_3(t)$ 由 v, μ, μ_1 和 t 所确定.

(8.8.31) 就是能量不等式，由它可以推出 Cauchy 问题解的唯一性定理.

定理 8.8.1 设 (8.8.7), (8.8.18) 成立，那么 Cauchy 问题 (8.8.6) 和 (8.8.13) 在 Q_T 中不可能存在两个或两个以上属于 $H^2(D_\tau)$ 的解.

证 设式 (8.8.6) 和 (8.8.13) 有两个解 u', u''. 令 $u=u'-u''$，则 $Hu=0$, $u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=0$. 应用 (8.8.31), 则 $Z(t)=0$, 从而 $u\equiv 0$. 此即对任何 D_τ, $\tau\leqslant T$, 唯一性成立. 因而对 Q_T 也成立，证毕.

双曲型方程另一个重要性质是它所描述的扰动以有限的速度传播. 为了解释这个现象，设对初值有一个扰动 φ, ψ, 它们只在一个有界区域 Ω 上不为零，$f\equiv 0$. 设 $\Omega(t)$ 为 Ω 的一个 $\sqrt{\mu}\,t$ 邻域，即所有和 Ω 距离不超过 $\sqrt{\mu}\,t$ 的点的全体，其中 μ 是由式 (8.8.7) 所定义的常数. 那么，除了在 $\Omega(t)$ 之外，对应的解 $u(x,t)$ 均为零. 实际上，设 $\bar{x}$ 是离 $\Omega(t)$ 为 d 的点，那么我们可以构造一个对应于 (x,τ) 的 D_τ 型区域，其下底不与 Ω 相交，上底 $(t=\tau)$ 包含 $(\bar{x},\tau)$, 取一个轴在 $\{(x,t),\ x=\bar{x}\}$, 且与上底 $\{(x,t):|x-\bar{x}|<d,\ t=\tau\}$ 和下底 $\{(x,t):|x-\bar{x}|<d+\sqrt{\mu}\,t, t=0\}$ 相截的球的全体. 如果我们应用式 (8.8.31) 于区域 D_τ 上的

解，由于 $f\equiv 0, Z(0)=0$，就有 $u\equiv 0$(在 D_τ 内成立). 因而对 $x=\bar{x}$ 和 $t\in[0,\tau]$ 也有 $u\equiv 0$. 这就证明了初值的扰动在时间 τ 时传播不到离 Ω 大于 $\sqrt{\mu}\,t$ 以外的地方，此即在初值 $t=0$ 处的扰动，其传播速度不超过 $\sqrt{\mu}$，同样的结论，对右端的扰动也成立.

定理 8.8.2 双曲型方程 (8.8.6) 描述了扰动的传播，其传播速度不超过 $\sqrt{\mu}$，其中 μ 为由式 (8.8.7) 所定义的常数.

对于波动方程 (8.8.4) 扰动传播现象特别直观. 一维情形的 D′Alembert 解，或是三维的 Fourier 变换所得到的解，最容易解释定理 8.8.2. 这在经典的数学物理方程的教科书中都可以找到.

对于初边值问题 (8.8.6), (8.8.13), (8.8.14)(或 (8.8.15))，齐次化后，令 $x=0$，则初边值问题可以表示为

$$\begin{cases} Hu=f \quad \forall (x,t)\in\Omega_T \\ u\big|_{t=0}=\varphi, \quad u_t\big|_{t=0}=\psi \quad \forall x\in\Omega \\ u\big|_{\Gamma_T}=0 \quad \forall (x,\tau)\in\Gamma_T=\Gamma\times[0,t] \end{cases} \tag{8.8.32}$$

其中 $f\in \mathbf{L}^1(0,T;\ \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\varphi\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\psi\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ (8.8.33)

经过变量替换，可以使得 $a^0(x,t)=0$.这时

$$Hu=\partial^2 u/\partial t^2+Au$$

其中 $Au=-\partial_i(a^{i,j}\partial_j u)+a^i\partial_i u+au$. A 对应于双线性形式 $a(t;u,v)$:$\mathbf{H}_o^1(\Omega)\times\mathbf{H}_o^1(\Omega)\to R$:

$$a(t;u,v)=(a^{ij}(x,t)\partial_j u,\partial_i v)+(a^i\partial_i u,v)+(au,v)$$

并且 $a(t;u,v)$ 是对称连续和 $\mathbf{H}_o^1(\Omega)-\mathbf{L}^2(\Omega)$ 强制:

$$\begin{cases} a(t; u,v) = a(t; v,u) & \forall u,v\in \mathbf{H}_o^1(\Omega) \\ |a(t; u,v)| \leqslant M\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} & \forall u,v\in \mathbf{H}_o^1(\Omega) \\ a(t; u,u) \geqslant c_o\|u\|_{1,\Omega}^2 - \lambda\|u\|_o^2 & \forall u\in \mathbf{H}_o^1(\Omega) \end{cases} \tag{8.8.34}$$

由$a(t;\cdot,\cdot)$可以定义一个抽象的椭圆算子A

$$(Au,v) = a(t;u,v) \quad \forall u\in D(A),\ v\in \mathbf{H}_o^1(\Omega)$$

那么(8.8.32)等价于二阶发展方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + A(t)u = f \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases} \tag{8.8.35}$$

如果 $A(t)$ 与 t 无关，并且对应的双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{H}_o^1(\Omega)$ 强制的，那么本章中所讨论的二阶发展方程的理论可以用于式 (8.8.32).

如果 $A(t)$ 与 t 有关，和 Cauchy 问题一样，可以建立能量不等式

$$Z(t) \leqslant c_2(t)Z(0) + c_3(t)\|f\|_{\mathbf{L}^1(0,T;\ \mathbf{L}^2(\Omega))} \tag{8.8.36}$$

其中$c_2(t)$, $c_3(t)$是与t有关的常数，且

$$Z(t) = \int_{\Omega(t)} (u^2 + u_t^2 + a^{ij}\partial_i u\partial_j u)dx \tag{8.8.37}$$

定理 8.8.3 设式 (8.8.34) 成立，且 $t\to a(t,u,v)$ $(\forall u,v \in \mathbf{H}_o^1(\Omega))$ 在 $[0,T]$ 上是连续可微，f, φ, ψ 满足式 (8.8.33)，那么存在唯一函数 u 满足式 (8.8.35)，且

$$u\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}_o^1(\Omega)),\ u'\in \mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

$$u''\in \mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \tag{8.8.38}$$

证 首先我们可以建立一个能量不等式，事实上，(8.8.35)

等价于

$$(u''(t),v)+a(t;u,v)=(f,v)\quad \forall v\in \mathbf{H}_o^1(\Omega) \tag{8.8.39}$$

在上式中取$v=u_t$，则

$$\frac{d}{dt}(\|u_t\|_o^2+a(t;u(t),u'(t))+a(t;u'(t),\ u(t)))=2(f,u_t)$$

设 $a'(t,u,v)=da(t;u,v)/dt\quad \forall u,v\in \mathbf{H}_o^1(\Omega)$

则

$$\frac{d}{dt}(\|u_t\|_o^2+a(t;u,u))-a'(t;u,u)=2(f,u_t)$$

对t积分，得

$$a(t;u,u)+\|u_t\|_o^2=a(0,\varphi,\varphi)+\|\psi\|_o^2+2\int_0^T(f,u_t)dt$$

$$+\int_0^T a'(\sigma,u(\sigma),u(\sigma))d\sigma$$

$$\leqslant c\|\varphi\|_1^2+\|\psi\|_0^2+2\int_0^T\|f\|_o\cdot\|u_t\|_o dt+c\int_0^T\|u\|_1^2 d\sigma$$

利用(8.8.34)，则有

$$-\lambda\|u\|_o^2+\alpha\|u\|_1^2+\|u_t\|_o^2$$

$$\leqslant c(\|\varphi\|_1^2+\|\psi\|_o^2+\int_0^T\|u\|_1^2 d\sigma$$

$$+\int_0^T\|f\|_o^2 d\sigma+\int_0^T\|u_t\|_o^2 d\sigma)$$

注意$\|u\|_o^2\leqslant\|u\|_1^2$，于是

$$\|u\|_1^2+\|u_t\|_o^2\leqslant c(\|\psi\|_1^2+\|\psi\|_o^2+\|f\|_{L^2(0,T;\ L^2(\Omega))}^2)$$

$$+\int_0^T (\|u\|_1^2+\|u_t\|_o^2)d\sigma \tag{8.8.40}$$

利用Gronwall引理(引理7.7.1), 有

$$\|u(t)\|_1^2+\|u_t(t)\|_o^2 \leqslant c(\|\varphi\|_1^2+\|\psi\|_o^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;\ L^2(\Omega))}) \tag{8.8.41}$$

这就是所求的能量不等式.

现在可以运用 Galerkin 方法证明解的存在性. 为此令 $\{w_i\}$, $i=1,2,\cdots$ 为 $H_o^1(\Omega)$ 的基函数, 且 $V_m=\mathrm{span}\{w_1,\cdots,w_m\}$, Galerkin逼近解可以表示为

$$u_m=\sum_{i=1}^{n} g_{im}(t)w_i \tag{8.8.42}$$

$g_{im}(t)$可以由下列Galerkin方程得到

$$(u_m''(t),w_j)+a(t_j u_m,w_j)=(f,w_j),\ j=1,\cdots,m \tag{8.8.43}$$

$$g_{im}(0)=\xi_{im}\ ,g_{im}'(0)=\eta_{im} \tag{8.8.44}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\xi_{im}w_i=\varphi\quad 在H_o^1(\Omega)中 \tag{8.8.45}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\eta_{im}w_i=\psi\quad 在L^2(\Omega)中 \tag{8.8.46}$$

式 (8.8.43), (8.8.44) 是常微分方程始值问题, 它有唯一解, 并且有

$$\|u_m\|_1^2+\|u_m'\|_o^2\leqslant c(c与m无关)$$

从而

$$在L^2(0,T;H_o^1(\Omega))中u_m有界 \tag{8.8.47}$$

故有子序列, 仍记为 u_m, 使得在 $L^2(0,T;H_o^1(\Omega))$ 中 u_m 弱收敛于 u; 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中, u_m' 弱收敛于 u'.

和定理 8.7.1 一样，可知 u 是式 (8.8.35) 的解.

为了证明唯一性，设 u 是 (8.8.35) 的解，其中 $f\equiv 0,\varphi=\psi=0$，对 $s\in(0,T)$，构造

$$v=\begin{cases}-\int_t^s u(\sigma)d\sigma & t<s\\ 0 & t\geqslant s\end{cases}$$

显然$\int_0^T (A(t)u+u'',v)dt=0$

分部积分后，有$\int_0^T (a(t;u,v)-(u',v'))dt=0$或

$$\int_0^s (a(t;v',v)-(u',u))dt=0$$

从而

$$\int_0^s \frac{d}{dt}(a(t,v,v)-\|u\|_o^2)dt-\int_0^s a'(t;v,v)dt=0$$

$$a(0,v(0),v(0))+\|u(s)\|_o^2=\int_0^s a'(t;v,v)dt$$

由此得出

$$\|v(0)\|_1^2+\|u(s)\|_o^2\leqslant c\left(\int_0^s \|v\|_1^2dt+\|v(0)\|_o^2\right) \quad (8.8.48)$$

如果令$w(t)=\int_0^t u(\sigma)d\sigma$，则

$$\|w(s)\|_1^2+\|u(s)\|_o^2\leqslant c_1\left(\int_0^s \|w(t)-w(s)\|_1^2dt+\|w(s)\|_o^2\right)$$

$$(1-2c_1s)\|w(s)\|_1^2+\|u(s)\|_o^2\leqslant c_2\int_0^s (\|w(t)\|_1^2+\|u(t)\|_o^2)dt$$

取s_o使得$(1-2c_1s_o)=1/2$，那么$\forall s\leqslant s_o$，有

$$\|w(s)\|_1^2 + \|u(s)\|_o^2 \leqslant c_3\int_0^3 (\|w(t)\|_1^2 + \|u(t)\|_o^2)dt \tag{8.8.49}$$

从而立即可推出 u 在 $[0,s_o]$ 中为零，但 s_o 与选取的起点无关，故 u 也是在 $[s_o,2s_o]$ 中为零，如此下去，可得唯一性．证毕．

第九章　Navier-Stokes 方程

Navier-Stokes 方程(N-S 方程)是描述流体运动的一般方程，它是在最一般的条件下得到的，本质上只利用了最简单的假设，例如粘性应力张量和变形速率张量之间的局部的线性关系是运用牛顿第二定律而得到的.在很多理论研究领域中，例如航天航空科学、地球物理科学、水动力学、石油工业、等离子体物理等等，或者是单独出现，或者是与其他方程耦合出现.

N-S 方程又是非线性的.非线性项(ugrad)u 是来自动力学，并非来自物理假设，因此，它是不可改变的，即使现在泛函分析工具得到充分利用，我们对 N-S 方程的理解还远不够透彻.

这一章的目的，是从三个方面来研究 N-S 方程.

(1) 存在性、唯一性和正则性.自从 J.Leray 的工作以来，这个问题得到了局部解决. 只要定解数据足够光滑，N-S 方程始值问题在时间区间$(0,T_*)$上是有唯一的光滑解. 然而，这样的光滑解能否可以延拓到$(0,\infty)$尚不得而知，如果这个问题的回答是否定的，那么人们关心的则是奇性的问题，它不但对数学家有吸引力，而且物理学家也是非常感兴趣的. 按照 J.Leray 关于湍流的猜想，在三维空间中，N-S 方程弱解是不光滑的，其速度和涡波(速波和旋度)在某些点或某些集合上变成无限大，这就是发生湍流的地方.

虽然奇异点集的研究，已得到很多结果，例如 B.Mandelbrot,V.scheffer,L.Caffarelli-R.Kohn-L.Nirenberg, C.Foias-R.Temam 关于解的奇异点集 Hausdorff 维数的研究等等，然而这样的问题，还远没有解决.

(2) 渐近行为.如果体积力和边界速度与时间无关而时间又不显含在 N-S 方程里，问题变成为无限维动力系统的自治问题. 这

时，N-S方程解的渐近行为(即 $t\to+\infty$ 时解的性态)特别引人注目，当体积力和速度边界值很微小时，那么N-S方程存在唯一稳定的定常解，而时间相关解当 $t\to+\infty$ 时收敛于这个定常解;如果体积力很大，那么当 $t\to+\infty$ 时，解趋于时间周期解或者更为复杂的吸引子，它的渐近行为呈现了浑沌现象.这种浑沌行为是湍流的另一种解释.现在，湍流的两种解释，即奇性和渐近的浑沌行为，都可能出现在N-S方程里.然而，N-S方程解的渐近行为，很多问题，尚未解决.例如 $t\to+\infty$ 时，N-S方程解收敛于稳定的定常解，还是与分叉理论相联系的时间的周期解，还是更为复杂的吸引子?尤其是三维空间情形尚待解决.

(3) 数值解.N-S方程在科学和工程领域中是很重要，并且具有代表性的问题.由于很难找到N-S方程的精确解，所以人们只能从数值解来了解N-S方程解的性态.然而，计算方面的困难是计算机资源上尚不能适应N-S方程数值解的需求，同时又由于解的高度振荡，使得选取所需要的信息成为困难.

这一章的内容大致这样安排， 首先讨论Stokes方程和Stokes算子，证明它的解的存在性，它相应的变分问题和共轭梯度算法，讨论抽象的Stokes算子的很多性质，它们在研究N-S方程时是必不可少的.其次是讨论N-S方程的定常解，解的存在，唯一和多解问题.最后讨论N-S方程非定常解，它的能量不等式，弱解的存在唯一，强解的存在唯一以及解的渐近行为，解的奇异点集和吸引子等问题.

§9.1 Stokes方程

不可压缩粘性流体力学的Navier-Stokes方程是

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u})=\mathrm{div}\sigma+\rho\mathbf{f}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$$

这里 $\mathrm{div}\sigma$ 为流体应力张量之散度 $\mathrm{div}\sigma = \{\nabla_j \sigma^{ij},\ i = 1,2,3\}$. 对 Newton 流体，本构方程为

$$\sigma^{ij} = -p\delta^{ij} + 2\mu D^{ij}(\mathbf{u})$$

$$D^{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i)$$

$\nabla_i u^j$ 为速度之协变导数，$\nabla^i u^j$ 为逆变导数，在直角坐标系下，协变导数等于逆变导数，也等于普通导数. ρ 为流体密度，令 $P = p/\rho$, $\nu = \mu/\rho$ 表示动压力和动力粘性系数，利用 $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$ 和欧氏空间张量导数可交换次序得

$$\nabla_j D^{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_j \nabla^i u^j + \nabla_j \nabla^j u^i) = \frac{1}{2}(\nabla^i \mathrm{div}u + \Delta u^i) = \frac{1}{2}\Delta u^i$$

并引入流动 Reynolds 数

$$Re = LU/\nu, \quad \lambda = Re^{-1}$$

其中 L, U 分别为参考长度，参考速度. 无量纲化 t/T, x/L 和 $\mathbf{u}/U$ (这里 $T = L/\nu$) 后， 再将压力和外力用 $P/\rho U^2$, Lf/U^2 来代替，那么 Navier-Stokes 方程可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot \mathrm{grad})\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,p - \lambda\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{9.1.1}$$

边界条件

$$\mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad \int_\Gamma \mathbf{g}\mathbf{n}\,ds = 0 \tag{9.1.2}$$

这里 $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n$.

当流动是定常时，并且要么速度比较小，要么粘性比较

大，这时可以略去惯性项 $(\mathbf{u}\cdot \text{grad})\mathbf{u}$, 则得到定常的 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\mathbf{u}+\text{grad}\,p=f \\ \text{div}\mathbf{u}=0 \end{cases} \tag{9.1.3}$$

由于引理 4.6.2, 可知存在 $\mathbf{u}_0\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n$ 使得 $\text{div}\mathbf{u}_o=0$, $\mathbf{u}_o|_\Gamma=g$, 若令 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$, 则 $\mathbf{w}$ 满足齐次 Dirichlet 边界条件，而方程 (9.1.3) 中 $\mathbf{f}$ 用 $\mathbf{f}+\lambda\Delta\mathbf{u}_o$ 来代替 (仍记为 $\mathbf{f}$), 所以通常考虑齐次 Dirichlet 边界条件的 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\mathbf{u}+\text{grad}\,p=\mathbf{f} \\ \text{div}\mathbf{u}=0 & (9.1.4) \\ u|_\Gamma=0 & (9.1.5) \end{cases}$$

引入记号 $\mathbf{X}=(\mathbf{H}^1(\Omega))^n$, $\mathbf{X}_o=(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$, $\mathbf{M}=\mathbf{L}_0^2(\Omega)=\{q\in\mathbf{L}^2(\Omega)\colon \int_\Omega q\,dx=0\}$, $\mathbf{V}=\{\mathbf{u}\in\mathbf{X}_o:\text{div}\mathbf{u}=0\}$. 同样引入双线性形式：$\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}$

$$a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})=\lambda(\text{grad}\mathbf{u},\text{grad}\mathbf{v})$$

$$=\sum_{ij=1}^{n}\lambda\int_\Omega\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}dx \qquad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{X} \tag{9.1.6}$$

和 $\mathbf{X}\times\mathbf{M}\to\mathbf{R}$

$$b(\mathbf{v},q)=-(q,\text{div}\mathbf{v}) \tag{9.1.7}$$

那么 Stokes 问题 (9.1.4) 和 (9.1.5) 的原始变量变分形式为

$$(Q)\begin{cases} \text{求}(\mathbf{u},p)\in\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}, \text{使得} \\ a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle & \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o \\ \qquad b(\mathbf{u},q)=0 & q\in\mathbf{M} \end{cases} \tag{9.1.8}$$

与问题 (Q) 相对应的，问题 (P) 是

$$(P)\begin{cases} \text{求}\mathbf{u}\in\mathbf{V}, \text{使得} \\ a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle & \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V} \end{cases} \tag{9.1.9}$$

双线性形式 $a_o(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 满足如下性质

(1) $a_o(\cdot,\cdot)$是对称的，$a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_o(\mathbf{v},\mathbf{u})\ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathbf{X}$ (9.1.10)

(2) $a_o(\cdot,\cdot)$是连续的，$\left|a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \leqslant \lambda|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1$

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathbf{X} \tag{9.1.11}$$

实际上，利用Cauchy不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^i}{\partial X^j}\frac{\partial v^i}{\partial X^j} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)^2}\sqrt{\sum_{j}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)^2}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)^2}$$

再利用 Hoelder 不等式就可以得到式 (9.1.11).

(3) $a_o(\cdot,\cdot)$是$\mathbf{X}_o$强制的，$a_o(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \lambda|\mathbf{u}|_1^2\ \ \forall \mathbf{u}\in \mathbf{X}_o$ (9.1.12)

(4) $b(\cdot,\cdot)$满足BB条件

$$\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{V}}\frac{b(\mathbf{v},q)}{|\mathbf{v}|_1} \geqslant \beta\|q\|_o \qquad \forall q\in \mathbf{M} \tag{9.1.13}$$

实际上，$\forall q\in \mathbf{M}$，由推论 4.6.4 知存在唯一的 $\mathbf{v}_o\in \mathbf{V}^{\perp}$ 使得

$$\mathrm{div}\mathbf{v}_o = q \qquad \left|\mathbf{v}_o\right|_1 \leqslant c\|q\|_o$$

因而

$$\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{V}}\frac{b(\mathbf{u},q)}{|\mathbf{v}|_1} \geqslant \frac{(q,\mathrm{div}\mathbf{v}_o)}{\left|\mathbf{v}_o\right|_1} = \frac{\|q\|_0^2}{\left|\mathbf{v}_o\right|_1} \geqslant c^{-1}\|q\|_o$$

从而得到式(9.1.13)

定理 9.1.1　设 $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ 为有界开集，具有 Lipschitz 连续边界 Γ. 设 $\mathbf{f}\in(H^{-1}(\Omega))^n$，$\mathbf{g}\in(H^{1/2}(\Gamma))^n$. 且满足式 (9.1.2)，那么 Stokes 问题 (9.1.3) 和 (9.1.2) 有唯一解 $(\mathbf{u},p)\in(\mathbf{u}_o+\mathbf{X}_o)\times \mathbf{M}$，并且

$$|\mathbf{u}|_1 + \|p\|_o \leqslant c(\|\mathbf{f}\|_{-1} + \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}) \tag{9.1.14}$$

证　我们只须证明问题 (Q) 有唯一解就可以了．利用定理 5.2.1 知，问题 (Q) 存在唯一解．并且

$$|\mathbf{u}|_1 + \|p\|_o \leqslant |\mathbf{u}_o|_1 + \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_o\|_1 + \|p\|_o \leqslant c(\|g\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{f}\|_{-1})$$

证毕．

双线性形式 $a_o(\cdot,\cdot)$ 也可以表示为

$$a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 2\lambda(D_{ij}(\mathbf{u}),D_{ij}(\mathbf{v})) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathrm{V} \tag{9.1.15}$$

并且成立Korn不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij}(\mathbf{u})\|_o^2 + \|\mathbf{u}\|_o^2 \geqslant \alpha\|\mathbf{u}\|_1^2 \qquad \forall \mathbf{u}\in \mathrm{X}_o,\ \alpha>0 \tag{9.1.16}$$

这里，下标相同者也表示求和．

为了证明式(9.1.15)和(9.1.16)，我们先建立等式

$$(D_{ij}(\mathbf{u}),D_{ij}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\mathbf{u},\mathrm{div}\mathbf{v})$$

$$+ \oint_\Gamma [(\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{u}]ds \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{X} \tag{9.1.17}$$

实际上

$$(D_{ij}(\mathbf{u}),D_{ij}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nabla_i \mathbf{u}_j,\nabla_j \mathbf{v}_i)$$

但是

$$(\nabla_i u_j,\nabla_j v_i) = \int_\Gamma (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}ds - \int_\Omega (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathrm{div}\mathbf{u}dx$$

$$= \oint_\Gamma ((\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{ds} + (\mathrm{div}\mathbf{u},\mathrm{div}\mathbf{v})$$

于是可得式(9.1.17)．由式(9.1.17)立即可得

$$(D_{ij}(\mathbf{u}),D_{ij}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\mathbf{u},\mathrm{div}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{X}_o \tag{9.1.18}$$

$$(D_{ij}(\mathbf{u}),D_{ij}(\mathbf{v}))=\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\mathbf{u},\mathrm{grad}\,\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\tag{9.1.19}$$

$$\|D_{ij}(\mathbf{u})\|_o^2=\frac{1}{2}|\mathbf{u}|_1^2+\frac{1}{2}\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_o^2\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{X}_0\tag{9.1.20}$$

由此立即可得Korn不等式(9.1.16).

由推论 5.2.1 和式 (9.1.13) 知问题 (P) 和问题 (Q) 等价. 问题 (P) 是有约束变分问题, 下面讨论对应的鞍点问题.

令

$$J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}a_o(\mathbf{u},\mathbf{u})-\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\tag{9.1.21}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u},g)=J(\mathbf{u})-(g,\mathrm{div}\,\mathbf{u})\tag{9.1.22}$$

$X(\mathbf{g})=\{\mathbf{v}\in\mathbf{X},\ \mathbf{v}|_\Gamma=\mathbf{g}\}$, 那么有

定理 9.1.2 在定理 9.1.1 的假设下, Stokes 问题 (9.1.3) 和 (9.1.2) 的解 $(\mathbf{u},p)$ 满足

$$\mathcal{L}(\mathbf{u},p)=\min_{\mathbf{v}\in X(\mathbf{g})}\sup_{g\in M}\mathcal{L}(\mathbf{v},g)=\max_{g\in M}\inf_{\mathbf{v}\in X(\mathbf{g})}\mathcal{L}(\mathbf{v},g)\tag{9.1.23}$$

证 设$\mathbf{u}_0\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0=0,\ \mathbf{u}_0|_\Gamma=\mathbf{g}$, 令$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$,

$$\mathcal{L}_o(\mathbf{w},q)=\mathcal{L}(\mathbf{w},q)+a_o(\mathbf{u}_0,\mathbf{w})$$

则 $\mathbf{w}$ 是 $\mathcal{L}_o$ 在 $\mathbf{X}_0\times\mathbf{M}$ 中的鞍点, 由于 $\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0=0$, 故

$$\mathcal{L}(\mathbf{u},q)\leqslant\mathcal{L}(\mathbf{u},p)\leqslant\mathcal{L}(\mathbf{u}_0+\mathbf{w},p)\quad\forall\mathbf{w}\in\mathbf{X}_0,q\in\mathbf{M}$$

因而 $(\mathbf{u},p)$ 是 $\mathcal{L}$ 在 $(\mathbf{u}_0+\mathbf{X})\times\mathbf{M}$ 上的唯一鞍点, 但是 $\mathbf{u}_0+\mathbf{X}_0=X(\mathbf{g})$, 由定理 5.2.5 就可以得到式 (9.1.23). 证毕.

设 $V(\mathbf{g})=\{\mathbf{v}\in\mathbf{X}:\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,\ \mathbf{v}|_\Gamma=\mathbf{g}\}$

则问题(P)等价于 $J(\mathbf{u})=\inf\limits_{\mathbf{v}\in V(\mathbf{g})}J(\mathbf{v})$ (9.1.24)

考察边值问题

求$\mathbf{u}(q)\in\mathbf{x}$, 使得

$$-\lambda\Delta\mathbf{u}(q)=\mathbf{f}-\mathrm{grad}q \quad \text{在}\Omega\text{内}$$

$$\mathbf{u}|_\Gamma=\mathbf{g} \tag{9.1.25}$$

令 $$k(q)=\frac{1}{2}a_o(\mathbf{w}(q),\mathbf{w}(q)),\quad \mathbf{w}(q)=\mathbf{u}(q)-\mathbf{u}_o \tag{9.1.26}$$

那么问题(Q)的压力p也是下列极小化问题的解

$$K(p)=\min_{q\in\mathbf{M}}k(q)$$

为了消除压力，使用加罚方法

$\forall\varepsilon>0$，求$(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$使得

$$\begin{cases}-\lambda\mathbf{u}_\varepsilon+\mathrm{grad}\,p_\varepsilon=\mathbf{f} \quad \text{在}\Omega\text{内} & (9.1.27)\\ \varepsilon p_\varepsilon+\mathrm{div}\mathbf{u}_\varepsilon=0 \quad \text{在}\Omega\text{内} & (9.1.28)\\ \mathbf{u}_\varepsilon\big|=\mathbf{g} & (9.1.29)\end{cases}$$

或 $$-\lambda\Delta\mathbf{u}_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{u}_\varepsilon=\mathbf{f} \quad \text{在}\Omega\text{内} \tag{9.1.30}$$

定理 9.1.3 设定理 9.1.1 的假设成立，那么(9.1.27)～(9.1.29)存在唯一解$(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M}$，并且成立下列估计

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}\|_1+\|p_\varepsilon-p\|_0\leqslant c\varepsilon(\|\mathbf{f}\|_{-1}+\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}) \tag{9.1.31}$$

其中常数c与$\varepsilon,\mathbf{f},\mathbf{g}$无关.

证 证明方法类似于定理 5.2.6. 作为练习留给读者，证毕.

如果做如下拓展

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon=\mathbf{u}_\varepsilon+\sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m\mathbf{u}_m,\quad \tilde{p}_\varepsilon=p_\varepsilon+\sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m p_m \tag{9.1.32}$$

其中$(\mathbf{u}_m,p_m)$由下列方程得到

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{u}_m+\mathrm{grad}\,p_m=0 \quad \text{在}\Omega\text{内}\\ \mathrm{div}\mathbf{u}_m=-p_{m-1} \quad \text{在}\Omega\text{内}\\ \mathbf{u}_m\big|_\Gamma=0\end{cases} \tag{9.1.33}$$

那么由定理5.2.7可以得到下列误差估计

$$\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_1+\|p-\tilde{p}_\varepsilon\|_o\leqslant c_m\varepsilon^{m+1}(\|\mathbf{f}\|_{-1}+\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma})\quad(9.1.34)$$

在数值计算方面，可以采用如下三种方法:

1　**简单梯度算法**

(1) 给出$p_o\in\mathbf{M}$，解下列椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{u}_o-r\,\mathrm{grad\,div}\mathbf{u}_o=\mathbf{f}-\mathrm{grad}p_o & 在\Omega内\\ \mathbf{u}_o=\mathbf{g} & 在\Gamma上\end{cases}\quad(9.1.35)$$

(2) 设$m\geqslant0,(\mathbf{u}_m,p_m)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M},\ u_m\big|_\Gamma=\mathbf{g}$已知，

$$\begin{cases}求\mathbf{z}_m\in\mathbf{X}_o使得\\ -\lambda\Delta\mathbf{z}_m-r\,\mathrm{grad\ div}\mathbf{z}_m=\mathrm{grad\ div}\mathbf{u}_m & 在\Omega内\\ \mathbf{z}_m=0\quad 在\Gamma上\end{cases}\quad(9.1.36)$$

计算$\rho_m=-\|\mathrm{div}\mathbf{u}_m\|_o^2/(\mathrm{div}\ \mathbf{u}_m,\mathrm{div}\mathbf{z}_m)$　(9.1.37)

(3) 计算$\mathbf{u}_{m+1},p_{m+1}$

$$p_{m+1}=p_m-\rho_m\mathrm{div}\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_{m+1}=\mathbf{u}_m+\rho_m\mathbf{z}_m\quad(9.1.38)$$

2　**共轭梯度法**

(1) 给出$p_o\in\mathbf{M}$,解(9.1.35)

(2) $\forall m\geqslant0,(\mathbf{u}_m,p_m)\in\mathbf{X}\times\mathbf{M},\ \mathbf{u}_m\big|_\Gamma=\mathbf{g}$已知，计算

$$\begin{cases}\sigma_m=\|\mathrm{div}\ \mathbf{u}_m\|_o^2/\|\mathrm{div}\ u_{m-1}\|_o^2\\ \omega_m=\mathrm{div}\ \mathbf{u}_m+\sigma_m\omega_{m-1}\end{cases}\quad(m>1)$$

$$\omega_o=\mathrm{div}\ \mathbf{u}_o$$

解下列椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{z}_m-r\,\mathrm{grad\ div}\mathbf{z}_m=\mathrm{grad}\omega_m & 在\Omega内\\ \mathbf{z}_m=0 & 在\Gamma上\end{cases}$$

计算$\rho_m = \|\text{div}\mathbf{u}_m\|_0^2 / (\text{div}\mathbf{u}_m, \text{div}\mathbf{z}_m)$

(3) 计算$(\mathbf{u}_{m+1}, p_{m+1})$

$$p_{m+1} = p_m - \rho_m \omega_m,\ \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \rho_m \mathbf{z}_m$$

3 R.Glowinski共轭梯度算法

(1) 初始化.给出$p_o \in \mathbf{M}$，解椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\mathbf{u}_o = \mathbf{f} - \text{grad}p_o & \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathbf{u}_o = \mathbf{g} & \text{在}\Gamma\text{上} \end{cases}$$

如果 $\Delta \cdot \mathbf{u}_o = 0$ 则 $(\mathbf{u}_o, p_o)$ 就是所要求的解，否则，解下列 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta\psi_o = \text{div } \mathbf{u}_o & \text{在}\Omega\text{内} \\ \dfrac{\partial\psi_o}{\partial n} = 0 & \text{在}\Gamma\text{上} \end{cases}$$

令 $\sigma_o = a\text{div } \mathbf{u}_o + b\psi_o, \omega_o = \sigma_o$， 如果 $\forall m \geqslant 0$，设 $p_m, \mathbf{u}_m, \sigma_m, \omega_m$ 已知，则用下面方法求 $p_{m+1}, \mathbf{u}_{m+1}, \sigma_{m+1}, \omega_{m+1}$

(2) 下降.解椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\mathbf{z}_m = -\text{grad}\omega_m & \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathbf{z}_m = 0 & \text{在}\Gamma\text{上} \end{cases}$$

$$\rho_m = \frac{(\text{div } \mathbf{u}_m, \omega_m)}{(\text{div}\mathbf{z}_m, \omega_m)} \left(= \frac{(\text{div } \mathbf{u}_m, \sigma_m)}{(\text{div}\mathbf{z}_m, \omega_m)} \right)$$

$$\rho_{m+1} = p_m - \rho_m \omega_m,\ \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m - \rho_m \mathbf{z}_m$$

(3) 收敛性判别和新的下降方向

如果$\text{div}\mathbf{u}_{m+1} = 0$,则$(p_{m+1}, \mathbf{u}_{m+1})$就是所求的解

否则解Neumann问题

$$-\Delta\varphi_m = \text{div}\mathbf{z}_m \qquad \text{在}\Omega\text{内}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0 \qquad \text{在}\Gamma\text{上}, \oint_{\Gamma} \varphi_o ds = 0$$

$$\sigma_{m+1} = \sigma_m - \rho_m (a\mathrm{div}\mathbf{z}_m + b\varphi_m)$$

$$\gamma_m = (\sigma_{m+1}, \mathrm{div}\mathbf{u}_{m+1}) / (\sigma_m, \mathrm{div}\mathbf{u}_m)$$

$$\omega_{m+1} = \sigma_{m+1} + \gamma_m \omega_m$$

利用 Fourier 分析方法，a,b 参数的最佳选择是 $a = \lambda, b = 0$.

最后，给出 Stokes 方程解的存在和正则性定理，它是属于 Gattabriga[5]：

定理 9.1.4 设定理 9.1.2 的假设成立，边界 Γ 属于 $C^{\max(2,m+2)}$ 类，$\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{m,r}(\Omega)^n$，$\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{m+2-1/2,r}(\Gamma)^n$；$m \geqslant 1$ 为整数，$1 < r < +\infty$，那么 Stokes 问题 (9.1.2) 和 (9.1.3) 有唯一解 $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{m+2,r}(\Omega)^n \times (\mathbf{H}^{m+1,r}(\Omega) \cap M)$，并且存在不依赖于 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 之常数 $c > 0$，使得

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,r} + \|p\|_{m+1,r} \leqslant c(\|\mathbf{f}\|_{m,r} + \|\mathbf{g}\|_{m+2-1/r,r,\Gamma}) \qquad (9.1.39)$$

§9.2 抽象的Stokes算子

1 无散度向量值空间和投影算子

令 $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n, \mathrm{div}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$，并赋予内积和范数

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathrm{div}\mathbf{u}, \mathrm{div}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$$

$$|\|\mathbf{u}\||^2 = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$$

那么 $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ 是一个 Hilbert 空间（见第四章 §4.6），由定理 4.6.4 知 $\mathrm{D}^n(\overline{\Omega})$ 在 $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ 中稠密.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中 C^2 类有界开集，$\Gamma = \partial\Omega, \gamma_o: \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$

为零阶迹算子．那么 $\mathrm{Ker}(\gamma_o)=\mathbf{H}_o^1(\Omega)$，$\gamma_o$ 存在右逆 l_Ω:$\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ $\to\mathbf{H}^1(\Omega)$ 使得 $\gamma_o l_\Omega=1$ 在 $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ 中成立，并且

$$\|u\|_{1/2,\Gamma}\leqslant c\|u\|_{1,\Omega}\qquad\forall u\in\mathbf{H}^1(\Omega)\tag{9.2.1}$$

$$\|l_n\varphi\|_{1,\Omega}\leqslant c\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}\qquad\forall\varphi\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)\tag{9.2.2}$$

同样可以引入迹算子γ_n:$\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\to\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)^n$，它对

$$\gamma_n\mathbf{u}=\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})^n\tag{9.2.3}$$

有意义，并且可以延拓为 $\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\to\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)^n$ 的线性有界算子．进而有

$$R(\gamma_n)=\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)^n\tag{9.2.4}$$

$$\|\gamma_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega),\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma))}=1\tag{9.2.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\gamma_n)&=\mathbf{H}_o(\mathrm{div},\Omega)=\overline{\mathrm{D}(\Omega)^n}^{\,\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)}\\&=\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega),\mathbf{u}\cdot\ \mathbf{n}|_\Gamma=0\}\end{aligned}\tag{9.2.6}$$

引入迹算子γ_n之后，Stokes公式成立

$$(\mathbf{u},\mathrm{grad}w)+(\mathrm{div}\mathbf{u},w)=\ <\gamma_n\mathbf{u},\gamma_o w>$$

$$\forall u\in\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega),w\in\mathbf{H}^1(\Omega)\tag{9.2.7}$$

和在第四章中§4.6节一样，我们需要下列函数空间:

$$\mathbf{H}=\{\mathbf{u}\in D(\Omega)^n,\ \mathrm{div}\mathbf{u}=0\}$$

$\mathrm{H}=\mathbf{H}$在$\mathbf{L}^2(\Omega)^n$中的闭包，$\mathbf{V}=\mathbf{H}$在$\mathbf{H}_0^1(\Omega)^n$中的闭包

那么，同样有下列结果:

引理 9.2.1 设 $f_i\in\mathrm{D}'(\Omega)(i=1,2,\cdots,n)$ 是一个广义函数，$\mathbf{f}$ 为某一广义函数 $p\in\mathrm{D}'(\Omega)$ 之梯度 $\mathbf{f}=\mathrm{grad}p$ 的充分必要条件是

$$<\mathbf{f},\mathrm{v}>\ =0\quad\forall\mathrm{v}\in\mathrm{H}$$

引理 9.2.2 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集，具有 Lipschitz 连续边界，那么

(1) 如果广义函数 $p \in \mathrm{D}'(\Omega)$ 有一阶导数 $D_i p \in \mathrm{L}^2(\Omega), i = 1,2,\cdots,n$ 那么 $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 且

$$\|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)/\mathbf{R}} \leqslant c(\Omega)\|\mathrm{grad}\, p\|_{o,\Omega}$$

(2) 如果广义函数 $p \in \mathrm{D}'(\Omega)$ 有一阶导数 $D_i p \in (\mathrm{H}^1(\Omega))'$，$i = 1,2,\cdots,n$, 那么 $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 且

$$\|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)/\mathbf{R}} \leqslant c(\Omega)\|\mathrm{grad}\, p\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

如果对Ω边界不加限制，则$p \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$并且

$$\|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)/\mathbf{R}} = \inf_{c \in \mathbf{R}}\|p + c\|_{o,\Omega} = \|p - \mathrm{meas}(\Omega)^{-1}\int_\Omega p dx\|_o$$

引理9.2.3 设$u \in \mathrm{H}^1(\Omega), \Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, 那么$\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$且

$$(\mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, v) = (-\Delta u, v) + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle_\Gamma \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \qquad (9.2.8)$$

引理 9.2.4 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个局部 Lipschitz 有界开集，那么

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega), \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\} \\ &= \{\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^n, \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0\} \end{aligned} \qquad (9.2.9)$$

$$\mathbf{H}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^n, \mathbf{u} = \mathrm{grad}\, p, p \in \mathrm{H}^1(\Omega)\} \qquad (9.2.10)$$

证 式 (9.2.10) 就是定理 4.6.7. 另外，由定理 4.6.6 知，$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)$, 意味着 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$, 所以我们只须证明，$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega), \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\}$ 就可以得出式 (9.2.9).

由 (9.2.6) 知 $\mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega) \subset \mathbf{H}$, 现在要证明 $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)$,

设 $\mathbf{u}\in\mathbf{H}$，则在 H 中存在一个序列 $\mathbf{u}_m$，使得 $\mathbf{u}_m\to\mathbf{u}$ 在 $L^2(\Omega)^n$ 中成立. 从而可以得出 $\mathrm{div}\mathbf{u}=0$，所以，$\mathbf{u}_m$ 也在 H 中收敛于 $\mathbf{u}$，而且 $\mathbf{u}\in H(\mathrm{div},\Omega)$. 又因 γ_n 是 $H(\mathrm{div},\Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma)^n$ 线性连续算子，故 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0$. 证毕.

定理9.2.1 设 Ω 是一个 C^2 类有界开集，则

$$\mathbf{L}^2(\Omega)^n=\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2$$

其中

$$\mathrm{H}_1=\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n,\ \mathbf{u}=\mathrm{grad}p,\ p\in\mathrm{H}^1(\Omega),\ \Delta p=0\}$$

$$\mathrm{H}_2=\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n,\ \mathbf{u}=\mathrm{gard}p,\ p\in\mathrm{H}_o^1(\Omega)\}$$

证 显然，$\mathrm{H}_1\subset\mathrm{H}^\perp$，$\mathrm{H}_2\subset\mathrm{H}^\perp$. 且 $\mathrm{H}_1\perp\mathrm{H}_2$. 事实上，设 $\mathbf{u}_1\in\mathrm{H}_1$，$\mathbf{u}_2\in\mathrm{H}_2$，那么 $\mathbf{u}_1=\mathrm{grad}p$，$\Delta p=0$，$\mathbf{u}_2=\mathrm{grad}q$，$q\in\mathrm{H}_o^1(\Omega)$，故

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)&=(\mathrm{grad}p,\ \mathrm{grad}q)\\&=(-\Delta p,\ q)+\langle\mathrm{grad}p\cdot\mathbf{n},\ q\rangle_\Gamma=0\end{aligned}$$

现在设 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 为任意一元素，首先求 $q\in\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 使得

$$\Delta q=\mathrm{div}\mathbf{u}\in\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$$

众所周知，它有唯一解 $q\in\mathrm{H}_o^1(\Omega)$. 设 $\mathbf{u}_2=\mathrm{grad}q$，显然 $\mathrm{div}\mathbf{u}_2=\Delta q=\mathrm{div}\mathbf{u}$. 若令 $\hat{\mathbf{u}}_1=\mathbf{u}-\mathbf{u}_2$，则 $\mathrm{div}\hat{\mathbf{u}}_1=0$，故

$$\langle\gamma_o\hat{\mathbf{u}}_1,1\rangle_\Gamma=\int_\Gamma\gamma_n\hat{\mathbf{u}}_1\mathrm{d}s=0$$

所以 Neumann 问题

求 $p\in\mathrm{H}^1(\Omega)$ 使得

$$\Delta p = 0$$
$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \gamma_n \hat{\mathbf{u}}_1$$

有唯一解 p. 取 $\mathbf{u}_1 = \mathrm{grad}p$, 则 $\mathrm{div}\mathbf{u}_1 = \Delta p = 0$, 令

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

则 $\mathrm{div}\mathbf{u}_0 = 0$, $\gamma_n \mathbf{u}_0 = \gamma_n \mathbf{u} - \gamma_n \mathbf{u}_1 - \gamma_n u_2 = r_n(\hat{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_1) = 0$.

由引理 9.2.4 知 $\mathbf{u}_n \in \mathbf{H}$, 从而 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}_1$, $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_2$. 证毕.

定理 9.2.2 设 Ω 是有界开集, 边界 Γ 局部 Lipschitz 连续. 那么

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^n, \ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0\}$$

证 令 $\mathbf{V}^* = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)^n, \ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0\}$. 我们要证 $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$. 为此, 只须证明 H 在 $\mathbf{V}^*$ 中稠密. 由泛函分析中熟知的定理, 一个 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 之子空间 $\mathbf{B}_1$ 在 $\mathbf{B}$ 中稠密, 当且仅当 $\mathbf{B}'$ 中的元素在 $\mathbf{B}_1$ 上为零也必在 $\mathbf{B}$ 上为零. 因为 $\mathrm{H} \subset \mathbf{V}^*$ 是显然的. 现在设 L 为 $\mathbf{V}^*$ 上之任一线性有界泛函. 它可以延拓到 $\mathbf{H}^1(\Omega)^n$ 上, 故 $\mathbf{L} = \{l_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$. $l_i \in (\mathbf{H}^1(\Omega))'$. 如果

$$\langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}$$

则引理 9.2.1 告诉我们, 必存在 $p \in \mathrm{D}'$, $l_i = \dfrac{\partial p}{\partial x_i}$. 由引理 9.2.2 知, $p \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, 故

$$\mathbf{L}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} \langle l_i, w_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (D_i p, w_i) = -\int_{\Omega} p \,\mathrm{div}\mathbf{w} dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$$

这就证明了L在$\mathbf{V}^*$上也为零. 证毕.

定义投影算子$P:\mathbf{L}^2(\Omega)^n\to\mathbf{H}$, $Q=I-P$

引理9.2.5　P也是$\mathbf{H}_o^1(\Omega)^n\to\mathbf{H}^1(\Omega)^n$的线性有界算子

证　$\forall\mathbf{u}\in\mathbf{H}_o^1(\Omega)^n$, 作辅助问题

$$\begin{cases}\text{求}p\in\mathbf{H}_o^1(\Omega)\quad\text{使得}\\ \Delta p=\operatorname{div}\mathbf{u}\end{cases}\tag{9.2.11}$$

则由于$\operatorname{div}\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, 故存在唯一解$p$使得

$$\|p\|_{2,\Omega}\leqslant c\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_o\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$$

令$\mathbf{u}_2=\operatorname{grad}p$, 则$\operatorname{div}\mathbf{u}_2=\Delta p=\operatorname{div}\mathbf{u}$. 故$\mathbf{u}-\mathbf{u}_2\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$, $\operatorname{div}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)=0$, 且$\gamma_n(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. 作辅助问题

$$\begin{cases}\Delta q=0\\ \left.\dfrac{\partial q}{\partial n}\right|_\Gamma=\gamma_n(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)\in\mathbf{H}^{1/2}(\Omega)\end{cases}\tag{9.2.12}$$

由于$\operatorname{div}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)=0$推出$\langle\gamma_o(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2),1\rangle_\Gamma=0$. 所以(9.2.12)有唯一解. 令$\mathbf{u}_1=\operatorname{grad}q\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$, 则$\mathbf{u}_o=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$, 且

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_o=\operatorname{div}\mathbf{u}-\Delta p-\Delta q=0$$

$$\gamma_n\mathbf{u}_o=(\mathbf{u}-\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot n=\left((\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)\cdot n-\frac{\partial q}{\partial n}\right)_\Gamma=0$$

从而引理9.2.4给出$\mathbf{u}_o=P\mathbf{u}\in\mathbf{H}$, 并且

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_o\|_1=\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_1&\leqslant\|\mathbf{u}\|_1+\|\mathbf{u}_1\|_1+\|\mathbf{u}_2\|_1\\&\leqslant\|\mathbf{u}\|_1+\|p\|_2+\|q\|_2\end{aligned}$$

由正则性定理, 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_o\|_1&\leqslant\|\mathbf{u}\|_1+c(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_o+\|\gamma_n(\mathbf{u}-\mathbf{u}_2)\|_{1/2})\\&\leqslant c(\|\mathbf{u}\|_1+\|\mathbf{u}_2\|_1)\leqslant c\|\mathbf{u}\|_1\end{aligned}$$

这就证明了 P 是从 $\mathbf{H}_0^1(\Omega)^n$ 到 $\mathbf{H}^1(\Omega)^n$ 的线性算子．证毕．

引理 9.2.6 设 $\Gamma=\partial\Omega$ 充分光滑，那么 P 也是 $\mathbf{H}^s(\Omega)^n \to \mathbf{H}^s(\Omega)^n$ 的线性有界算子．这里 $s\geqslant 0$

证 $\forall \mathbf{u}\in \mathbf{H}^s(\Omega)^n$ 作辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta p=-\operatorname{div}\mathbf{u}\in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega), \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_\Gamma=\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma\in\mathbf{H}^{s-1/2}(\Gamma)\end{cases}$$

注意

$$(-\operatorname{div}\mathbf{u},1)+\langle\mathbf{u}\cdot\mathbf{n},1\rangle_\Gamma=0$$

由椭圆边值问题正则性定理，存在唯一 $p\in\mathbf{H}^{s+1}(\Omega)$，使得

$$\|p\|_{s+1}\leqslant c(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{s-1}+\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{s-1/2,\Gamma})\leqslant c\|\mathbf{u}\|_s$$

这里用到定理 4.6.5. 取 $w=\operatorname{grad}p$，则 $\mathbf{w}\in\mathbf{H}^{\perp}$，$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$，那么

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{div}\mathbf{w}=\operatorname{div}\mathbf{u}-\Delta p=0$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}-\operatorname{grad}p\cdot\mathbf{n})=0$$

由引理9.2.4知 $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$. 故 $\mathbf{v}=P\mathbf{u}$ 有

$$\|P\mathbf{u}\|_s=\|\mathbf{v}\|_s=\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_s\leqslant\|\mathbf{u}\|_s+\|\mathbf{w}\|_s\leqslant\|\mathbf{u}\|_s+\|p\|_{s+1}$$
$$\leqslant c\|\mathbf{u}\|_s$$

证毕.

2 Stokes算子

设 P 是 $\mathbf{L}^2(\Omega)^n\to\mathbf{H}$ 的投影算子.

定义9.2.1 Stokes算子 A 定义为

$$A:D(A)\subset\mathbf{H}\to\mathbf{H},\ A=-P\Delta, D(A)=\mathbf{H}^2(\Omega)^n\cap\mathbf{V}$$

引理9.2.7 Stokes算子 A 是对称的

$$(A\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{u},A\mathbf{v})\qquad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in D(A)\tag{9.2.13}$$

证 设 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}$，这时 $P\mathbf{u}=\mathbf{u}, P\mathbf{v}=\mathbf{v}$ 且

$$-(\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v})$$

于是容易推出，(9.2.13)对所有的$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}$成立.

设$\mathbf{u},\mathbf{v}\in D(A)$，它们可以用$\Theta$中函数来逼近，所以(9.2.13)对所有$\mathbf{u}\in D(A)$, $\mathbf{v}\in\Theta$成立，通过极限过渡，则

$$(A\mathbf{u},\mathbf{v})=a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in D(A) \tag{9.2.14}$$

也成立.由于(9.2.14)右边对称，故引理得证.

引理9.2.8 Stokes算子是自共轭的.

证 设A^*为A之共轭算子，$\mathbf{u}\in D(A^*)$，由定义，存在$\mathbf{f}\in\mathbf{H}$使得

$$(A\mathbf{v},\mathbf{u})=(\mathbf{v},\mathbf{f}) \qquad \forall\mathbf{v}\in D(A)$$

由于$\mathbf{f}\in\mathbf{H}\subset\mathbf{L}^2(\Omega)^n$，由Stokes方程解的存在性定理，知$\tilde{\mathbf{u}}\in D(A)$使得$A\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{f}$.我们还要证明$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}$.

$\forall\mathbf{g}\in\mathbf{H}$，令$\mathbf{v}\in D(A)$，$A\mathbf{v}=\mathbf{g}$，则

$$\begin{aligned}(\mathbf{g},\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})&=(A\mathbf{v},\mathbf{u})-(A\mathbf{v},\tilde{\mathbf{u}})=(\mathbf{v},\mathbf{f})-(\mathbf{v},A\tilde{\mathbf{u}})\\&=(\mathbf{v},\mathbf{f})-(\mathbf{v},\mathbf{f})=0\end{aligned}$$

由于$\mathbf{v}$是任意的，故$\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}\in D(A)$,$\mathbf{f}=A\mathbf{u}$.证毕.

定理9.2.3 Stokes算子A的逆算子A^{-1}是$\mathbf{H}$中的紧算子.

证 $\forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}$，则$A\mathbf{u}=\mathbf{f}$在$D(A)$中存在唯一解$\mathbf{u}=A^{-1}\mathbf{f}$，由解的正则定理9.1.4有

$$\|\mathbf{u}\|_2+\|p\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\leqslant c\|\mathbf{f}\|_o$$

故A^{-1}是$\mathbf{H}\to\mathbf{V}$的线性有界算子，又$\mathbf{V}$到$\mathbf{H}$的嵌入是紧的，所以A^{-1}是紧算子，证毕.

由于A是自共轭的，A^{-1}也是自共轭的，故A^{-1}是$\mathbf{H}\to\mathbf{H}$的自共轭紧算子，由定理5.8.7知存在可数个正数$\mu_i>0$，$\mu_{i+1}<\mu_i$和$\mathbf{H}$的正交完备系$\{\mathbf{w}_i\}$，$A^{-1}\mathbf{w}_i=\mu_i\mathbf{w}_i$，若

记 $\lambda_i = \mu_i^{-1}$，那么得

$$A\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \quad \mathbf{w}_i \in D(A) \quad (i = 1,2,\cdots) \tag{9.2.15}$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_i < \lambda_{i+1} < \cdots \tag{9.2.16}$$

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty \tag{9.2.17}$$

那么由正则性定理9.1.4，可得

引理9.2.9 如果Γ是C^{l+2}类，$l \geqslant 0$，那么

$$\mathbf{w}_i \in \mathbf{H}^{l+2}(\Omega)^n$$

设$\alpha > 0$是任一实数，A^α称为A之α阶幂算子，如果

$$A^\alpha \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^\alpha u_j \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \mathbf{w}_j \quad \mathbf{u} \in D(A^\alpha) \tag{9.2.18}$$

$$D(A^\alpha) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}: u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \mathbf{w}_\gamma, \ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} |u_j|^2 < \infty, u_j \in \mathbf{R}\} \tag{9.2.19}$$

线性空间$D(A^\alpha)$可以装备自然内积和范数

$$< \mathbf{u},\mathbf{v} >_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} u_j v_j, \quad \|\mathbf{u}\|_{D(A^\alpha)}^2 = < \mathbf{u},\mathbf{u} >_\alpha$$

其中 $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \mathbf{w}_j, \ \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \mathbf{w}_j$

引理 9.2.10 $\lambda_j^{-\alpha} w_j$，$j = 1,2,\cdots$ 构成 $D(A^\alpha)$ 的完全正交系．

证 我们只要证明正交性就可以．

$$< \lambda_j^{-\alpha} \mathbf{w}_j, \lambda_k^{-\alpha} \mathbf{w}_k >_\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{2\alpha} \cdot \lambda_j^{-\alpha} \delta_{mi} \lambda_k^{-\alpha} \delta_{mk} = \delta_{jk} \tag{9.2.20}$$

证毕.

引理 9.2.11 $\mathbf{V} = D(A^{1/2})$，$< \mathbf{u},\mathbf{v} >_{1/2} = (\text{grad}\mathbf{u}, \text{grad}\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$，$\{\lambda_j^{-1/2} w_j\}(j = 1,2,\cdots)$ 为 $\mathbf{V}$ 中完全正交系．

证 先证 $V=D(A^{1/2})$，因为 $D(A^{1/2})\subset \mathrm{V}$ 是闭子空间．故我们只须证明 $\forall\ v_o\in D(A^{1/2})^{\perp}$（在 V 内），由 $(\mathrm{grad}v_o,\mathrm{grad}w_j)=0\quad \forall j$ 推出 $v_o=0$ 即可．实际上

$$0=(\mathrm{grad}v_o,\mathrm{grad}w_j)=(v_o,\mathrm{A}w_j)=\lambda_j(v_o,w_j)$$

因为 $\lambda_j>0$，故 $(v_o,w_j)=0$，$\forall j$，所以 $v_o=0$. 这就证明了 $\mathrm{V}=D(A^{1/2})$. 由引理 9.2.10 可知，$\lambda_j^{-1/2}w_j$ 是 V 的完全正交系．

为了证明 $<\mathbf{u},\mathbf{v}>_{1/2}=(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v})\quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{V}$, 只须证明

$<\lambda_j^{1/2}w_j,\lambda_k^{-1/2}w_k>_{1/2}=(\mathrm{grad}(\lambda_j^{-1/2}w_j),\ \mathrm{grad}(\lambda_k^{-1/2}w_k))$

就可以.实际上,

$$\begin{aligned}<\lambda_j^{1/2}w_j,\lambda_k^{-1/2},w_k>_{1/2}&=\delta_{jk}=(A(\lambda_j^{-1/2}w_j),\lambda_k^{-1/2}w_k)\\&=(\mathrm{grad}(\lambda_j^{-1/2}w_j),\mathrm{grad}(\lambda_k^{-1/2}w_k))\end{aligned}$$

证毕.

设 $\mathrm{V}_\alpha=D(A^{\alpha/2})$，那么 $\mathrm{V}_\alpha\subset \mathrm{H}^\alpha(\Omega)^n\bigcap \mathrm{V}$，$\forall\alpha>0$，令 $\mathrm{V}_{-\alpha}$ 为 V_α 之对偶空间 $(\alpha>0)$，那么

$$\mathrm{V}_{\alpha_1}\subset \mathrm{V}_{\alpha_2},\forall\alpha_2<\alpha_1,\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}_+ \tag{9.2.21}$$

并且V_{α_1} 在V_{α_2} 中稠密.特别

$$\mathrm{V}_2=D(A),\ \mathrm{V}_1=D(A^{1/2})=\mathrm{V},\ \mathrm{V}_0=\mathrm{H},\ \mathrm{V}_{-1}=\mathrm{V}' \tag{9.2.22}$$

算子 A 是 $\mathrm{V}_{\alpha+2}\to\mathrm{V}_\alpha, D(A)\to\mathrm{H}$ 和 $\mathrm{V}\to\mathrm{V}'$ 之同构．在 V_α 上，$\|A^{\alpha/2}\mathbf{u}\|_o\approx\|\mathbf{u}\|_\alpha$，即

$$c_1\|\mathbf{u}\|_\alpha\leqslant\|A^{\alpha/2}\mathbf{u}\|_o\leqslant c_2\|\mathbf{u}\|_\alpha\quad \forall\mathbf{u}\in\mathrm{V}_\alpha \tag{9.2.23}$$

尤其是，$\alpha=2$时，由定理9.1.4得

$$\|\mathbf{u}\|_2\leqslant c\|A\mathbf{u}\|_o\quad \forall\mathbf{u}\in D(A) \tag{9.2.24}$$

定理9.2.4 $\Theta \subset D(A^{\alpha})$, $\forall \alpha > 0$, $\bigcap_{\alpha>0} D(A^{\alpha})$在H中稠密.

证 如果 $\alpha > \beta$, 则 $(\lambda_j / \lambda_1)^{\alpha-\beta} \geqslant 1$, $j = 1,2,\cdots$. 所以 $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$. 现在只要证明, $\forall p$ 正整数, $\mathrm{H} \subset D(A^{p})$ 即可. 设 $\varphi \in \mathrm{H}$. 由于 $\mathrm{div}\varphi = 0$, 则 $P(-\Delta)\varphi = -\Delta\varphi \in \mathrm{H}$, $A\varphi = -\Delta\varphi, \forall \varphi \in \mathrm{H}$ 成立. 从而 $\forall \varphi \in \mathrm{H}$, $A^{p}\varphi \in \mathrm{H}$ 且

$$\lambda_j^{p}(w_j,\varphi) = (A^{p} w_j,\varphi) = (w_j,A^{p}\varphi)$$

由于 $A^{p}\varphi \in \mathrm{H}$, 它的 Fourier 级数的系数是平方可积的

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2p} |(w_j,\varphi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(w_j,A^{p}\varphi)|^2 < +\infty$$

这意味着, $\varphi \in D(A^{p})$, 故 $\mathrm{H} \subset D(A^{p})$, 同时, 我们也证明了

$$< \mathbf{u},\mathbf{u} >_{p} \leqslant \|(-\Delta)^{p} u\|_{o}^{2} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{H}, p \in \mathbf{Z}_{+}^{n} \tag{9.2.25}$$

证毕.

下面讨论$D(A^{m})$和$\mathrm{H}^{2m}(\Omega)$之间的关系.

首先, 引入尺度不变量的概念. 集合 Ω 之函数 $\varphi(\Omega)$ 是尺度不变的, 如果对所有由 Ω 作刚体位移及膨胀 $x \to \delta x$ 而得到的 Ω', 有 $\varphi(\Omega) = \varphi(\Omega')$. 记 $\Omega_{\delta} = \{\delta x, x \in \Omega\}$

$(T_{\delta} f) y = f(y/\delta)$, $\mathrm{meas}(\Omega) = \int_{\Omega} dx, L(\Omega) = L = \mathrm{meas}(\Omega)^{1/n}$. L 表示 Ω 之一维长度, 范数 $\|\cdot\|_{m}$ 可以修正为

$$\|f\|_{m,\Omega}^{2} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \mathrm{meas}(\Omega)^{\frac{2(|\alpha|-m)}{n}} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f|^{2} dx \tag{9.2.26}$$

如此

$$\mathrm{meas}(\Omega)^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} \|f\|_{m,\Omega} \text{是尺度不变} \tag{9.2.27}$$

从而 $\|f\|_{m,\Omega}$ 类似于 $L^{\frac{n}{2}-m}$，算子 A 类似于 L^{-2} 尺度．另外

$$\text{meas}(\Omega)^{2/n}\lambda_j \qquad \text{尺度不变 } \forall j \tag{9.2.28}$$

$$\lambda_j/\lambda_1 \qquad \text{尺度不变} \tag{9.2.29}$$

如果 $\mathbf{w}_i$ 是 A 在区域 Ω 上之正交特征函数系，那么在 Ω_δ 内，

$$\mathbf{w}_j^\delta(y) = \delta^{n/2}\mathbf{w}_j(y/\delta)$$

是对应的正交函数系，是 A 在 Ω_δ 内之特征函数系，因而 $\mathbf{w}_j$ 的尺度类似于 $L^{-n/2}$．即

$$L^{n/2}\mathbf{w}_j = \text{meas}(\Omega)^{1/2}\mathbf{w}_j \quad \text{是尺度不变} \tag{9.2.30}$$

在第 § 3.4 中，定义了延拓算子 E_Ω^l: $\mathbf{H}^m(\Omega) \to \mathbf{H}^m(\mathbf{R}^n)$ 使得 $E_\Omega^l(\mathbf{u})\big|_\Omega = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $\forall m \leqslant l$. 先证如下定理

定理9.2.5 记$0 < s_1 < n/2 < s_2$, $t \in (0,1)$使得

$(1-t)s_1 + ts_2 = n/2$, 即$t = (n/2 - s_1)/(s_2 - s_1)$

那么存在只依赖于n, s_1, s_2的常数$c > 0$使得

$$\|f\|_{\infty,R^n} \leqslant c\|f\|_{s_1,R^n}^{1-t}\|f\|_{s_2,R^n}^{t} \quad \forall f \in \mathbf{H}^{s_2}(\mathbf{R}^n) \tag{9.2.31}$$

证 $\forall f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$有

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i<x,\xi>}\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{|\xi| \leqslant R} \cdot + (2\pi)^{-n}\int_{|\xi| \geqslant R} \cdot = I_1 + I_2$$

利用schwartz不等式，得

$$I_1 \leqslant \int_{|\xi| \leqslant R} |\hat{f}(\xi)|d\xi$$

$$= \int_{|\xi|\leqslant R} (1+|\xi|^2)^{-s_1/2}(1+|\xi|^2)^{s_1/2}|\hat{f}(\xi)|d\xi$$

$$\leqslant \left(\int_{|\xi|\leqslant R} (1+|\xi|^2)^{-s_1} d\xi\right)^{1/2} \|f\|_{s_1}$$

利用球坐标系，记 ω_n 为半径为 1 之球面面积，则

$$\int_{|\xi|\leqslant R} (1+|\xi|^2)^{-s_1} d\xi = \omega_n \int_0^R (1+r^2)^{-s_1} r^{n-1} dr$$

$$= \omega_n \int_0^R \left(1+\frac{1}{r^2}\right)^{-s_1} r^{n-2s_1-1} dr \leqslant \frac{\omega_n}{n-2s_1} R^{n-2s_1}$$

从而得
$$I_1 \leqslant \sqrt{\frac{\omega_n}{n-2s_1}} R^{\frac{n-2s_1}{2}} \|f\|_{s_1}$$

同理，

$$I_2 \leqslant \int_{|\xi|\geqslant R} |\hat{f}(\xi)|d\xi = \int_{|\xi|\geqslant R} (1+|\xi|^2)^{-s_2/2}(1+|\xi|^2)^{s_2/2}|\hat{f}|d\xi$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\omega_n}{2s_2-n}} R^{\frac{n-2s_2}{n}} \|f\|_{s_2}$$

取
$$R = (\|f\|_{s_2} / \|f\|_{s_1})^{\frac{1}{s_2-s_1}}$$

则
$$R^{\frac{n}{2}-s_1} \|f\|_{s_1} = R^{\frac{n}{2}-s_2} \|f\|_{s_2}$$

于是 (9.2.31) 成立， 其中 $c = \sqrt{\omega_n}\left((2s_2-n)^{-1/2} + (n-2s_1)^{-1/2}\right)$. 证毕.

定理 9.2.6 设 Ω 是 C^l 类的有界开集. 设 $l > n/2$, $s < n/2$. 那么存在只依赖于 Ω, s, l 之常数 $c > 0$, 使得

$$\|f\|_{\infty,\Omega} \leqslant c\|f\|_{s,\Omega}^{1-t}\|f\|_{l,\Omega}^{t} \quad \forall f \in \mathbf{H}^{l}(\Omega) \tag{9.2.32}$$

其中 $t = (\frac{n}{2} - s)/(l - s)$

证 设$E_{\Omega}^{l}(f)$是f在$\mathbf{H}^{l}(\mathbf{R}^{n})$中的延拓，于是

$$\|E_{\Omega}^{l}(f)\|_{l} \leqslant c_{l}\|f\|_{l,\Omega}, \quad \|E_{\Omega}^{l}(f)\|_{s} \leqslant c_{s}\|f\|_{s,\Omega},$$

$$\|f\|_{\infty,\Omega} \leqslant \|E_{\Omega}^{l}(f)\|_{\infty}$$

由此，(9.2.32)就是(9.2.31)的推论.

至于尺度的不变，是由于 $\|f\|_{\infty,\Omega} / \|f\|_{s,\Omega}^{1-t}\|f\|_{l,\Omega}^{t}$ 是尺度不变的，而 $\|f\|_{\infty,\Omega}$ 是尺度不变，而 $\|f\|_{s,\Omega}^{1-t}\|f\|_{l,\Omega}^{*}$ 尺度类似于 $L^{(1-t)(\frac{n}{2}-s)}L^{t(\frac{n}{2}-l)} = L^{0}$，于是定理得证.

定理 9.2.7 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n}$ 为 $\mathbf{C}^{2}$ 类的有界开集，那么存在一个尺度不变量 $c_{o} > 0$ 使得 stokes 算子 A 之特征值满足

$$\lambda_{j} \geqslant c_{o} j^{2/n} \lambda_{1} \quad n = 2\text{或}3 \tag{9.2.33}$$

证 设 $\mathbf{w}_{j}(x)$ 是 A 的特征函数，α_{i} $(i = 1,2,\cdots,j)$ 为实数，令 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{j}\alpha_{i}\mathbf{w}_{i}$，应用 (9.2.32)，取 $s = 0$，$l = 2$，$t = n/4$，

$$\|\mathbf{w}\|_{\infty,\Omega} \leqslant c\|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}^{1-n/4}\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega}^{n/4}$$

但是，利用(9.2.24)可得

$$\|\mathbf{w}\|_{\infty,\Omega} \leqslant c\|\mathbf{w}\|_{o}^{1-n/4}\|A\mathbf{w}\|_{o}^{n/4}$$

由于$\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega}^{2} = \sum_{k=1}^{j}\alpha_{k}^{2}$,$\|A\mathbf{w}\|_{o,\Omega}^{2} = \sum_{k=1}^{j}\lambda_{k}^{2}\alpha_{k}^{2} \leqslant \lambda_{j}^{2}\sum_{k=1}^{j}\alpha_{k}^{2} = \lambda_{j}^{2}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega}^{2}$

因此 $$\|\mathbf{w}\|_{\infty,\Omega} \leqslant c\lambda_{j}^{n/4}(\sum_{1}^{j}\alpha_{k}^{2})^{1/2}$$

也就是说

$$|\mathbf{w}(x)|^2 \leqslant c\lambda_j^{n/2}(\sum_1^j \alpha_k^2) \quad \text{几乎处处成立}$$

然而$\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{C}^0(\Omega)$，所以不等式对所有的$x$都成立.

$\forall i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，令 $w_k^{(i)}(x)$ 为 $\mathbf{w}_k$ 之等 i 个分量，那么

$$|\sum_{k=1}^j \alpha_k w_k^{(i)}(x)|^2 \leqslant |\mathbf{w}(x)|^2 \leqslant c\lambda_j^{n/2}(\sum_1^j \alpha_k^2)$$

取$\alpha_k = w_k^{(i)}(x)$，得

$$\sum_{k=1}^j |w_k^{(i)}|^2 \leqslant |\mathbf{w}(x)|^2 \leqslant c_4 \lambda_j^{n/2}$$

对i求和，

$$\sum_{k=1}^j |w_k(x)|^2 \leqslant nc\lambda_j^{n/2} \quad \forall x \in \Omega$$

在Ω上积分，得$j \leqslant cn\lambda_j^{n/2}\text{meas}(\Omega)$和

$$\lambda_j \geqslant c\,\text{meas}(\Omega)^{-2/n} j^{2/n} \tag{9.2.34}$$

从式(9.2.28)和(9.2.29)的尺度不变量中，可以推出式(9.2.33)的 c_o 是尺度不变的，证毕.

定理 9.2.8 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{C}^l(l \geqslant 2)$ 的有界开集，那么存在连续嵌入

$$\mathbf{H}^m(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_0^{m-1}(\Omega)^n \cap \mathbf{V} \subset D(A^{m/2}) \quad m\text{为偶数} \tag{9.2.35}$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega)^n \cap \mathbf{V} \subset D(A^{m/2}) \quad m\text{为奇数} \tag{9.2.36}$$

$$D(A^{m/2}) \subset \mathbf{H}^m(\Omega)^n \cap \mathbf{V} \quad m \geqslant 1, m \leqslant l \tag{9.2.37}$$

$$D(A^{s/2}) \subset \mathbf{H}^s(\Omega)^n \cap \mathbf{V} \quad s \in \mathbf{R} \tag{9.2.38}$$

证 先证(9.2.35)，令 $m = 2p$，$\mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_o^{m-1}(\Omega)^n \cap \mathbf{V}$，

$(-\Delta)^k \mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^{m-1-2k}(\Omega)^n$，$k=0,1,\cdots,p-1$且$\operatorname{div}(-\Delta)^k \mathbf{u}=0$所以$(-\Delta)^k \mathbf{u} \in \mathbf{H}$，$P(-\Delta)^k \mathbf{u}=(-\Delta)^k \mathbf{u}$，$k \leqslant p-1$，设 w_j 是本征函数系，那么

$$\lambda_j^{m/2}(\mathbf{u},w_j)=(\mathbf{u},A^p w_j)=(\mathbf{u},P(-\Delta)P(-\Delta)\cdots P(-\Delta)w_j)$$
$$=((-\Delta)^{p-1}\mathbf{u},-\Delta w_j)$$

由于$(-\Delta)^{p-1}\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_o^2(\Omega)^n$，$\mathbf{w}_j \in \mathbf{H}^2(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_o^1(\Omega)^n$，分部积分两次得

$$\lambda_j^{m/2}(\mathbf{u},w_j)=((-\Delta)^p \mathbf{u},w_j)$$
$$\sum_j \lambda_j^m |(\mathbf{u},w_j)|^2 \leqslant \|(-\Delta)^p \mathbf{u}\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}^2$$

从而

$$<\mathbf{u},\mathbf{u}>_{m/2} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^{m-1}(\Omega)^n \cap \mathbf{H}^m(\Omega)^n \cap \mathbf{V} \qquad (9.2.39)$$

即$\mathbf{u} \in D(A^{m/2})$，且嵌入是连续的.

如果 $m=2p+1$，设 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^m(\Omega)$，$\operatorname{div}\mathbf{u}=0$，那么$(-\Delta)^k \mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^{m-2k}(\Omega)$，$k=0,1,\cdots,p$，以及 $P(-\Delta)^k \mathbf{U}=(-\Delta)^k \mathbf{U}$，$k=0,1,\cdots,p$. 则

$$\lambda_j^{m/2}(\mathbf{u},\mathbf{w}_j)=(\mathbf{u},A^p A^{1/2}\mathbf{w}_j)=((-\Delta)^p \mathbf{u},A^{1/2}\mathbf{w}_j)$$
$$=(A^{1/2}(-\Delta)^p \mathbf{u},\mathbf{w}_j)$$

由于$(-\Delta)^p \mathbf{u} \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)^n$，$\operatorname{div}(-\Delta)^p \mathbf{u}=0$故$(-\Delta)^p \mathbf{u} \in \mathbf{V}$，

$$\|A^{1/2}((-\Delta)^p \mathbf{u})\|_o=|(-\Delta)^p \mathbf{u}|_1 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}$$
$$|<\mathbf{u},\mathbf{u}>_{m/2}| \leqslant \|A^{1/2}((-\Delta)^p \mathbf{u})\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}^2$$

即式(9.2.36)也成立.

为了证明式 (9.2.37). 设 $\mathbf{u}\in D(A^{m/2})$, 由于 $m=0$, $m=1$ 时，有

$$\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}\leqslant c\|A^{m/2}\mathbf{u}\|_o\quad\forall\mathbf{u}\in D(A^{m/2})\tag{9.2.40}$$

用数学归纳法，设 $m'\leqslant m-1$, $m\geqslant 1$,(9.2.40) 成立. 那么 $A\mathbf{u}=\mathbf{f}\in D(A^{m-2/2})$, $\forall\mathbf{u}\in D(A^{m/2})$, 那么应用式 (9.2.40) 于 $m=2$, 则

$$\|\mathbf{f}\|_{m-2}\leqslant c\|A^{m-2/2}\mathbf{f}\|_o=c\|A^{m/2}\mathbf{u}\|_o$$

另一方面, 由定理9.1.4有

$$\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}\leqslant c\|\mathbf{f}\|_{m-2,\Omega}\leqslant c\|A^{m/2}\mathbf{u}\|_o$$

即式(9.2.40)对于m也成立, 故式(9.2.37)得证.

设 $s=m+\theta$, $0<\theta<1$, 那么应用定理 4.2.6 立即可得式 (9.2.38), 证毕.

对于周期性边界条件的Stokes算子, 若令

$$\mathbf{u}(x+L\mathbf{e}_i)=\mathbf{u}(x)\quad\forall x\in\mathbf{R}^n$$

其中 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,…, $\mathbf{e}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 之单位基向量，L 为第 i 个方向上的周期. 那么 A 之特征函数系及特征值为

$$w_{R,\alpha}=(\mathbf{e}_\alpha-\frac{\mathbf{k}k_\alpha}{|\mathbf{k}|^2})\mathbf{e}^{2i\pi K\cdot x/L}$$

其中$\mathbf{K}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in Z^n_+$, $k\neq 0$, $\alpha=1,2,\cdots,n$.

对于每个λ_j的重数是

$$(n-1)^{\#}\{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^m,\ |\mathbf{k}|^2=\frac{L^2}{4\pi^2}\lambda_j=\lambda_j/\lambda_1\}\tag{9.2.41}$$

定理9.2.9 Stokes算子A之特征值λ_j满足

$$\lim_{j\to\infty}j^{-2/n}(\lambda_j/\lambda_1)=((n-1)\omega_n)^{-2/n}$$

证　设$N_\lambda=(m/\lambda_m\leqslant\lambda)$，由式(9.2.41)知

$$N_\lambda=(n-1)^{\#}\{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\},\ |\mathbf{k}|\leqslant\sqrt{\lambda/\lambda_1}\}$$

设立方体

$$B_k=k+(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n\qquad k\text{为整数}$$

任何一个整数坐标k，有一个B_k，体积为1，但不包含其它整数坐标，B_k是包含在一个半径为$\Gamma_n/2$，k为中心的球内，如此

$$\{x:|x|<\sqrt{\lambda/\lambda_1}-\sqrt{n/2}\}$$
$$\subset\bigcup_{|k|\leqslant\sqrt{\lambda/\lambda_1}}B_k\{x:|x|\leqslant\sqrt{\lambda/\lambda_1}+\sqrt{n/2}\}$$

因为体积

$$\bigcup_{|k|\leqslant\sqrt{\lambda/\lambda_1}}B_k=N_\lambda/(n-1)+1$$

故　$\omega_n(\sqrt{\lambda/\lambda_1}-\sqrt{n/2}\ \ )^n\leqslant N_\lambda/(n-1)+1$

$$\leqslant\omega_n(\sqrt{\lambda/\lambda_1}+\sqrt{n/2})^n$$

设$\lambda'<\lambda<\lambda''$，$N(\lambda')<j<N(\lambda'')$，那么

$$(n-1)((\sqrt{\lambda'/\lambda_1}-\sqrt{n/2})^n\omega_n-1)$$
$$\leqslant j\leqslant(n-1)\{\omega_n(\sqrt{\lambda''/\lambda_1}+\sqrt{n/2})^n-1\}$$

令　$\lambda'\to\lambda_j$; $\lambda''\to\lambda_j$，得

$$(n-1)[\omega_n(\sqrt{\lambda_j/\lambda_1}-\sqrt{n/2})^n-1]$$
$$\leqslant j\leqslant(n-1)[\omega_n(\sqrt{\lambda_j/\lambda_1}+\sqrt{n/2})^n-1]$$

所以　$\lambda_j/\lambda_1=((n-1)\omega_n)^{-1/n}j^{2/n}+o(j^{1/n})$　证毕.

§9.3 定常的Navier－Stokes方程

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个开集．如无特别声明，我们总假设 Ω 是有界的，边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续．

Navier－Stokes 方程（不可压缩）是由 $(n+1)$ 个未知量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$（流体速度）和 p（流体压力）组成的 $n+1$ 个方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}-\lambda\Delta\mathbf{u}+\mathrm{grad}\,p=\mathbf{f}\\ \mathrm{div}\mathbf{u}=0\end{cases}\tag{9.3.1}$$

这里 $(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}$ 是惯性项（运流项），$-\lambda\Delta\mathbf{u}$ 是粘性项，在无量纲化后，$\lambda=\mathrm{Re}^{-1}$，Re 是 Reynolds 数．考察 Dirichlet 边界条件

$$\mathbf{u}|_{\Gamma}=\mathbf{g}\tag{9.3.2}$$

当 $\mathbf{g}\neq0$ 时，表示有滑动边界条件．$\mathbf{g}\equiv0$ 时，是无滑动边界，初值条件

$$\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_o(x),\ \mathrm{div}\mathbf{u}_o=0\tag{9.3.3}$$

对于定常情况，则(9.3.1)变为

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}+\mathrm{grad}\,p=\mathbf{f}\\ \mathrm{div}\,\mathbf{u}=0\end{cases}\tag{9.3.4}$$

引入双线性形式

$$a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})=\lambda(\mathrm{grad}\mathbf{u},\mathrm{grad}\mathbf{v})=\lambda\int_\Omega\nabla_i u_j\cdot\nabla_i v_j dx\tag{9.3.5}$$

$$b(\mathbf{u},q)=-\int_\Omega q\,\mathrm{div}\mathbf{u}dx\tag{9.3.6}$$

以及三线性形式

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\text{grad})\mathbf{v}\mathbf{w}\,dx = \int_\Omega u^j \nabla_j v^i w_i\,dx \tag{9.3.7}$$

这里 $(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 是 $\mathbf{u}$ 的逆变分量，在直角坐标系下，$u^i = u_i$.

那么，对无滑动边界条件下，定常 Navier－Stokes 方程的原始变量变分形式是

$$(Q)\begin{cases} \text{求}(\mathbf{u},p)\in \mathbf{X}_o\times \mathbf{M},\text{使得} \\ a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = <\mathbf{f},\mathbf{v}> \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{X}_o \\ b(\mathbf{u},q) = 0 \quad \forall q\in\mathbf{M}\end{cases} \tag{9.3.8}$$

这里 $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_o$, $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{V}$ 是由 § 9.1 中所定义的，其中

(1)　$a_o(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 的对称、连续双线性形式，并且是 $\mathbf{X}_o$ 强制的，即

$$a_o(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \lambda|\mathbf{u}|_1^2 \quad \forall \mathbf{u}\in X_o \tag{9.3.9}$$

(2)　$b(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}\to\mathbf{R}$ 的连续双线性形式，且满足 BB 条件（见 (9.1.12)).

由抽象定理 5.4.6 知，变分问题 (Q) 等价于变分问题 (P):

$$(P)\begin{cases}\text{求}\mathbf{u}\in\mathbf{V},\text{使得} \\ a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{u},\mathbf{v}) = <\mathbf{f},\mathbf{v}> \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}\end{cases} \tag{9.3.10}$$

1　三线性形式$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})$

引理 9.3.1　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{C}^l$ 类有界开集．实数 s_1,s_2,s_3 满足 $0\leqslant s_1\leqslant l$, $0\leqslant s_2\leqslant l-1$, $0\leqslant s_3\leqslant l$ 并且

(1)　$s_1+s_2+s_3\geqslant n/2$, 如果$s_i\neq n/2$, $i=1,2,3$

或　(2)　$s_1+s_2+s_3 > n/2$, 如果 $s_i = n/2$ 至少 $i=1,2,3$ 中有一个．那么存在一个依赖于 s_i, Ω 之常数 c, 它是尺度不变量，和常数 $k>0$, 使

$$\left|a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{v},\mathbf{w})\right| \leqslant k\|\mathbf{u}\|_{s_1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{s_2+1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{s_3,\Omega}$$

$$\forall \mathbf{u}\in \mathbf{H}^{s_1}(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^{s_2+1}(\Omega)^n,\ \mathbf{w}\in \mathbf{H}^{s_3}(\Omega)^n \tag{9.3.11}$$

$$\left|a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{v},\mathbf{w})\right| \leqslant c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{m_1}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1}^{\alpha_1}$$

$$\cdot\|\mathbf{v}\|_{m_2+1}^{1-\alpha_2}\|\mathbf{v}\|_{m_2+2}^{\alpha_2}\|\mathbf{w}\|_{m_3}^{1-\alpha_3}\|\mathbf{w}\|_{m_3+1}^{\alpha_3}$$

$$\forall \mathbf{u}\in \mathbf{H}^{m_1+1}(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^{m_2+2}(\Omega)^n,\ \mathbf{w}\in \mathbf{H}^{m_3+1}(\Omega)^n \tag{9.3.12}$$

其中$s_i = m_i + \alpha_i$, $0 \leqslant \alpha_i < 1$, m_i为s_i之最大整数.

证　首先设 $s_i < n/2$, $i = 1,2,3, q_i^{-1} = 1/2 - s_i/n$, $i = 1,2,3$, 那么定义 q_4:

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}=1 \quad 1\leqslant q_4 \leqslant +\infty$$

$\sum_{i=1}^{3} 1/q_i = 3/2 - (s_1+s_2+s_3)/n \leqslant 1$. 由 Hoelder 不等式，有

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{0,q_1,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{0,q_2,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{0,q_3,\Omega}\|1\|_{0,q_4,\Omega}$$

$$\leqslant \mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{0,q_1,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{0,q_2,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{0,q_3,\Omega} \tag{9.3.13}$$

回忆Соболев嵌入不等式(定理3.5.4)

$$\|\mathbf{u}\|_{0,q,\Omega} \leqslant c_s\|\mathbf{u}\|_{s,\Omega},\ s<n/2,\ 1/q = 1/2 - s/n \tag{9.3.14}$$

$$\|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_{0,\infty,\Omega} \leqslant c_{\alpha,s}\|\mathbf{u}\|_{s,\Omega},\ s>n/2,\ |\alpha| < s - n/2 \tag{9.3.15}$$

利用上式，则

$$\left|a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{v},\mathbf{w})\right|$$

$$\leqslant c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{s_1,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{s_2,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{s_3,\Omega} \tag{9.3.16}$$

这就是 (9.3.11)，其中 $k = c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}$, 利用插入不等式（参看第四章），就可以由 (9.3.16) 而得到 (9.3.12).

如果某个 $s_i > n/2$，则对应的 q_i 取为 $q_i = \infty$，然而对于 $s_j < n/2$ 应用 (9.3.14)，对 s_i 应用 (9.3.15)，则同样可以得到

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant k\|\mathbf{u}\|_{s_1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{s_2,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{s_3,\Omega} \tag{9.3.17}$$

这就得到 (9.3.11). 再应用插入不等式，由 (9.3.17) 就可以得到 (9.3.12).

然而，上述所得到的不等式常数，不是尺度不变量. 为了得到尺度不变量，我们可以这样来做.

对于 $s_i > n/2$ 情形，为了得到 (9.3.12)，对于 $q_i = \infty$ 应用插入不等式 (9.2.32). 例如若 $s_1 > n/2$，$s_2 < n/2$，$s_3 < n/2$ ，取 t 为：$n/2 = (1-t)0 + ts_1$，应用 (9.2.32)，和插入不等式，则

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega} &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^{1-t}\|\mathbf{u}\|_{s_1,\Omega}^{t}\\ &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^{1-t}(\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}^{\alpha_1})^{t}\end{aligned} \tag{9.3.18}$$

同样还有

$$\begin{cases}\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega} \leqslant \mathrm{meas}(\Omega)^{m_1/n}\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}\\ \|\mathbf{u}\|_{o,\Omega} \leqslant \mathrm{meas}(\Omega)^{(m_1+1)/n}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}\end{cases} \tag{9.3.19}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^{\alpha_1} &\leqslant \mathrm{meas}(\Omega)^{(1-\alpha_1)m_1/n+\alpha_1(m_1+1)/n}\\ &\cdot\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}^{\alpha_1}\end{aligned} \tag{9.3.20}$$

由(9.3.18), (9.3.20)可得

$$\|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega} \leqslant c\ \mathrm{meas}(\Omega)^{s_1/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}^{\alpha_1} \tag{9.3.21}$$

现在取 $q_1 = \infty$，$q_2^{-1} = 1/2 - s_2/n$，$q_3^{-1} = 1/2 - s_3/n$.

$$\frac{1}{q_4}=\frac{s_2+s_3}{n} \qquad (\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}=1)$$

故

$$\begin{aligned}|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| &\leqslant \|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{o,q_2,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,q_3,\Omega}\|1\|_{o,q_4,\Omega} \\ &\leqslant c\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}^{\alpha_1} \\ &\quad \cdot\|\mathrm{grad}\mathbf{v}\|_{s_2,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{s_3,\Omega} \\ &\leqslant c\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{m_1,\Omega}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1,\Omega}^{\alpha_1} \\ &\quad \cdot\|\mathbf{v}\|_{m_2+1,\Omega}^{1-\alpha_2}\|\mathbf{v}\|_{m_2+2,\Omega}^{\alpha_2}\|\mathbf{w}\|_{m_3}^{1-\alpha_3}\|\mathbf{w}\|_{m_3+1}^{\alpha_3}\end{aligned}$$

这就是式(9.3.12).

如果s_i中有多于一个$s_i>n/2$，可以进行同样的处理.

如果 s_i 中有一个 $s_i=n/2$，和 $s_1+s_2+s_3>n/2$，可取 $s_i'<n/2$ 来代替 s_i，使得式 $s_1'+s_2'+s_3'\geqslant n/2$，但 $s_i'\neq n/2$，$i=1,2,3$. 于是同样可以得到式(9.3.11)、(9.3.12)，这时由 $\|\mathbf{u}\|_{s_i'}\leqslant c\mathrm{meas}^{(s_i-s_i')/n}\|\mathbf{u}\|_{s_i}$，故式(9.3.11)和(9.3.12)对于 s_i 同样成立. 证毕.

由引理 9.3.1 立即可以推出 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{V}_{s_1}\times\mathrm{V}_{s_2+1}\times\mathrm{V}_{s_3}$ 上的三线性连续泛函. 尤其，令 $s_1=1$，$s_2=0$，$s_3=1$，则对于 $n=2$ 和 3 中情形，有

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})|\leqslant c|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathrm{V} \tag{9.3.22}$$

同样有下列特殊情形

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})|\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega} \tag{9.3.23}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})|\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\infty,\Omega} \tag{9.3.24}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})\quad| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}\|\mathrm{grad}\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega} \tag{9.3.25}$$

应用定理 9.2.6，令 $l_1 < n/2 < l_2$；$0 \leqslant l_i \leqslant l$ $i = 1,2$，$t = (\frac{n}{2} - l_1)/(l_2 - l_1)$，则有

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{l_1,\Omega}^{1-t}\|u\|_{l_2\Omega}^{t}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega} \tag{9.3.26}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^{1-t}\|\mathbf{w}\|_{l_1,\Omega}^{t} \tag{9.3.27}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{l_1+1,\Omega}^{1-t}\|\mathbf{v}\|_{l_2+1,\Omega}^{t} \tag{9.3.28}$$

对(9.2.32)可以取如下特殊形式

$$\|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega} \leqslant \begin{cases} c\|\mathbf{u}\|_{o}^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{2}^{1/2} \\ c\|\mathbf{u}\|_{1/2}^{2/3}\|\mathbf{u}\|_{2}^{1/3} \end{cases} \quad n=2,\ \mathbf{u}\in \mathbf{H}^2(\Omega)^n \tag{9.3.29}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{o,\infty,\Omega} \leqslant \begin{cases} c\|\mathbf{u}\|_{o}^{1/4}\|\mathbf{u}\|_{2}^{3/4} \\ c\|\mathbf{u}\|_{1}^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{2}^{1/2} \end{cases} \quad n=3,\ \mathbf{u}\in \mathbf{H}^2(\Omega)^n \tag{9.3.30}$$

应用(9.2.24)，那么有

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o}^{1/2}\|A\mathbf{u}\|_{o}^{1/2}|\mathbf{v}|_{1}\|\mathbf{w}\|_{o}$$

$$\forall \mathbf{u}\in D(A),\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{w}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^n,\quad n=2 \tag{9.3.31}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o}^{1/4}\|A\mathbf{u}\|_{o}^{3/4}|\mathbf{v}|_{1}\|\mathbf{w}\|_{o}$$

$$\forall \mathbf{u}\in D(A),\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n,\quad \mathbf{w}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^n,\quad n=3 \tag{9.3.32}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{1}^{1/2}\|A\mathbf{u}\|_{o}^{1/2}|\mathbf{v}|_{1}\|\mathbf{w}\|_{o}$$

$$\forall \mathbf{u}\in D(A),\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{w}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^n,\ n=3 \tag{9.3.33}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{o}|\mathbf{v}|_{1}\|\mathbf{w}\|_{o}^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_{o}^{1/2}$$

$$\forall \mathbf{u}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{w}\in D(A),\ n=2 \tag{9.3.34}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_o|\mathbf{v}|_1\|\mathbf{w}\|_o^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o^{3/4}$$

$$\forall \mathbf{u}\in \mathrm{L}^2(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{w}\in D(A),\ n=3 \tag{9.3.35}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_o|\mathbf{v}|_1\|\mathbf{w}\|_1^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o^{1/2}$$

$$\forall \mathbf{u}\in \mathrm{L}^2(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{w}\in D(A),\ n=3 \tag{9.3.36}$$

利用 (9.3.12) 和 (9.2.24), 取 $n=2$, $s_1=1/2$, $s_2=1/2$, $s_3=0$, 则 $m_1=m_2=m_3=0$, $\alpha_1=\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=0$, 故

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_1^{1/2}\|A\mathbf{v}\|_o^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o$$

$$n=2\quad \forall \mathbf{u}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{v}\in D(A),\ \mathbf{w}\in \mathrm{L}^2(\Omega)^n, \tag{9.3.37}$$

当 $n=3$, 取 $s_1=1$, $s_2=1/2$, $s_3=0$, $m_1=1$, $m_2=m_3=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=0$, 故

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1^{1/2}\|A\mathbf{v}\|_o^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o$$

$$n=3\quad \forall \mathbf{u}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n, \mathbf{v}\in D(A),\ \mathbf{w}\in \mathrm{L}^2(\Omega)^n \tag{9.3.38}$$

引理9.3.2 设 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n$, $n=2,3$, 那么

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})=\oint_\Gamma(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}ds - \int_\Omega(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathrm{div}\mathbf{u}dx \tag{9.3.39}$$

证 因为

$$(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}=(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})$$
$$=\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}))-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathrm{div}\mathbf{u}$$

利用Gauss公式就可以得到(9.3.39).证毕.

引理 9.3.3 设 $n=2,3$, $\mathbf{u}\in H$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n$ 或 $\mathbf{u}\in \mathrm{H}^1(\Omega)^n$, $\mathrm{div}\mathbf{u}=0$, $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 中有一个属于 $\mathrm{H}_o^1(\Omega)^n$, 另一个属于 $\mathrm{H}^1(\Omega)^n$, 则

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) + a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v}) = 0,\ a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \tag{9.3.40}$$

证 这是引理9.3.2的直接结果.

2 **双线性算子B(u,v)**

设P为$L^2(\Omega)^n \to H$之Leray投影，令

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = P((\mathbf{u}\cdot \mathrm{grad})\mathbf{v}) \tag{9.3.41}$$

它定义了一个$V \times V \to V'$之双线性连续算子

$$\langle B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad \forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in V\times V, \mathbf{w}\in V \tag{9.3.42}$$

由引理 9.3.1 我们可以断定，$B(\cdot,\cdot)$也是$V_{s_1} \times V_{s_2+1} \to V_{-s_3}$之双线性连续算子，这里$s_1$，$s_2$，$s_3$满足引理 9.3.1 中的假设.

引理 9.3.4 设$\Omega\subset \mathbf{R}^n$是$C^l$类有界开集，$s_1$，$s_2$，$s_3\in\mathbf{R}$且$0\leqslant s_1\leqslant l$，$0\leqslant s_2\leqslant l-1$，$0\leqslant s_3\leqslant l$，$s_1+s_2+s_3\geqslant n/2$，但$(s_1,s_2,s_3)\neq(n/2,0,0)$或$(0,n/2,0)$或$(0,0,n/2)$，那么存在常数$c>0$，它是尺度不变量，$\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in C^\infty(\overline{\Omega})^n$成立

$$\|A^{-s_3/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_o \leqslant c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{m_1}^{1-\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{m_1+1}^{\alpha_1} \cdot \|\mathbf{v}\|_{m_2+1}^{1-\alpha_2}\|\mathbf{v}\|_{m_2+2}^{\alpha_2} \tag{9.3.43}$$

其中 $s_i = m_i+\alpha_i$，$0\leqslant\alpha_i<1$，m_i为整数，同样有

$$\|A^{-s_3/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_o \leqslant c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{s_1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{s_2+1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u}\in H^{s_1}(\Omega)^n,\ \mathbf{v}\in H^{s_2+1}(\Omega)^n \tag{9.3.44}$$

证 显然，$B(\mathbf{u},\mathbf{v})\in H$，故$A^{-s_3/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v})\in D(A^{s_3/2})$. 设$\mathbf{w}\in H$是任意的，注意到$P(A^{-s_3/2}\mathbf{w}) = A^{-s_3/2}\mathbf{w}$，有

$$(A^{-s_3/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}) = (B(\mathbf{u},\mathbf{v}),A^{-s_3/2}\mathbf{w}) = a_1(\mathbf{u};v,A^{-s_3/2}\mathbf{w})$$

故应用(9.3.11)得

$$|(A^{-s_3/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w})| \leqslant c\,\mathrm{meas}(\Omega)^{(s_1+s_2+s_3)/n-1/2}\|\mathbf{u}\|_{s_1}\|\mathbf{v}\|_{s_2+1}$$

$$\cdot\|A^{-s_3/2}\mathbf{w}\|_{s_3,\Omega} \tag{9.3.45}$$

另一方面，$A^{-s_3/2}\mathbf{w}\in D(A^{s_3/2})\subset\mathbf{H}^{s_3}(\Omega)^n$，由定理 9.2.8，这种嵌入总是连续的，故

$$\|A^{-s_3/2}\mathbf{w}\|_{s_3,\Omega}\leqslant c\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega} \tag{9.3.46}$$

将 (9.3.46) 代入 (9.3.45) 后就得到 (9.3.44)，应用插入不等式，就可以得到 (9.3.43). 证毕.

引理 9.3.5　$\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}$，定义算子 $k(\mathbf{u}):\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ 使得

$$k(\mathbf{u})\mathbf{v}=A^{-1}B(\mathbf{u},\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V} \tag{9.3.47}$$

那么 $k(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ 的紧算子，且 $k(\mathbf{u})$ 也是 $\mathbf{V}\to D(A^{3/4})$ 的线性有界算子

$$\|A^{3/4}k(\mathbf{u})\mathbf{v}\|_o\leqslant c|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1,\ c>0,\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},\mathbf{u}\in\mathbf{V} \tag{9.3.48}$$

证　$A^{3/4}k(\mathbf{u})\mathbf{v}=A^{3/4}A^{-1}B(\mathbf{u},\mathbf{v})=A^{-1/4}B(\mathbf{u},\mathbf{v})$，在 (9.3.44) 中取 $s_1=1$，$s_2=0$，$s_3=1/2$，$3/2\geqslant n/2$，($n=2$ 或 3)，从而得到 (9.3.48). 列紧性是由于 (9.2.38)，$D(A^{3/4})\subset\mathbf{H}^{3/2}(\Omega)^n$，而 $\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^{3/2}(\Omega)^n$ 到 $\mathbf{V}$ 是紧嵌入. 证毕.

3　定常解的存在唯一问题

定理 9.3.1　设 $n\leqslant 3$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是具有 Lipschitz 连续边界的有界开集，$\forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)^n$，则问题 ($Q$) 至少存在一个解 $(u,p)\in\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}$

证　利用定理5.4.3，我们只须证明三线性形式

$$a(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})=a_o(\mathbf{v},\mathbf{w})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})$$

满足强制性条件：$\forall\mathbf{u}\in\mathbf{X}_o$，

$$a(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant \alpha \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_o \tag{9.3.49}$$

以及在 $\mathbf{X}_o$ 中 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是序列弱连续的．同时双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足 BB 条件，从而断定问题至少存在一个解．

由于式 (9.3.9) 和 (9.3.40)，条件 (9.3.49) 成立．下面我们来证明 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的序列弱连续性

设 $\mathbf{u}_m \subset \mathbf{X}_o$ 中弱收敛于 $\mathbf{u}$:$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$(弱)．由于 $\mathbf{X}_o \subset \mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 是列紧嵌入，故存在子序列(仍记为 $\mathbf{u}_m$)在 $\mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 中强收敛．$\forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}$，有

$$\begin{aligned}
& a(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) - a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&= a_o(\mathbf{u}_m - \mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_m - \mathbf{u};\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\mathbf{u}_m - \mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&= a_o(\mathbf{u}_m - \mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_m - \mathbf{u};\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) - a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

$I_1 = a_o(\mathbf{u}_m - \mathbf{u},\mathbf{v}) \to 0$, $m \to +\infty$ 是由于 $\mathbf{u}_m$ 在 $\mathbf{X}_o$ 中弱收敛．

对 I_2，应用式 (9.3.11)，取 $s_1 = 0$，$s_2 = 0$，$s_3 = 2$．对 I_3 取 $s_1 = 1$，$s_2 = 1$，$s_3 = 0$，则可以得到

$$|I_2 + I_3| \leqslant c(\|\mathbf{u}_m\|_1 \|\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_2)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_o$$

注意，$\mathbf{u}_m$ 在 $\mathbf{X}_o$ 弱收敛，所以 $\|\mathbf{u}_m\|_1$ 有界，从而 $\lim(I_2 + I_3) = 0$ 当 $m \to \infty$ 时．即

$$\lim_{m\to\infty} a(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) = a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}$$

由于 H 在 V 中稠密，所以上述对任一个 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ 也成立．从而证明了 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 在 V 中序列弱收敛．证毕．

定理9.3.2 设定理9.3.1的假设成立.如果

$$\|a_1\| \lambda^{-2} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} < 1 \tag{9.3.50}$$

那么问题(Q)只有唯一解.

证　利用定理 5.4.5，只须验证 $a(\cdot;\cdot,\cdot)$ 满足局部 Lipschitz 连续就可以. 实际上，由式 (9.3.22) 得

$$|a(\mathbf{w}_1;\mathbf{u},\mathbf{v})-a(\mathbf{w}_2;\mathbf{u},\mathbf{v})|=|a_1(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2;\mathbf{u},\mathbf{v})|$$
$$\leqslant c\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|_1$$

于是定理得证.

4　**解的估计**

我们对问题(P)的解，估计不同范数下的界

如果$\mathbf{f}\in\mathbf{V}'$，则对(9.3.8)中令$\mathbf{v}=\mathbf{u}$利用式(9.3.40)得

$$\lambda|\mathbf{u}|_1^2=<\mathbf{f},\mathbf{u}>\leqslant\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}|\mathbf{u}|_1$$

从而得

$$|\mathbf{u}|_1\leqslant\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}\tag{9.3.51}$$

定理 9.3.3　设 $\mathbf{f}\in\mathbf{H}$. 那么问题 (P) 的解 $\mathbf{u}\in D(A)$. 并且

$$|\mathbf{u}|_1\leqslant\lambda^{-1}\|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o\tag{9.3.52}$$

$$\|A^{3/4}\mathbf{u}\|_o\leqslant\lambda^{-1}\|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o+c\lambda^{-3}\|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o^2\tag{9.3.53}$$

$$\|A\mathbf{u}\|_o\leqslant\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o+c\lambda^{-3}(\lambda^{-2}\|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o^2$$
$$+\|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o)\|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o\tag{9.3.54}$$

证　首先证明，$\mathbf{f}\in\mathbf{H}$时，问题(P)的解$\mathbf{u}\in D(A)$.

由引理9.3.5推出，由于$\mathbf{u}\in\mathbf{V}$，所以$k(\mathbf{u})\mathbf{u}\in D(A^{3/4})$且

$$\|A^{3/4}k(\mathbf{u})\mathbf{u}\|_o\leqslant c|\mathbf{u}|_1^2\tag{9.3.55}$$

利用问题(P)的等价形式

$$\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f}\tag{9.3.56}$$

$$\lambda\mathbf{u}+k(\mathbf{u})\mathbf{u}=A^{-1}\mathbf{f}\tag{9.3.57}$$

可知

$$A^{3/4}\mathbf{u}=\lambda^{-1}(A^{-1/4}\mathbf{f}-A^{3/4}k(\mathbf{u})\mathbf{u})\tag{9.3.58}$$

所以，联合式(9.3.58)和(9.3.55)得

$$\|A^{3/4}\mathbf{u}\|_o \leqslant \lambda^{-1}(\|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o + c|\mathbf{u}|_1^2) \tag{9.3.59}$$

由式(9.2.38)和(9.3.59)得

$$\|\mathbf{u}\|_{3/2} \leqslant c\|A^{3/4}\mathbf{u}\|_o \leqslant c\lambda^{-1}(\|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o + |\mathbf{u}|_1^2) \tag{9.3.60}$$

在式(9.3.43)中取$s_3 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1/2$ $(n = 2,3)$, 成立

$$\begin{aligned}\|B(\mathbf{u},\mathbf{u})\|_o &\leqslant c\text{meas}(\Omega)^{3/2n-1/2}\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{u}\|_{3/2} \\ &\leqslant c\lambda^{-1}(\|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o + |\mathbf{u}|_1^2)|\mathbf{u}|_1\end{aligned} \tag{9.3.61}$$

这就说明，因为 $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ 且满足式 (9.3.51)，所以 $B(\mathbf{u},\mathbf{u})\in\mathbf{H}$ 且有估计式 (9.3.61). 从而，式 (9.3.56) 给出

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{u}\|_o &\leqslant \lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_o + \|B(\mathbf{u},\mathbf{u})\|_o) \\ &\leqslant \lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_o + c\lambda^{-1}|\mathbf{u}|_1(|\mathbf{u}|_1^2 + \|A^{-1/4}\mathbf{f}\|_o))\end{aligned} \tag{9.3.62}$$

这就说明，问题(P)的解$\mathbf{u}\in D(A)$.

对式(9.3.57)两边和$A\mathbf{u}$做内积

$$\lambda(\mathbf{u},\mathbf{A}\mathbf{u}) + (k(\mathbf{u})\mathbf{u},A\mathbf{u}) = (A^{-1}\mathbf{f},A\mathbf{u}) \tag{9.3.63}$$

注意到A的对称性.

$$(\mathbf{u},A\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|_1^2$$

$$(k(\mathbf{u})\mathbf{u},A\mathbf{u}) = (A^{-1}B(\mathbf{u},\mathbf{u}),A\mathbf{u}) = (B(\mathbf{u},\mathbf{u}),A\mathbf{u}) = a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$$

$$(A^{-1}\mathbf{f},Au) = (A^{-1/2}\mathbf{f},A^{1/2}\mathbf{u}) \leqslant |\mathbf{u}|_1\|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o$$

因而由式(9.3.63)推出

$$\lambda|\mathbf{u}|_1 \leqslant \|A^{-1/2}\mathbf{f}\|_o$$

这就是式 (9.3.52). 将式 (9.3.52) 代入式 (9.3.59) 就得到式 (9.3.53). 将式 (9.3.52) 代入式 (9.3.62) 就得到式 (9.3.54). 证毕 .

5 滑动边界条件

设非齐次的Dirichlet条件

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g},\ \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n,\ \oint_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \tag{9.3.64}$$

为了研究在式(9.3.64)边界条件下，N－S方程的适定性问题，我们需要Hopf技巧.

引理 9.3.6 设 $n \leqslant 3$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界开集，$\Gamma = \partial\Omega$ 为Lipschitz连续，$\forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n$, $\oint_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = 0$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$ 存在一个函数 $\mathbf{u}_o = \mathbf{u}_o(\varepsilon) \in \mathbf{X}$ 使得

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_o = 0, \quad \mathbf{u}_o|_{\Gamma} = \mathbf{g} \tag{9.3.65}$$

$$|a_1(\mathbf{v}; \mathbf{u}_o, \mathbf{v})| \leqslant \varepsilon |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{9.3.66}$$

$$|a_1(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{u}_o)| \leqslant \varepsilon |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_o \tag{9.3.67}$$

为了证明这个引理，我们需要下列两个引理

引理 9.3.7 设 Ω 满足引理 9.3.6 的假设，$\forall \varepsilon > 0$, 存在一个函数 $\theta_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ 使得

$$\theta_\varepsilon = 1 \qquad \text{在}\Gamma\text{的邻域内} \tag{9.3.68}$$

$$\theta_\varepsilon = 0 \qquad d(x,\Gamma) \geqslant 2\delta(\varepsilon),\ \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon) \tag{9.3.69}$$

$$|\partial\theta_\varepsilon(x)/\partial x_i| \leqslant \varepsilon / d(x,\Gamma),\ d(x,\Gamma) \leqslant 2\delta(\varepsilon),\ 1 \leqslant i \leqslant n \tag{9.3.70}$$

其中 $d(x,\Gamma)$ 为 x 到 Γ 的距离.

证 $\forall \mu \geqslant 0$, 定义

$$\varphi_\varepsilon(\mu) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant \mu \leqslant \delta(\varepsilon)^2 \\ \varepsilon \log(\delta(\varepsilon)/\mu) & \delta^2(\varepsilon) \leqslant \mu \leqslant \delta(\varepsilon) \\ 0 & \mu \geqslant \delta(\varepsilon) \end{cases}$$

显然，$\varphi_\varepsilon \in \mathbf{H}^{1,\infty}(\mathbf{R}_+)$, 令

$$\chi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(d(x,\Gamma)) \quad x \in \Omega$$

由于Γ是Lipschitz连续，$d \in \mathrm{H}^{1,\infty}(\Omega)$，且

$$\left|\partial d(x,\Gamma) / \partial x_i\right| \leqslant 1$$

因而$\chi_\varepsilon \in \mathrm{H}^{1,\infty}(\Omega)$且满足

$$\left|\partial \chi_\varepsilon(x) / \partial x_i\right| \leqslant \varepsilon / d(x,\Gamma) \quad \forall d(x,\Gamma) \leqslant \delta(\varepsilon)$$

$\chi_\varepsilon(x)$ 正则化后，便得到 $\theta_\varepsilon(x)$，这就是所要证明的．证毕．

引理9.3.8 存在常数$c = c(\Omega) > 0$使得

$$\|\varphi / d(\cdot,\Gamma)\|_{o,\Omega} \leqslant c|\varphi|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}_o^1(\Omega) \tag{9.3.71}$$

证 利用单位分解和边界展平技巧，我们只须证明上半空间情形就够了．$\mathbf{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\}$．$d(x,\Gamma) = x_n$．因而，为了证明 (9.3.71)，只须验证

$$\int_{R_+^n} [|\varphi(x)| / x_n]^2 dx \leqslant c \int_{R_+^n} \left|\partial\varphi / \partial x_n\right|^2 dx \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_o^\infty(\mathbf{R}_+^n)$$

然而，这个不等式是下列Hardy不等式的结果

$$\int_o^\infty (\varphi(t) / t)^2 dt \leqslant 4\int_o^\infty |\varphi'(t)|^2 dt \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_o^\infty(\mathbf{R}_+) \tag{9.3.72}$$

这个不等式容易证明，实际上

$$\varphi(t) = \int_o^t \varphi'(s) ds$$

令 $t = e^s$，$\tau = e^\xi$

$$\int_o^\infty (\varphi(t) / t)^2 dt = \int_o^\infty t^{-1}\left(\int_o^t \varphi'(\tau) d\tau\right)^2 t^{-1} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s}\left(\int_{-\infty}^s \varphi'(e^\xi) e^\xi d\xi\right)^2 ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H(s-\xi) e^{-(s-\xi)/2} \varphi'(e^{\xi}) e_2^{\xi} d\xi \right)^2 ds$$

这里H为经典的Heaviside函数.利用卷积公式

$$\| f * g \|_o \leqslant \| f \|_{o,1} \| g \|_o$$

得

$$\int_o^{\infty} (\varphi(t)/t)^2 dt \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{-s/2} ds \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(e^{\xi})^2 e^{\xi} d\xi$$

$$= 4 \int_o^{\infty} \varphi'(\tau)^2 d\tau$$

这就证明了式(9.3.72).

引理 9.3.6 的证明．由于 $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n$ 和 $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = 0$. 故存在 $\mathbf{w}_o \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n$ 使得 $\mathrm{div} \mathbf{w}_o = 0$, $\mathbf{w}_o |_{\Gamma} = \mathbf{g}$. 利用流函数方法，存在 $\psi_o \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ $(n=2)$ 或 $\psi_o \in \mathbf{H}^2(\Omega)^3$ $(n=3)$ 使得

$$\mathbf{w}_o = \begin{cases} \mathrm{curl}\ \psi_o & n=2 \\ \mathrm{curl}\ \psi_o & n=3 \end{cases}$$

为简单起见，我们只考察$n=3$情形.$\forall \mu > 0$作

$$\mathbf{u}_{o\mu} = \mathrm{curl}(\theta_{\mu} \psi_o)$$

其中 θ_{μ} 由式 (9.3.68) – (9.3.70) 所定义．显然 $\mathbf{u}_{o\mu} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3$，并且

$$\mathrm{div} \mathbf{u}_{o\mu} = 0, \qquad \mathbf{u}_{o\mu} |_{\Gamma} = \mathbf{g}$$

如果$d(x,\Gamma) \leqslant 2\delta(\mu)$，由引理9.3.7得

$$\left| \frac{\partial (\theta_{\mu} \psi_{oi})}{\partial x_j} \right| \leqslant \mu |d(x,\Gamma)|^{-1} |\psi_{oi}(x)| + \left| \frac{\partial \psi_{oi}}{\partial x_j}(x) \right|$$

所以

$$\| u_{o\mu} \| \leqslant c[\mu / d(x,\Gamma) \| \psi_o(x) \| + \| D \psi_o(x) \|]$$

这里$\|\cdot\|$记$\mathbf{R}^n$中的Euclid范数，而

$$\|D\psi_o(x)\| = \left(\sum_{ij}\left|\partial\psi_{oi}(x)/\partial x_j\right|^2\right)^{1/2}$$

设$\mathbf{v}\in\mathbf{V}$，由于$\mathbf{H}^2(\Omega)$到$\mathbf{C}_o(\overline{\Omega})$的嵌入是连续的，得

$$\|v_i u_{o\mu j}\|_{o,\Omega} \leqslant c_2\{\mu\|v_i/d(\cdot,\Gamma)\|_{o,\Omega} + (\int_{d(x,\Gamma)\leqslant 2\delta(\mu)}[v_i\|D\psi_o(x)\|]^2dx)^{1/2}\}$$

利用引理9.3.8得

$$\|v_i/d(0,\Gamma)\|_o \leqslant c_3|v_i|_1$$

其次，$\mathbf{H}^1(\Omega)$到$\mathbf{L}^6(\Omega)$的嵌入是连续的，由Hoelder不等式

$$(\int_{d(x,\Gamma)\leqslant 2\delta(\mu)}[v_i\|D\psi_o\|]^2dx)^{1/2} \leqslant c_4|v_i|_1(\int_{d(x,\Gamma)\leqslant 2\delta(\mu)}\|D\psi_o\|^3dx)^{1/3}$$

设
$$\varphi(\mu) = (\int_{d(x,\Gamma)\leqslant 2\delta(\mu)}\|D\psi_o\|^3dx)^{1/3}$$

得
$$\|v_i u_{o\mu j}\|_o \leqslant c_3(\mu+\varphi(\mu))|v_i|_1$$

因而
$$|a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\mathbf{u}_{o\mu})| = \left|\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega v_i u_{o\mu j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant c(\mu+\varphi(\mu))|\mathbf{v}|_1^2$$

$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(\mu)=0$，我们可以选取$\mu(\varepsilon)$充分小，使得

$$c(\mu+\varphi(\mu))\leqslant\varepsilon$$

那么$\mathbf{u}_o(\varepsilon)=\mathbf{u}_{o\mu}$就是所要求函数．于是式(9.3.67)得证，利用式(9.3.40)就得到$\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$成立式(9.3.66). 证毕．

设 u_o 是引理 9.3.6 中所定义的．令 $\mathbf{u}=\mathbf{w}+\mathbf{u}_o$，则 $\mathbf{w}$ 满足

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\mathbf{w}+(\mathbf{w}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{w}+\mathrm{grad}p+(\mathbf{u}_o\cdot\mathrm{grad})\mathbf{w} \\ +(\mathbf{w}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}_o=\mathbf{f}-(\mathbf{u}_o\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}_o \\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}=0 \\ \mathbf{w}|_\Gamma=0 \end{cases} \tag{9.3.73}$$

对应的变分问题是

$$(Q^*)\begin{cases} 求(\mathbf{w},p)\in\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}使得 \\ a_o(\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\ \mathbf{w},\mathbf{v})+b(p,\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}_o;\ \mathbf{w};\ \mathbf{v}) \\ +a_1(\mathbf{w};\ \mathbf{u}_o,\mathbf{v})=\langle\mathbf{F},\mathbf{v}\rangle\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o \\ b(q,\mathbf{u})=0\quad\forall q\in\mathbf{M} \end{cases}$$

与问题(Q^*)相对应是问题(P^*)

$$(P^*)\begin{cases} 求\mathbf{w}\in\mathbf{V}使得 \\ a_o(\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}_o;\ \mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_o,\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{w},\mathbf{v}) \\ \qquad=<\mathbf{F},\mathbf{v}>\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V} \end{cases}$$

其中 $<\mathbf{F},\mathbf{v}>\ =\ <\mathbf{f},\mathbf{v}>\ -a_1(\mathbf{u}_o;\mathbf{u}_o,\mathbf{v})$

定理 9.3.4　设 $n\leqslant 3$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有 Lipschitz 连续边界的有界开集．那么 $\forall\,\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)^n$，$\mathbf{g}\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n$，$\oint_\Gamma\mathbf{g}\cdot n\mathrm{d}s=0$. 那么 Navier－Stokes 方程 (9.3.1), (9.3.2) 至少存在一个弱解 $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n\times\mathbf{M}$.

证　实际上，我们只须证明问题 (P^*) 有一个解 $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ 就可以．先考察双线性形式

$$d(\mathbf{w},\mathbf{v})=a_o(\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}_o;w,\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_o,\mathbf{v})$$

那么$d(\mathbf{w},\mathbf{v})$是$\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$之连续双线性形式

$$|d(\mathbf{w},\mathbf{v})|\leqslant\lambda|\mathbf{w}|_1|\mathbf{v}|_1+(c|\mathbf{u}_o|_1)|\mathbf{w}|_1|\mathbf{v}|_1$$

这里用到式(9.3.22).$d(\mathbf{w},\mathbf{v})$也是V强制．实际上，利用引理9.3.6，则

$$
\begin{aligned}
d(\mathbf{w},\mathbf{w}) &= \lambda|\mathbf{w}|_1^2 + a_1(\mathbf{u}_o;\mathbf{w},\mathbf{w}) + a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_o,\mathbf{w}) \\
&= \lambda|\mathbf{w}|_1^2 + a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_o,\mathbf{w}) \\
&\geqslant \lambda|\mathbf{w}|_1^2 - \varepsilon|\mathbf{w}|_1^2 = (\lambda-\varepsilon)|\mathbf{w}|_1^2 = \alpha|\mathbf{w}|_1^2 \quad \forall \mathbf{w}\in \mathbf{V}
\end{aligned}
$$

只要ε充分小，则$\alpha > 0$.

另一方面，三线性形式$a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$是$\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{R}$连续的三线性形式，而且满足序列弱连续性．同时，$<\mathbf{F},\mathbf{v}>$关于$\mathbf{v}$是$\mathbf{V}$上连续线性泛函．对问题$(P^*)$满足定理5.4.4的条件．所以$(P^*)$至少存在一个解．证毕．

为了证明唯一性，我们置

$$
E(\mathbf{u}_o) = \sup_{v\in V}\frac{a_1(\mathbf{v};\ \mathbf{u}_o,\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1^2}
$$

$$
\|l(\mathbf{f},\mathbf{u}_o)\|_{V'} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}}\frac{\langle F,\mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{v}|_1} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}}\frac{<\mathbf{f},\mathbf{v}> - a_1(\mathbf{u}_o;\ \mathbf{u}_o,\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_o = \inf\{ & E(\mathbf{u}_o) + (\|a_1\|\cdot\|l(\mathbf{f},\mathbf{u}_o)\|_{V'})^{1/2}, \\
& \mathbf{u}_o\in \mathbf{H}^1(\Omega)^n,\ \mathbf{u}_o\text{满足式(9.3.65)}\}
\end{aligned}
$$

对任何$\lambda>0$，根据引理9.3.6和映照$\mathbf{g}\to\mathbf{u}_o$的连续性，当$\mathbf{f},\mathbf{g}$适当小时，可以做到$\lambda-\lambda_o>0$，证毕．

定理9.3.5 设定理9.3.4条件成立．那么，如果$\mathbf{f},\mathbf{g}$如此之小使得$\lambda-\lambda_o>0$，则问题(P^*)的解是唯一的．

证 作三线性形式

$$
\tilde{a}(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_o;\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\mathbf{u}_o,\mathbf{v})
$$

$$+ a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})$$

则$\tilde{a}(\mathbf{w};\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant (\lambda - E(\mathbf{u}_o))|\mathbf{v}|_1^2$. 可以选取 $\mathbf{u}_o$ 使 $\lambda - E(\mathbf{u}_o) \geqslant \alpha > 0$. 另一方面，由于 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是序列弱连续的，所以$\tilde{a}$ 也是序列弱连续的 .$\tilde{a}(\cdot;\cdot,\cdot)$ 也满足局部 Lipschitz 连续，实际上，

$$|\tilde{a}(\mathbf{w}_1;\mathbf{u},\mathbf{v}) - \tilde{a}(\mathbf{w}_2;\mathbf{u},\mathbf{v})| = |a_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2;\mathbf{u},\mathbf{v})|$$
$$\leqslant c|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_v|_1$$

由定理 5.4.5, 为了使得问题 (P^*) 存在唯一解，只须使得

$$\frac{\|a_1\| \cdot \|l(\mathbf{f},\mathbf{u}_o)\|_{V'}}{(\lambda - E(\mathbf{u}_o))^2} < 1 \tag{9.3.74}$$

即
$$\lambda > E(\mathbf{u}_o) + (\|a_1\| \cdot \|l(\mathbf{f},\mathbf{u}_o\|_{V'})^{1/2}$$

如果 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 使得 $\lambda - \lambda_o > 0$, 那么对于这样的 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 及 $\mathbf{u}_o$, 式 (9.3.74) 得到满足，因而问题 (P^*) 有唯一解 . 证毕 .

由以上讨论和定理5.4.5同样可以得到解的估计

$$|\mathbf{u}|_1 \leqslant |\mathbf{u}_o|_1 + (\lambda - E(\mathbf{u}_o))^{-1}\|l(\mathbf{f},\mathbf{u}_o)\|_{V'} \tag{9.3.75}$$

§9.4 多解和分歧

Navier - Stokes 方程是一个非线性方程 . 非线性效应的最基本表现是解的不唯一 . 对于线性问题，众所周知，根据 Fredholm 理论，要么有唯一解，要么有无穷多个解，而非线性方程解的结构则要复杂得多 .

下面举一个 N - S 方程，具有两个以上定常解的例子 .

设 Ω 为一个光滑的不包含任何旋转轴的点的旋转面 . 采用极坐标 (r,θ,z), 其中 z 轴为旋转轴 . 设体积力形式为 $\mathbf{f}$

$=(0,f_o(r),0)$ 使得 N－S 方程允许有一个定常解 $\mathbf{u}(r)=(0,\sigma u_o(r),0)$，$-\infty<\sigma<+\infty$，那么我们求一个轴对称解 $\mathbf{w}(r,z)$，使得 $\mathbf{u}(r)+\mathbf{w}(r,z)$ 也是 N－S 方程的解．不难验证，$\mathbf{w}(r,z)$ 满足

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{w}=&Re((\mathbf{w}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{w}\\&+(\mathbf{u}(r)\cdot\mathrm{grad})\mathbf{w}+(\mathbf{w}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}(r))+\mathrm{grad}\,p\\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}=&0\end{aligned}$$

设 D 为 Ω 之垂直于 z 轴横截部分．那么考虑旋转对称性，双线性形式

$$\begin{aligned}a_o(\mathbf{w},\mathbf{v})=\int_D\{&\frac{\partial w_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial w_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{1}{r^2}(w_o v_o+w_r v_r)\\&+\frac{\partial w_\theta}{\partial r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial w_\theta}{\partial z}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial w_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\\&+\frac{\partial w_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\}rdrdz\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{w}=\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\partial w_z}{\partial z}+\frac{1}{r}w_r$$

$$\begin{aligned}a_2(\mathbf{w};\mathbf{w},\mathbf{v})=\int_D\{&w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}v_r-\frac{1}{r}w_\theta w_\theta v_r+w_z\frac{\partial w_r}{\partial z}v_r\\&+w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}v_\theta+\frac{1}{r}w_\theta w_r v_\theta+w_z\frac{\partial w_\theta}{\partial z}v_\theta\\&+w_r\frac{\partial w_z}{\partial r}v_z+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}v_z\}rdrdz\end{aligned}$$

$$a_1(\mathbf{u}(r);\mathbf{w},\mathbf{v})=\int_D\{-\frac{1}{r}u_o w_\theta v_r+\frac{1}{r}u_o w_r v_\theta\}rdrdz$$

$$a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}(r),\mathbf{v}) = \int_D \{-\frac{1}{r} w_\theta u_o v_r + w_r u_o v_\theta\} r dr dz$$

$$a_1(\mathbf{u}(r);\mathbf{w},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}(r),\mathbf{v})$$

$$= \int_D \{-\frac{2}{r} u_o w_\theta u_r + (\frac{1}{r} u_o + u_o') w_r w_\theta\} r dr dz$$

引入V之等价内积和范数

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \int_D \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}(u_o v_o + u_r v_r) \right\} r dr dz$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 = (\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathbf{V}}$$

引入线性算子L和非线性算子T

$$(L\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathbf{V}} = \int_D \{(\frac{1}{r} u_o + u_o') w_r v_\theta - \frac{2}{r} u_o w_\theta v_r\} r dr dz$$

$$(T\mathbf{w},\mathbf{V})_{\mathbf{V}} = \int_D \{w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} v_r - \frac{1}{r} w_\theta^2 v_r + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} v_r$$

$$+ w_r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} v_\theta + \frac{1}{r} w_\theta w_r v_\theta + w_z \frac{\partial w_\theta}{\partial z} v_\theta$$

$$+ w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} v_z + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} v_z\} r dr dz$$

选取$u_o = r^\beta$，$\beta < -1$，那么$\mathrm{div} u(r) = 0$，令

$$a = \frac{1}{r} u_o + u_o' = (1+\beta) r^{\beta-1}$$

$$w_o = -\frac{1}{r} u_o = -r^{\beta-1}$$

如果 β 使得 $\partial w_0 = a$，即 $\beta = -3$. 那么 L 是 V 中自共轭和紧的线性算子，因而有可数个孤立的特征值

$$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \to +\infty$$

引理 9.4.1 设 Ω 如上所述，那么存在体积力密度 f 和边界条件 g，使得对应的 Navier-Stokes 方程的旋转对称定常流不是唯一的.

证 设 φ_i 为对应于 μ_i 之特征向量，令

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{g} + \varphi_i),\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \varphi_i)$$

这里 $\mathbf{g} = (0, \mu r^{\beta}, 0)$，$\beta < -1$，$\mu = \sigma / \lambda$. 那么 $\mathrm{div}\mathbf{u}_1 = \mathrm{div}\mathbf{u}_2 = 0$，$u_1\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_2\big|_{\partial\Omega}$，并且在 Ω 内，

$$(I - \mu_i L)\mathbf{u}_1 + \mu_i T(\mathbf{u}_1) = (I - \mu_i L)\mathbf{u}_2 + \mu_i T(\mathbf{u}_2)$$

因此，如果选取 f

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_D \mathbf{f}\mathbf{v} r\, dr\, dz$$

使得 $\mathbf{f} = (I - \mu L)\mathbf{u}_1 + \mu T(\mathbf{u}_1) = (I - \mu L)\mathbf{u}_2 + \mu T(\mathbf{u}_2)$，则 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ 都是相应的旋转对称定常流. 证毕.

为了研究解不唯一情形，我们先把非线性方程粗略地加以分类；设 $N(u) = f$ 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的映照.

定义9.4.1 如果一个线性连续算子 L:X→Y，满足

(1) $\dim(\ker(L)) < \infty$;

(2) Range(L)是闭的;

(3) Range(L) 的余维数 $\dim(\mathrm{coker}(L)) = \dim(Y \setminus \mathrm{Range}(L)) < \infty$，那么称 L 为 Fredholm 算子. 而整数 Index(L) $= \dim(\ker(L) - \dim(\mathrm{coker}(L))$ 称为 L 的 Fredholm 指标，有时简记为 Ind(L).

当 $L = L_1 + L_2$，L_1 是 X→Y 的紧算子，而 L_2 是 X 到 Y

的一个同构，那么 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子，尤其 $L=I+L_o$ 其中 L_o 是一个 X→Y 的紧算子，则 L 是一个典型的 Fredholm 算子．

设 $S\subset X$ 是一个连通集，N 是 $S\to Y$ 的非线性算子．如果 N 是 C^1 类的，且在每个点 $u\in S$ 上，它的导算子 $N'(u)$ 是一个 X→Y 的 Fredholm 算子，那么称 N 为一个非线性的 Fredholm 算子．

由 Fredholm 算子的性质可知，$N'(u)$ 之指标不依赖于 u. 因此我们定义 $\mathrm{ind}(N)=\mathrm{Ind}(N'(u))$.

定义 9.4.2 $u\in X$ 称为是 N 的一个正则点，如果 $N'(u)$ 是 X→Y 的同构；否则称 u 为 N 之奇异点；N 之奇异点集上 N 之像集称为 N 之奇异值集合；而 Y 中 N 之奇异值集合之补集称为 N 之正则值集合．

定义 9.4.3 设 K 是 Y 中任一紧集，如果 K 之原像集合 $N^{-1}(K)$ 在 X 中也是紧的，则称非线性算子 N 为真算子．

今后我们需要下列Sard定理(属于S.Smale)

定理 9.4.1 设 X 和 Y 是两个实的 Banach 空间．$S\subset X$ 是一个连通集，如果 $N:S\to Y$ 是一个 C^k 类的真的 Fredholm 映照，$k>\max(\mathrm{Index}(N),0)$，那么 N 之正则值集合是 Y 中一个稠密开集．

于是从 Sard 定理立即可以推出

定理 9.4.2 设 X 和 Y 是两个实的 Banach 空间．$S\subset X$ 为一个连通集，$N:S\to Y$ 是一个 C^k 类真的 Fredholm 映照，$k\geq 1$，且 $\mathrm{Index}(N)=0$．那么存在一个在 Y 中稠密之开集 S_1，$\forall f\in S_1$，$N^{-1}(f)$ 是一个有限集合；如果 $\mathrm{Index}(N)=q$，$k\geq q$，那么存在 Y 中之稠密集 S_1，$\forall f\in S_1$，$N^{-1}(f)$ 是空的，或

者是 S 中一个 C^k 类流形，且 $\dim(N^{-1}(f))=q$.

证　取 $S_1=N$ 之正则值集合，由 Sard 定理知 S_1 在 Y 中稠密，$\forall f\in S_1$，由于 N 是真的，故 $N^{-1}(f)$ 是紧的，如果 $\mathrm{Index}(N)=0$，那么 $\forall f\in S_1$，$u\in N^{-1}(f)$，由于

$$\dim\ker(N'(u))=\dim\mathrm{coker}(N'(u))=0$$

所以 $N'(u)$ 是一对一和到上的映照，因而是 $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 的同构．由隐函数定理，u 是 $N(v)=f$ 的弧立解．由于 $N^{-1}(f)$ 是紧的和由孤立点组成的，所以 $N^{-1}(f)$ 是有限的离散点集合．

如果 $\mathrm{Index}(N)=q\leqslant k$，$\forall f\in S_1$ 和每个 $u\in N^{-1}(f)$，$N'(u)$ 是到上的，所以 $\dim\ker(N'(u))=q$，这就推出 $N^{-1}(f)$ 是一个 q 维流型．证毕．

定义 9.4.4　称

$$N(\mathbf{u})\equiv\lambda\mathbf{u}+k(\mathbf{u})\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+A^{-1}B(\mathbf{u},\mathbf{u})\tag{9.4.1}$$

为抽象的N－S算子．

显然，它的一阶导算子是

$$N'(\mathbf{u})\mathbf{w}=\lambda\mathbf{w}+k(\mathbf{w})\mathbf{u}+k(\mathbf{u})\mathbf{w}\tag{9.4.2}$$

带有齐次的 Dirichlet 边值条件的 N－S 方程的弱问题是

$$\forall\mathbf{f}\in\mathbf{V}'\quad 求\mathbf{u}\in\mathbf{V}使得N(\mathbf{u})=A^{-1}\mathbf{f}\tag{9.4.3}$$

而相应的强解问题是

$$\forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}\quad 求\mathbf{u}\in D(A)\quad 使得N(\mathbf{u})=A^{-1}\mathbf{f}\tag{9.4.4}$$

引理 9.4.2　$B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}_{3/2}\times\mathbf{V}_{3/2}\to\mathbf{H}$ 的连续映照，也是 $D(A)\times D(A)\to\mathbf{H}$ 的紧映照．

证　在(9.3.44)中取 $s_3=0$，$s_1=3/2$，$s_2=1/2$，便有

$$\|B(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_o\leqslant c\|\mathbf{u}\|_{3/2}\|\mathbf{v}\|_{3/2}\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}_{3/2},\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}_{3/2}\tag{9.4.5}$$

从而可知 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{V}_{3/2}\times\mathbf{V}_{3/2}\to\mathbf{H}$ 的双线性连续映照．如果

在 (9.3.44) 中取 $s_3=0,\ s_1=2,\ s_2=1$，使有

$$\|B(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_o \leqslant c\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant c\|A\mathbf{u}\|_o\|A\mathbf{v}\|_o \tag{9.4.6}$$

设 $S\subset D(A)$ 为有界集，因而 S 在 $\mathbf{V}_{3/2}=D(A^{3/4})$ 中是列紧的，由 (9.4.5) 可知 $B(S,S)$ 在 H 中列紧．证毕．

引理9.4.3　$K(\cdot)\cdot$ 是$D(A)\times D(A)\rightarrow D(A)$的紧映照.

$\forall\mathbf{u}\in D(A)$, $K(\mathbf{u})\cdot$ 是$D(A)\rightarrow D(A)$的线性连续紧映照.

$\forall\mathbf{v}\in D(A)$, $\mathbf{k}(\cdot)\mathbf{v}$是$D(A)\rightarrow D(A)$线性连续紧映照.

证　由引理 9.4.2 及 A^{-1} 是 $\mathbf{H}\rightarrow D(A)$ 的连续映照立即可得本引理结论 $K(\cdot)\cdot$ 是 $D(A)\times D(A)\rightarrow D(A)$ 的紧映照．$\forall\mathbf{u}\in D(A)$, $K(\mathbf{u})\cdot$ 是 $D(A)\rightarrow D(A)$ 的紧映照，$\forall\mathbf{v}\in D(A)$, $K(\cdot)\mathbf{v}$ 是 $D(A)\rightarrow D(A)$ 的紧映照．证毕．

由引理9.3.5, 引理9.4.2和9.4.3, 立即可得

$N(\cdot)$是$\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$连续映照

$N(\cdot)$是$D(A)\rightarrow D(A)$连续映照

$\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $N'(\mathbf{u})$是$\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$连续线性映照

$\forall\mathbf{u}\in D(A)$, $N'(\mathbf{u})$是$D(A)\rightarrow D(A)$连续映照

进而, 我们有

定理 9.4.3　N－S 算子 N 是 $\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$ 的真的指标为零的 Fredholm 算子，也是 $D(A)\rightarrow D(A)$ 的真的指标为零的 Fredholm 算子．

证　由引理 9.4.3 可知 $\forall\mathbf{u}\in D(A)$, 则 $K(\mathbf{u})\cdot+K(\cdot)\mathbf{u}$ 是 $D(A)\rightarrow D(A)$ 的紧映照，所以 $N'(\mathbf{u})$ 是指标为零的 Fredholm 算子．为了证明 N 是 $D(A)\rightarrow D(A)$ 的真映照，令 $S\subset D(A)$ 的紧子集．由引理 9.4.3 知，$K(N^{-1}(S))(N^{-1}(S))$ 是 $D(A)$ 中的紧子集，因而 $N^{-1}(S)\subset\lambda^{-1}(S-k(N^{-1}(S))(N^{-1}(S))$ 是 $D(A)$ 中的紧集．

由引理 9.3.5, $\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, $K(\mathbf{u})\cdot+K(\cdot)\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$ 的紧映

照，所以 $N'(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ 指标为零的 Fredholm 算子，我们还须证明，N 是 $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ 的真映照，为此令 $S\subset\mathbf{V}$ 中的紧子集，所以也是有界集．由引理 9.3.5 知 $K(N^{-1}(S))(N^{-1}(S))$ 也是 $\mathbf{V}$ 中的紧子集，那么 $N^{-1}(S)\subset\lambda^{-1}(S-K(N^{-1}(S))(N^{-1}(S))$ 是 $\mathbf{V}$ 中的紧子集．证毕

定理 9.4.4 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n\ (n=2,3)$ 为有界集，边界 Γ 是 Lipschitz 连续，那么 $\forall\lambda>0$，存在一个稠密开集 $\omega_\lambda\subset\mathbf{H}$ 使得 $\forall\mathbf{f}\in\omega_\lambda$，$N\mathbf{u}=\mathbf{f}$ 的解集是有限的，并且在数目上是奇数．

另外，在每个 ω_λ 连通子集上，解的数目是一个常数，每个解都是 $\mathbf{f}$ 的 C^∞ 函数．

证 设 $\omega_\lambda\subset\mathbf{V}$ 是 $N_\lambda(\mathbf{u})\equiv\lambda\mathbf{u}+k(\mathbf{u})\mathbf{u}$ 之正则值集合，由定理 9.4.2 和 9.4.3，ω_λ 是 $\mathbf{V}$ 中的稠密子集，并且 $\forall\mathbf{g}\in\omega_\lambda$，$N_\lambda\mathbf{u}=\mathbf{g}$ 的解集合 $N^{-1}(\mathbf{g})\subset\mathbf{V}$ 是有限的离散点．

设 $\omega_o\subset\omega_\lambda$ 是一个连通子集，设 $\mathbf{f}_o$，$\mathbf{f}_1\in\omega_o$，$\mathbf{u}_o\in N^{-1}(\mathbf{f}_o)$，$t\in[0,1]\to\mathbf{f}(t)\in\omega_o$，$\mathbf{f}(o)=\mathbf{f}_o$，$\mathbf{f}(1)=\mathbf{f}_1$．由隐函数定理，存在唯一的连续曲线 $t\to\mathbf{u}(t)$ 使得

$$N(\mathbf{u}(t))=\mathbf{g}(t)\quad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o$$

由于 $\mathbf{f}(t)$ 是 N 的正则值，$\forall t\in[0,1]$，$\mathbf{u}(t)$ 对每个 t 都有意义．因而 $\mathbf{u}(1)\in N^{-1}(\mathbf{f}_1)$．如此，$t\to\mathbf{u}(t)$ 能够从任一点 $\mathbf{u}_k\in N^{-1}(\mathbf{f}_o)$ 出发而构造出来．两条不同的曲线不能到达同一点 $\mathbf{u}_*\in N^{-1}(\mathbf{f}_1)$，也不能相交，因为若不然，则与隐函数定理不相容，因而 $N^{-1}(\mathbf{f}_1)$ 至少和 $N^{-1}(\mathbf{f}_o)$ 具有一样多的点．由对称性，$N^{-1}(\mathbf{f}_o)$ 和 $N^{-1}(\mathbf{f}_1)$ 有一样多的点．

显然，每个解 $\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k(\mathbf{g})$ 是 $\mathbf{g}$ 的 C^∞ 函数 $(\mathbf{g}\in\omega_\lambda)$．

现在，我们来证明，$N^{-1}(g)$ 包含奇数个点，这需要用 Leray－Schauder 度理论[5].

$\forall\lambda>0$, $g\in\omega_\lambda$, N－S 方程 $T_\lambda(\mathbf{u})\equiv\lambda\mathbf{u}+A^{-1}B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{g}$,

即
$$T_\lambda(\mathbf{u})=\lambda\mathbf{u}+K(\mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{g} \tag{9.4.7}$$

这里 $\mathbf{u}$, $\mathbf{g}\in V$，设 $\mathbf{u}_\mu$ 是 $T_\lambda(\mathbf{u}_\mu)=\mu g$ 的解，$0\leqslant\mu\leqslant 1$. 由 (9.3.54) 有估计式 $\|A\mathbf{u}_u\|_o\leqslant R$. 设 B_R 是 $D(A)$ 中半径为 R，球心在原点的球，所以 Leray－Schauder 度 $d(T_\lambda,\mu g,B_R)$ 有意义，当 μg 是 T_λ 的正则值时，μ_f 也是 N 的正则值，$T_\lambda^{-1}(\mu g)$ 是有限的 $.T_\lambda^{-1}(\mu g)=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，并且

$$d(T_\lambda,\mu g,B_k)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Index}(u_k)$$

由唯一性定理，存在 $\mu^*\in[0,1]$，使得 $\forall\mu\in[0,\mu^*]$，$N^{-1}(\mu g)$ 只有唯一解 $\mathbf{u}_\mu$，而 $N'(\mathbf{u}_\mu)$ 是同构的，因而对这些值，$d(T_\lambda,\mu g,B_k)=\pm 1$，由度的同伦不变性，$K$ 必须是奇数，证毕.

C.Foias,R.Temam 证明了，ω_λ 是无界的，对非齐次边值问题 $\mathbf{u}|_\Gamma=\mathbf{g}$ 结论也同样成立.

设 $S(\mathbf{f},\lambda)\subset D(A)$ 为N－S方程的解集，设

$$S(\mathbf{f})=\bigcup_{\lambda>0}S(\mathbf{f},\lambda) \tag{9.4.8}$$

定理 9.4.5 设定理 9.4.4 成立，则存在一个 G_δ— 稠密集 $\omega\subset H$，使得 $\forall\mathbf{f}\in\omega$，由 (9.4.8) 所定义的解集 $S(\mathbf{f})$ 是一个维数为 1 的 C^∞ 流形.

证 取 $X=V\times R$，$Y=V$，$S=\omega_m=V\times(1/m,\infty)\subset V\times R$，$m$ 为整数. 记 $N(\mathbf{u},\lambda)=\lambda\mathbf{u}+K(\mathbf{u})\mathbf{u}$. 显然，$N$ 是 $\omega_m\to V$

的 C^{∞} 映照，且

$$N'(\mathbf{u},\lambda)(\mathbf{v},\mu)=\lambda\mathbf{v}+K(\mathbf{u})\mathbf{v}+K(\mathbf{v})\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$$

$\forall(\mathbf{u},\lambda)\in\omega_m$，$N'(\mathbf{u},\lambda)$是下列两个算子之和

$$(\mathbf{v},\mu)\to\lambda\mathbf{v};\ (\mathbf{v},\mu)\to K(\mathbf{u})\mathbf{v}+K(\mathbf{v})\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$$

第二个是紧算子，第一个算子是一对一的，且它的核空间维数等 1. 因此 $N'(\mathbf{u},\lambda)$ 是指标为 1 的 Fredholm 算子，N 是指标为 1 的非线性 Fredholm 算子.

同样可以证明，N 也是 $\mathbf{V}\times(\lambda_o,\infty)(\forall\lambda_o>0,\lambda_o=1/m)$ 上的真算子，因此由定理 9.4.2 可知存在一个稠密开集 $\omega_m\subset\mathbf{H}$，$\forall\mathbf{f}\in\omega_m$，$N_m^{-1}(\mathbf{f})$ 是一个一维流形，这里 N_m 是 N 在 ω_m 上的限制. 令 $\omega=\bigcap_{m\geq1}\omega_m$，它是 V 中 G_δ— 稠密集，因而 $\forall\mathbf{f}\in\omega$，$S(\mathbf{f})=\bigcup_{m\geq1}N_m^{-1}(\mathbf{f})$ 是一个一维流形. 证毕.

显然，$S(\mathbf{f})$ 是无限的，包含无限个分支，由于 $S(\mathbf{f})$ 是一维流形，它只可能是由不相同的曲线组成的.

分歧问题的一个典型例子，是二次流问题. 设体积力密度 $\mathbf{f}=\sigma\mathbf{f}_o$ 线性地依赖于参数 σ，那么定常的 N－S 方程 Dirichlet 边值问题的解可以表示为 $\mathbf{u}(\sigma)=\sigma\mathbf{u}_o(\sigma)$，$p=p(\sigma)$. 我们力图求一个另外的解

$$\mathbf{u}=\sigma\mathbf{w}+\mathbf{u}(\sigma),\ p=\sigma p+p(\sigma)\quad\forall\sigma\in\mathbf{R}\tag{9.4.9}$$

令$\mu=\sigma/\lambda$，则$(\mathbf{w},p)$满足

$$\begin{cases}\Delta\mathbf{w}=\mu((\mathbf{w}\,\mathrm{grad})\mathbf{w}+(\mathbf{u}_o\,\mathrm{grad})\mathbf{w}+(\mathbf{w}\,\mathrm{grad})\mathbf{u}_o)+\mathrm{grad}\,p & (9.4.10)\\ \mathrm{div}\mathbf{w}=0 & (9.4.11)\\ \mathbf{w}|_\Gamma=0 & (9.4.12)\end{cases}$$

如果式 (9.4.10)－(9.4.12) 存在非平凡解，那么式 (9.4.9) 称为从 $(u(\sigma),\ p(\sigma))$ 分叉出来的二次流.

对应于(9.4.10)－(9.4.12)的变分形式是

$$\begin{cases} \text{求}\mathbf{w}\in\mathbf{V}\text{使得} \\ (\text{grad}\mathbf{w},\text{grad}\mathbf{v}) + \mu(a_1(\mathbf{w};\ \mathbf{w},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_o;\ \mathbf{w},\mathbf{v}) \\ + a_1(\mathbf{w};\ \mathbf{u}_o,\mathbf{v})) = 0 \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V} \end{cases} \tag{9.4.13}$$

它的算子形式

求$\mathbf{w}\in\mathbf{V}$，使得

$$\mathbf{w} + \mu(K(\mathbf{w})\mathbf{w} + K(\mathbf{w})\mathbf{u}_o + K(\mathbf{u}_o)\mathbf{w}) = 0 \tag{9.4.14}$$

令
$$\varphi(\mathbf{w},\mu) \equiv \mathbf{w} + \mu K(\mathbf{w})\mathbf{w} + \mu K(\mathbf{u}_o)\mathbf{w} + \mu K(\mathbf{w})\mathbf{u}_o \tag{9.4.15}$$

为了研究式(9.4.14)的非平凡解问题，我们需要下列定理：

定理9.4.6 设算子$f(\mathbf{u},\lambda) \equiv (I-\lambda L)\mathbf{u} + T(\mathbf{u},\lambda)$满足

(1) L是一个线性有界算子

(2) $(I-\lambda_o L)$是指标为零的Fredholm算子

(3) $\dim\ \ker(I-\lambda_o L)$是奇数

(4) $\ker(I-\lambda_o L)\bigcap \text{Range}(I-\lambda_o L) = 0$

(5) $T(\mathbf{u},\lambda)$ 是 C^1 类映照，$T(0,\lambda) = T'_u(0,\lambda) = 0$.

那么$(0,\lambda_o)$是方程$f(\mathbf{u},\lambda)=0$的分叉点.

所谓$(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$是方程$f(\mathbf{u},\lambda)=0$的分叉点，如果满足

(1) $(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$是在一个通过$(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$的解曲线$(\mathbf{u}_o(\varepsilon),\lambda_o(\varepsilon))$上；

(2) $\mathbf{X}\times\mathbf{R}$ 中任意一个 $(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$ 邻域内，有一个不同于$(\mathbf{u}_o(\varepsilon),\lambda_o(\varepsilon))$的$f(\mathbf{u},\lambda)=0$的解.

在$(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$是分叉点的情况，方程$f(\mathbf{u},\lambda)=0$的解通常由通过$(\mathbf{u}_o,\lambda_o)$不同的解曲线组成的，这些解曲线称为解分支.

我们已知道，$I + \mu(K(\mathbf{u}_o)\cdot + K(\cdot)\mathbf{u}_o)$是指标为零的Fredholm算子. $T(\mathbf{u},\mu) = \mu K(\mathbf{u})\mathbf{u}$，从而$T(0,\mu)=0$，$T'_w(\mathbf{w},\mu) = \mu K(\mathbf{w})\cdot + \mu K(\cdot)\mathbf{w}$，$T'_w(0,\mu)=0$，所以如果存在$\mu_o$满足定理9.4.6中的(3)和(4)，则$(0,\mu_o)$就是$\varphi(\mathbf{w},\mu)=0$的交叉点.

因此，为了证明 N－S 方程有一个从 $(\mathbf{u}(\sigma),p(\sigma))$ 分离出来的二次流，只要找方程 (9.4.15) 的分叉点就可以，从而我们必须确定 $\varphi'(0,\mu)\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mu(\mathbf{K}(\mathbf{u}_o)\mathbf{w}+\mathbf{K}(\mathbf{w})\mathbf{u}_o)$ 的特征值．而特征值的性质依赖于 Ω 和 $\mathbf{u}_o$，自然也是依赖于 $\mathbf{f}$ 和边界条件 $\mathbf{g}$ 等．

§9.5 迭代解

我们在第五章已讨论了关于线性、非线性方程的各种梯度算法和它的收敛性问题．这里我们仅讨论算法．

Peaceman－Rachford交替方向迭代

$(\mathbf{u}^o,p^o)$为初值

$(\mathbf{u}^m,p^m)$已知，那么

$$-\lambda\Delta\mathbf{u}^{m+1/2}+r^m\mathbf{u}^{m+1/2}-\mathrm{grad}\,p^{m+1/2}=\mathbf{f}-(\mathbf{u}^m\mathrm{grad})\mathbf{u}^m+r^m\mathbf{u}^m \quad 在\Omega内 \tag{9.5.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}^{m+1/2}=0 \quad 在\Omega内 \tag{9.5.2}$$

$$\mathbf{u}^{m+1/2}\big|_\Gamma=0 \tag{9.5.3}$$

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{u}^{m+1}+(\mathbf{u}^{m+1}\mathrm{grad})\mathbf{u}^{m+1}+r^m\mathbf{u}^{m+1} \\ \qquad =\mathbf{f}-\mathrm{grad}\,p^{m+1/2}+r^m\mathbf{u}^{m+1/2} \quad 在\Omega内 & (9.5.4)\\ \mathbf{u}^{m+1}\big|_\Gamma=0 & (9.5.5)\end{cases}$$

这里 r^m 是待选参数．显然，式 (9.5.1)－(9.5.3) 是广义 Stokes 问题．可用 §2.1 中所讨论的方法求解，(9.5.4)－(9.5.5) 是一个如下的非线性问题：$c>0$ 为常数．

$$\begin{cases}-\lambda\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\mathrm{grad})\mathbf{u}+c\mathbf{u}=\mathbf{f} \quad 在\Omega内 & (9.5.6)\\ \mathbf{u}\big|_\Gamma=0 & (9.5.7)\end{cases}$$

对应的弱形式是：求$\mathbf{u}\in\mathbf{X}_o$使得

$$a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})+(c\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in \mathbf{X}_o \tag{9.5.8}$$

若令 $(A_o\mathbf{u},\mathbf{v})=a_o(\mathbf{u},\mathbf{v})+(c\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}\in \mathbf{X}_o$

则对应的算子方程也可以表示

$$A_o\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f} \tag{9.5.9}$$

其中A_o是对称正定的椭圆算子

$$(A_o\mathbf{u},\mathbf{u})\geqslant \gamma\|\mathbf{u}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{u}\in \mathbf{X}_o,\ \gamma>0 \tag{9.5.10}$$

这里$\gamma>0$是常数，记$N(\mathbf{u})\equiv A_o\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f}$

作泛函

$$J(\mathbf{v})=\frac{1}{2}\|N(\mathbf{v})\|_*^2 \tag{9.5.11}$$

这里$\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$为如下定义的对偶范数

$$\|\mathbf{f}\|_*^2=\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle \quad \forall \mathbf{f}\in \mathbf{X}_o' \tag{9.5.12}$$

引理 9.5.1 映射 $\mathbf{f}\to\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle^{1/2}$ 是 $\mathbf{X}_o'$ 上的范数，它等价于 $\mathbf{X}_o$ 之对偶范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{X}'}$

证 由(9.5.10)有

$$\gamma\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1^2\leqslant\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle \tag{9.5.13}$$

然而，由A_o性质知，存在常数$k>0$使得

$$k\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}\leqslant\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1 \tag{9.5.14}$$

于是由(9.5.13), (9.5.14)得

$$k\gamma\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}\leqslant\gamma\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1\leqslant\frac{\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle}{\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1}\leqslant\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o}\frac{\langle\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle}{\|\mathbf{v}\|_1}=\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}$$

或 $$k\gamma\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1\leqslant\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle\leqslant\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}\|A_o^{-1}\mathbf{f}\|_1$$

$$k^2\gamma\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}^2\leqslant\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle\leqslant\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}'}\gamma^{-1/2}\langle A_o^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle^{1/2}$$

最后得

$$k\gamma^{1/2}\|\mathbf{f}\|_{X'} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{*} \leqslant \gamma^{-1/2}\|\mathbf{f}\|_{X'} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}_o' \tag{9.5.15}$$

证毕.

定理 9.5.1 设 u 是问题 (9.5.6), (9.5.7) 的非奇异解，即 $N'(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{X}_o \to \mathbf{X}_o'$ 的同构，那么泛函

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} < A_o^{-1} N(\mathbf{v}),\ N(\mathbf{v}) > \tag{9.5.16}$$

在u的邻域内是严格凸的.

证 由于 A_o^{-1} 的对称性，泛函 J 的一、二阶导数是

$$\begin{aligned}\langle DJ(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle &= \langle A_o^{-1}(DN(\mathbf{v})\mathbf{w}),\ N(\mathbf{v})\rangle \\ &= \langle A_o^{-1}N(\mathbf{v}),\ DN(\mathbf{v})\mathbf{w}\rangle \end{aligned}\tag{9.5.17}$$

$$\begin{aligned}\langle D^2 J(\mathbf{v})\mathbf{w},\mathbf{z}\rangle &= \langle A_o^{-1}(DN(\mathbf{v})\mathbf{z}),\ DN(\mathbf{v})\mathbf{w}\rangle \\ &\quad + \langle A_o^{-1}N(\mathbf{v}),\ D^2N(\mathbf{v})(\mathbf{w},\mathbf{z})\rangle \end{aligned}\tag{9.5.18}$$

由于u是非奇异解, 那么

$$N(\mathbf{u}) = 0,\ DN(\mathbf{u})\text{是}\mathbf{X}_o \to \mathbf{X}_o'\text{的同构} \tag{9.5.19}$$

因而式(9.5.18)给出

$$\langle D^2 J(\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \langle A_o^{-1}(DN(\mathbf{u})\mathbf{w}),\ DN(\mathbf{u})\mathbf{w}\rangle \tag{9.5.20}$$

由式(9.5.12), (9.5.15)和(9.5.19)得

$$\begin{aligned}\langle D^2 J(\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle &= \|DN(\mathbf{u})\mathbf{w}\|_*^2 \geqslant \gamma k^2 \|DN(\mathbf{u})\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}_o'}^2 \\ &\geqslant \delta\|\mathbf{w}\|_1^2,\ \delta > 0\end{aligned}$$

从而 $$\langle D^2 J(\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle \geqslant \delta\|\mathbf{w}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{w}\in\mathbf{X}_o \tag{9.5.21}$$

$D^2J(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{X}_o$ 是连续的，因而存在 $\rho > 0$, $\forall \mathbf{v}\in S(\mathbf{u},\rho) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_o,\ \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_1 \leqslant \rho\}$ 成立 $\|D^2J(\mathbf{u}) - D^2J(\mathbf{v})\| < \delta/2$

所以 $$\langle D^2 J(\mathbf{v})\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle \geqslant \|\mathbf{w}\|_1^2\delta/2 \quad \forall \mathbf{v}\in S(\mathbf{u},\rho),\ \mathbf{w}\in\mathbf{X}_o \tag{9.5.22}$$

这就推出了在$S(u,\rho)$上严格凸.证毕.

N－S方程$N(\mathbf{u})=0$等价于极小化问题

$$\inf_{\mathbf{v}\in S(\mathbf{u},\rho)} J(\mathbf{v})=\inf_{\mathbf{v}\in S(\mathbf{u},\rho)}\frac{1}{2}<A_o^{-1}N(\mathbf{v}),N(\mathbf{v})> \tag{9.5.23}$$

求解(9.5.23)可以用共轭梯度法.$D^2B(\mathbf{u},\mathbf{u})$有界，所以$N$，$DN$，$D^2N$是有界.设$\mathbf{u}$是N－S方程一个非奇异解，即$DN(\mathbf{u})$是$X_o\to X_o'$的同构，同时注意$D^2N(\mathbf{u})$的连续性，定理5.3.2条件都满足.取初值$\mathbf{u}^o\in S(\mathbf{u},\rho)$和计算$J^o=J(\mathbf{u}^o)$，记

$$D=\{\mathbf{v}\in X_o;J(\mathbf{v})\leqslant J(\mathbf{u}_o)\}\cap S(\mathbf{u},\rho)$$

取X_o之内积为　$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{X_o}=<A_o\mathbf{u},\mathbf{v}>$

定义梯度

$$\begin{aligned}(\mathbf{g}(\mathbf{v}),\mathbf{w})_{X_o}&=<A_o\mathbf{g}(\mathbf{v}),\mathbf{w}>=\langle DJ(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle\\&=\langle A_o^{-1}N(\mathbf{v}),DN(\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\rangle\\&=\langle(DN(\mathbf{v}))'A_o^{-1}N(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle\end{aligned}$$

其中$(DN(\mathbf{v}))'$是$DN(\mathbf{v})$的转置.从而

$$\mathbf{g}(\mathbf{v})=A_o^{-1}(DN(\mathbf{v}))'A_o^{-1}N(\mathbf{v}) \tag{9.5.24}$$

如此，简单梯度法步骤如下

(1) 计算$\mathbf{z}^m=A_o^{-1}N(\mathbf{u}^m)$，$\mathbf{g}^m=A_o^{-1}(DN(\mathbf{u}^m))'\mathbf{z}^m$

(2) 求一维极小值问题

$$\rho^*=\operatorname*{Argmin}_{\rho} J(\mathbf{u}^m-\rho\mathbf{g}^m)$$

$$J(\mathbf{u}^m-\rho\mathbf{g}^m)=\frac{1}{2}<A_o^{-1}N(\mathbf{u}^m-\rho\mathbf{g}^m),\ N(\mathbf{u}^m-\rho\mathbf{g}^m)>$$

在每个迭代过程中，要解二个线性问题和一个极小值问题：

$$\langle A_o\mathbf{z}^m,\mathbf{v}\rangle=\langle N(\mathbf{u}^m),\mathbf{v}\rangle\quad\forall\mathbf{v}\in X_o$$

$$\langle A_o \mathbf{g}^m, \mathbf{v}\rangle = \langle (DN(\mathbf{u}^m))' \mathbf{z}^m, \ \mathbf{v}\rangle$$
$$= \langle \mathbf{z}^m, DN(\mathbf{u}^m)\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in \mathbf{X}_o$$

注意，$\rho \to J(\mathbf{u}^m - \rho \mathbf{g}^m)$ 是一个 4 次多项式，由 Taylor 展式得

$$J(\mathbf{u}^m - \rho\mathbf{g}^m) = J(\mathbf{u}^m) - \rho DJ(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m + \frac{1}{2}\rho^2 D^2 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m)$$
$$- \frac{1}{6}\rho^3 D^3 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m)$$
$$+ \frac{1}{24}\rho^4 D^4 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m, \mathbf{g}^m) \tag{9.5.25}$$

它们的导数分别可以表示为

$$DJ(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m = < A_o^{-1} N(\mathbf{u}^m), \ DN(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m > \tag{9.5.26}$$

$$D^2 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2 = < A_o^{-1}(DN(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m), DN(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m >$$
$$+ < A_o^{-1} N(\mathbf{u}^m), D^2 N(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2 > \tag{9.5.27}$$

$$D^3 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^3 = 3 < A_o^{-1} DN(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m, \ D^2 N(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2 > \tag{9.5.28}$$

$$D^4 J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^4 = 3\langle A_o^{-1} D^2 N(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2, \ D^2 N(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2\rangle \tag{9.5.29}$$

于是简单梯度算法可以表述如下:

(1) 设 $\mathbf{u}^m \in \mathbf{X}_o$ 给出，计算 $\mathbf{z}^m \in \mathbf{X}_o$

$$\begin{cases} -\lambda\Delta \mathbf{z}^m + c\mathbf{z}^m = -\lambda\Delta\mathbf{u}^m + c\mathbf{u}^m + (\mathbf{u}^m \operatorname{grad})\mathbf{u}^m - \mathbf{f} \\ \mathbf{z}^m\big|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

(2) 求 $\mathbf{g}^m \in \mathbf{X}_o$ 使得

$$a_o(\mathbf{g}^m, \mathbf{v}) + c(\mathbf{g}^m, \mathbf{v}) = a_o(\mathbf{z}^m, \mathbf{v}) + c(\mathbf{z}^m, \mathbf{v})$$
$$+ a_1(\mathbf{u}^m; \mathbf{v}, \mathbf{z}^m) + a_1(\mathbf{v}; \mathbf{u}^m, \mathbf{z}^m), \ \forall \mathbf{v}\in \mathbf{X}_o$$

(3) 计算 $J(\mathbf{u}^m)=\frac{1}{2}(\lambda|\mathbf{z}^m|_1^2+c\|\mathbf{z}^m\|_o^2)$

$$DJ(\mathbf{u}^m)\mathbf{g}^m=\frac{1}{2}(\lambda|\mathbf{g}^m|_1^2+c\|\mathbf{g}^m\|_o^2)$$

(4) 求$\mathbf{v}^m\in\mathbf{X}_o$使得

$$-\lambda\Delta\mathbf{v}^m+c\mathbf{v}^m=-\lambda\Delta\mathbf{g}^m+c\mathbf{g}^m+(\mathbf{u}^m\mathrm{grad})\mathbf{g}^m+(\mathbf{g}^m\mathrm{grad})\mathbf{u}^m$$

(5) 计算

$$\mathbf{h}^m=D^2N(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2=2(\mathbf{g}^m\mathrm{grad})\mathbf{g}^m$$

$$D^2J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^2=\lambda|\mathbf{v}^m|_1^2+c\|\mathbf{v}^m\|_o^2+(\mathbf{z}^m,\mathbf{h}^m)$$

$$D^3J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^3=3(\mathbf{h}^m,\mathbf{v}^m)$$

(6)求$\omega^m\in\mathbf{X}_o$使得

$$-\lambda\Delta\mathbf{w}^n+c\mathbf{w}^m=\mathbf{h}^m$$

(7)计算

$$D^4J(\mathbf{u}^m)(\mathbf{g}^m)^4=\lambda|\mathbf{w}^m|_1^2+c\|\mathbf{w}^m\|_o^2$$

(8)求正根

$$\frac{d}{\partial\rho}J(\mathbf{u}^m-\rho^m\mathbf{g}^m)=0$$

$$\mathbf{u}^{m+1}=\mathbf{u}^m-\rho^m\mathbf{g}^m$$

每迭代一次，要解4个Dirichlet问题.

共轭梯度法和上面计算极其相似，留给读者作为练习.

现在来考察 Newton 迭代. 设 $\mathbf{u}^o$ 为初始点，$\mathbf{u}^m\in\mathbf{X}_o$ 已知，

则
$$D_uN(\mathbf{u}^m,\lambda)(\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m)=-N(\mathbf{u}^m,\lambda) \tag{9.5.30}$$

因每迭代步都要求解线性问题. 改进的 Newton 方法是

$$D_uN(\mathbf{u}^o,\lambda)(\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m)=-N(\mathbf{u}^m,\lambda) \tag{9.5.31}$$

则有如下收敛性定理

定理 9.5.2 设 $D_u N(\mathbf{v},\lambda)$ 在球 $S(\mathbf{u},\alpha)$ 内关于 $\mathbf{v}$ 是 Lipschitz 连续，即存在常数 $k>0$ 使得

$$\|D_u N(\mathbf{v},\lambda)-D_u N(\mathbf{v}^*,\lambda)\|_{\mathcal{L}(x_0,x_0^1)}\leqslant k\|\mathbf{v}-\mathbf{v}^*\|_1$$

$$\forall \mathbf{v},\mathbf{v}^*\in S(\mathbf{u},\alpha) \qquad (9.5.32)$$

那么存在 $\alpha'>0$ 使得 $0<\alpha'\leqslant\alpha$，对任一 $\mathbf{u}^0\in S(\mathbf{u},\alpha)$,Newton 算法 (9.5.30) 确定一个序列 $\{\mathbf{u}^m\}\subset S(\mathbf{u},\alpha')$，它以二次速率收敛于 $N(\mathbf{u},\lambda)=0$ 的解 $\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}\|_1\leqslant c\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1^2 \quad 0<c<1 \qquad (9.5.33)$$

同样存在 $\alpha''>0$, $0\leqslant\alpha''\leqslant\alpha$，对任何一个初值 $\mathbf{u}^0\in S(\mathbf{u},\alpha'')$，算法 (9.5.31) 确定一个序列 $\{u^m\}\in S(\mathbf{u},\alpha'')$，它收敛于 $\mathbf{u}$

$$\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}\|_1\leqslant c\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1 \quad 0<c<1 \qquad (9.5.34)$$

证 首先设$D_u N(\mathbf{u},\lambda)^{-1}$有界

$$\|D_u N(\mathbf{u},\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(x_0,x_0')}\leqslant\gamma \quad \forall \mathbf{v}\in S(\mathbf{u},\alpha') \qquad (9.5.35)$$

设 $\mathbf{u}_0\in S(\mathbf{u},\alpha')$，如果 $\mathbf{u}^m\in S(\mathbf{u},\alpha')$，那么对于 $\mathbf{u}^m$，式 (9.5.35) 成立. 故式 (9.5.30) 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}&=\mathbf{u}^m-\mathbf{u}+D_u N(\mathbf{u}^m,\lambda)^{-1}(N(\mathbf{u},\lambda)-N(u^m,\lambda))\\&=D_u N(\mathbf{u}^m,\lambda)^{-1}[N(\mathbf{u},\lambda)-N(\mathbf{u}^m,\lambda)\\&\quad-D_u N(\mathbf{u}^m,\lambda)(\mathbf{u}-u^m)]\\&=D_u N(\mathbf{u}^m,\lambda)^{-1}\int_0^1[D_u N(\mathbf{u}^m+t(\mathbf{u}-\mathbf{u}^m),\lambda)\\&\quad-D_u N(\mathbf{u}^m,\lambda)](\mathbf{u}-\mathbf{u}^m)dt\end{aligned}$$

由式(9.5.32)和(9.5.35)有

$$\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}\|_1 \leqslant \gamma k\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1^2$$

选择α'使得$\alpha'\gamma k<1/2$, 则有

$$\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}\|_1 \leqslant 1/2\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1^2$$

所以 $\mathbf{u}^{m+1}\in S(\mathbf{u},\alpha')$. 上述不等式表明式 (9.5.33) 成立 .

对于算法(9.5.31), 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u} &= D_uN(\mathbf{u}^o,\lambda)^{-1}\int_o^1 [D_uN(\mathbf{u}^m+t(\mathbf{u}-\mathbf{u}^m),\lambda) \\ &\quad - D_uN(\mathbf{u}^o,\lambda)]\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{u}^m)dt \\ &\leqslant \gamma k(\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^o\|_1+\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^o\|_1)\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1 \\ &\leqslant 3\alpha''\gamma k\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}\|_1\end{aligned}$$

若 $\mathbf{u}^m\in S(\mathbf{u},\alpha'')$, 当 $\alpha''<\frac{1}{3}\gamma^{-1}k^{-1}$ 时, 则有 $\mathbf{u}^{m+1}\in S(\mathbf{u},\alpha'')$. 同时, $\mathbf{u}^m$ 以一次速率收敛于 $\mathbf{u}$.

余下, 我们还须证明, 如果 $D_uN(\mathbf{u},\lambda)$ 是 Lipschitz 连续, 即如式 (9.5.32) 成立 . 则必有式 (9.5.35), 这个证明可以在 Girault－Raviart[13] 的书中找到 (第四章第三节). 证毕 .

若 $\mathbf{u}$ 是 N－S 方程的非奇异解, 则 $D_uN(\mathbf{u},\lambda)^{-1}$ 存在, 由于 $D_uN(\mathbf{u},\lambda)$ 连续性, 则可以找到一个球 $S(\mathbf{u},\alpha')$ 使得式 (9.5.35) 成立 .

Newton迭代格式也可以表示为

$(\mathbf{u}^{m+1},p^{m+1})\in\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}$使得

$$\begin{aligned}&-\lambda\Delta\mathbf{u}^{m+1}+(\mathbf{u}^m\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}^{m+1}+(\mathbf{u}^{m+1}\mathrm{grad})\mathbf{u}^m+\mathrm{grad}p^{m+1} \\ &\qquad = (\mathbf{u}^m\mathrm{grad})\mathbf{u}^m+\mathbf{f} \\ &\mathrm{div}\mathbf{u}^{m+1}=0 \end{aligned} \tag{9.5.36}$$

Newton 法的局限性在于必须知道好的初值．如果我们找一个非奇异的分支解，即解单值地依赖于参数，形成一条解曲线，在这条曲线上的每个点，都是方程的弧立解，N－S 方程的解依赖于 λ:$\mathbf{u}(\lambda)$. 在一个非奇异解分支上，若 $\Delta\lambda$ 表示参数增量，那么 $\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$ 是 $\mathbf{u}(\lambda)$ 的邻域内点的点．容易验证，在非奇异解分支上，$\mathbf{u}$ 是 λ 的解析函数．那么以 $\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$ 作为求 $\mathbf{u}(\lambda)$ 的 Newton 法初值，则可保证迭代成功．

抽象的N－S方程是

$$F(\lambda,\mathbf{u}) \equiv \lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0$$

对λ求全导数有$D_\lambda F(\lambda,\mathbf{u}(\lambda)) + D_u F(\lambda,\mathbf{u}(\lambda))\dfrac{du}{d\lambda} = 0 \quad \forall\lambda\in\Lambda$

这里Λ是非奇异解分支的参数定义域.由此

$$\frac{du}{d\lambda} = -\varphi(\lambda)$$

其中

$$\varphi(\lambda) = [D_u F(\lambda,\mathbf{u}(\lambda))]^{-1} D_\lambda F(\lambda,\mathbf{u}(\lambda))$$

这是一个抽象的常微分方程．我们用一步 Euler 方法来确定 Newton 初值．取 $\mathbf{u}^o(\lambda)$ 为

$$\mathbf{u}^o(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda) - \varphi(\lambda-\Delta\lambda)\Delta\lambda$$

等价地, $\mathbf{u}^o(\lambda)$是下列方程的解

$$\begin{aligned} &D_u F(\lambda-\Delta\lambda,\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda))(\mathbf{u}^o(\lambda) - \mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)) \\ &= -D_\lambda F(\lambda-\Delta\lambda,\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda))\Delta\lambda \end{aligned}$$

由于

$$\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda) - \int_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda} \varphi(\mu)d\mu$$

则初值的误差为

$$\mathbf{u}(\lambda) - \mathbf{u}^o(\lambda) = -\left[\int_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda} \varphi(\mu)d\mu - \varphi(\lambda-\Delta\lambda)\Delta\lambda\right]$$

$$= -\int_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda} \varphi'(\theta_\mu)(\mu-\lambda+\Delta\lambda)d\mu$$

因而

$$\|\mathbf{u}(\lambda)-\mathbf{u}^o(\lambda)\|_X \leqslant \frac{1}{2}(\Delta\lambda)^2 \max_{\theta\in(\lambda-\Delta\lambda,\lambda)} \|\varphi'(\theta)\|_X$$

如此，$\|\mathbf{u}(\lambda)-\mathbf{u}^o(\lambda)\|_X$ 是 $O((\Delta\lambda)^2)$，如果 $\Delta\lambda$ 充分小，则 $\mathbf{u}^o(\lambda)$ 就是一个很好的 Newton 迭代初值.

设

$$\delta\mathbf{u}(\lambda)=\mathbf{u}^o(\lambda)-\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$$

又因

$$D_\lambda F(\lambda-\Delta\lambda,\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda))=A\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$$

$$D_u F(\lambda-\Delta\lambda;\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda))=(\lambda-\Delta\lambda)A+B(\cdot,\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)) + B(\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda),\cdot)$$

所以$\delta\mathbf{u}(\lambda)$应满足

$$(\lambda-\Delta\lambda)A\,\delta\mathbf{u}(\lambda)+B(\delta\mathbf{u}(\lambda),\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda))+B(u(\lambda-\Delta\lambda)),\ \delta\mu(\lambda)) = -A\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)\cdot\Delta\lambda$$

由于 $\delta\mathbf{u}(\lambda)=\{\delta\mathbf{u}(\lambda),\delta p(\lambda)\}$，所以 $\delta\mathbf{u}(\lambda)$ 的混合变分形式是

求$(\delta\mathbf{u}(\lambda),\delta p(\lambda))\in\mathbf{X}_o\times\mathbf{M}$使得

$$\begin{cases}(\lambda-\Delta\lambda)a_o(\delta\mathbf{u}(\lambda),\mathbf{v})+a_1(\delta\mathbf{u}(\lambda);\ \mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda),\mathbf{v}) \\ \qquad +a_1(\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda);\ \delta\mathbf{u}(\lambda),\mathbf{v})+(\delta p(\lambda),\mathrm{div}\mathbf{v}) \\ \qquad =a_o(\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda),\mathbf{v})\Delta\lambda & \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathrm{div}\delta\mathbf{u}(\lambda)=0 & \text{在}\Omega\text{内} \\ \delta\mathbf{u}(\lambda)|_\Gamma=0 \end{cases}$$

如果 $\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$ 已知，那么 $\mathbf{u}^o(\lambda)=\delta\mathbf{u}(\lambda)+\mathbf{u}(\lambda-\Delta\lambda)$ 就是所要求的 Newton 迭代初始点.

§9.6 非定常的Navier－Stokes方程

前面已经提到，设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集，$n=2,3$，$\Gamma = \partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的，则不可压缩粘性流动的 Navier－Stokes 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \lambda\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u} - \mathbf{grad}\,p = \mathbf{f} & \forall(\mathbf{x},\mathbf{t})\in\Omega\times\mathbf{R}_+ \\ \mathbf{divu} = 0 & \\ \mathbf{U} = 0 & \forall(x,t)\in\Gamma\times\mathbf{R}_+ \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_o & \forall x\in\Omega \end{cases} \tag{9.6.1}$$

其中f为体积力密度，$\mathbf{u}_o$为初值函数.

(9.6.1)的变分问题是：$\forall \mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{X}_o')$，$\mathbf{u}_o\in\mathbf{H}$：

$$(P)\begin{cases} \text{求}\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})\text{，使得在}D'(0,T)\text{中有} \\ (\dfrac{d\mathbf{u}}{dt},\mathbf{v}) + a_o(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}(t);\ \mathbf{u}(t),\mathbf{v}) \\ = <\mathbf{f}(t),\mathbf{v}> \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V} \\ \mathbf{u}(o) = \mathbf{u}_o \end{cases} \tag{9.6.2}$$

称式 (9.6.2) 为问题 (P)，而求 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cup\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$，$p\in D'(0,T;\Omega)$，使得在 $D(0,T)$ 意义下满足式 (9.6.1)，这样的问题称为 (Q)，为了证明问题 (P) 和问题 (Q) 的等价性，我们需要下列引理

引理9.6.1 $\forall\varphi\in\mathbf{H}_o^1(\Omega)$，有

$$\|\varphi\|_{o,4,\Omega} = \begin{cases} 2^{1/4}|\varphi|_{1,\Omega}^{1/2}\|\varphi\|_{o,\Omega}^{1/2} & n=2 \\ \sqrt{2}|\varphi|_{1,\Omega}^{3/4}\|\varphi\|_{o,\Omega}^{1/4} & n=3 \end{cases} \tag{9.6.3}$$

证 我们只须证明$\forall\varphi\in D(\Omega)$，式 (9.6.3) 成立即可．设 n

$=2$，记$\tilde{\varphi}$为φ的延拓，使得$\tilde{\varphi}$在Ω以外为零，于是有

$$\tilde{\varphi}^2(x_1,x_2)=2\int_{-\infty}^{x_1}\tilde{\varphi}_1(\xi_1,x_2)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_1}(\xi_1,x_2)d\xi_1\leqslant\varphi_1(x_2)$$

这里

$$\varphi_1(x_2)=2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\varphi}(\xi_1,x_2)\right|\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_1}(\xi_1,x_2)\right|d\xi_1$$

类似地

$$\tilde{\varphi}^2(x_1,x_2)\leqslant\varphi_2(x_1)$$

$$\varphi_2(x_1)=2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\varphi}(x_1,\xi_2)\right|\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_2}(x_1,\xi_2)\right|d\xi_2$$

因而

$$\int_{R^2}\tilde{\varphi}^4(x)dx\leqslant\int_R\varphi_1(x_2)dx_2\int_R\varphi_2(x_1)dx_1$$

故 $$\|\varphi\|_{o,4,\Omega}^4\leqslant4\|\varphi\|_{o,\Omega}^2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|_{o,\Omega}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\|_{o,\Omega}\leqslant2\|\varphi\|_{o,\Omega}^2|\varphi|_{1,\Omega}^2$$

由此得$n=2$时的情况，对于$n=3$，利用以上结果有

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{o,4,\Omega}^4&=\iiint_{R^3}\tilde{\varphi}^4dx_1dx_2dx_3\\&\leqslant2\int_{-\infty}^{\infty}dx_3[\iint_{R^2}\tilde{\varphi}^2dx_1dx_2\iint_{R^2}(\tilde{\varphi}_{x_1}^2+\tilde{\varphi}_{x_2}^2)dx_1dx_2]\\&\leqslant2(\max_{x_3}\iint_{R^2}\tilde{\varphi}^2dx_1dx_2)|\varphi|_{1,\Omega}^2\\&\leqslant4\iiint_{R^3}|\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_{x_3}|dx_1dx_2dx_3|\varphi|_{1,\Omega}^2\leqslant4\|\varphi\|_{o,\Omega}|\varphi|_{1,\Omega}^3\end{aligned}$$

于是引理得证.

引理 9.6.2 $\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$，那么由三线

性 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 所定义的双线性算子 $B(\cdot,\cdot)$ 满足

$$B(\mathbf{w},\mathbf{u})\in\begin{cases}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}') & n=2\\ \mathbf{L}^{4/3}(0,T;\ \mathbf{V}') & n=3\end{cases} \tag{9.6.4}$$

而且有$n=2$时，

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}')}\leqslant c\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})}\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})}$$
$$\cdot\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})}\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})} \tag{9.6.5}$$

$n=3$时，

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^{4/3}(0,T;\ \mathbf{V}')}\leqslant c\|\mathbf{w}\|^{1/4}_{\mathbf{L}^\infty_{\circ}(0,T;\ \mathbf{H})}\|u\|^{1/4}_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})}$$
$$\cdot\|\mathbf{w}\|^{3/4}_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})}\|\mathbf{u}\|^{3/4}_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})} \tag{9.6.6}$$

证　利用 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 关于后两个变元的反对称性及 Hoelder 不等式，有

$$|a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})|\leqslant c\|\mathbf{w}\|_{o,4,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{o,4,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}$$

所以在$(0,T]$上，有

$$\|B(\mathbf{w};\mathbf{u})\|_{V'}\leqslant c_1\|\mathbf{w}\|_{o,4,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{o,4,\Omega}(a.e.) \tag{9.6.7}$$

首先，当$n=2$时，由引理9.6.1，有

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{V}'}\leqslant 2c|\mathbf{w}|_{1,\Omega}|\mathbf{u}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}$$

所以

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\ V')}\leqslant 2c\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0,T;\ \mathbf{H})}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\ \mathbf{H})}$$
$$\cdot\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})}$$

由此可得(9.6.4)第一式和(9.6.5).

对于 $n=3$，因为$\forall\varphi\in\mathbf{H}^1_o(\Omega)$，由 Соболев 嵌入定理有

$$\|\varphi\|_{o,4,\Omega}\leqslant\|\varphi\|^{3/4}_{o,b,\Omega}\|\varphi\|^{1/4}_{o,\Omega}\leqslant c|\varphi|^{3/4}_{1,\Omega}\|\varphi\|^{1/4}_{o,\Omega}$$

利用(9.6.7)有

$$\|B(N,\mathbf{u})\|_{\mathbf{V}'}^{4/3} \leqslant c|\mathbf{w}|_{1,\Omega}|\mathbf{u}|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{o,\Omega}^{1/3}\|\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^{1/3}$$

从而有

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^{4/3}(0,T;\ \mathbf{V}')}^{4/3} \leqslant c\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{H})}^{1/3} \cdot \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{H})}^{1/3} \cdot \int_0^T |\mathbf{w}|_{1,\Omega}|\mathbf{u}|_{1,\Omega}\,dt$$

由此得(9.6.4)的第二式和(9.6.6).证毕.

定理 9.6.1　设 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\bigcap\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{H})$ 是问题 (P) 的解，那么

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\in\begin{cases}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}') & n=2\\ \mathbf{L}^{4/3}(0,T;\ \mathbf{V}') & n=3\end{cases} \tag{9.6.8}$$

证　问题(P)可以表示为算子形式

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f} \tag{9.6.9}$$

由于 $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$，$A\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ 以及引理 9.6.2，从式 (9.6.9) 立即可以得到式 (9.6.8). 证毕.

由此，问题(P)也可表示为

$$(P)\begin{cases}\forall\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{X}_o'),\ \mathbf{u}_o\in\mathbf{H}:\\ \text{求}\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})\bigcap\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{H}),\\ \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\in\begin{cases}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}') & n=2\\ \mathbf{L}^{4/3}(0,T;\ \mathbf{V}') & n=3\end{cases}\\ \text{使得}\mathbf{u}\text{满足式}(9.6.9)\text{和}\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o\end{cases} \tag{9.6.10}$$

定理9.6.2　问题(P)和问题(Q)等价.

证　显然，如果 $(\mathbf{u},p)$ 是问题 (Q) 的解，那么 $\mathbf{u}$ 也是问题 (P) 的解. 相反，设 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\bigcap\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{H})$ 是问题 (P) 的

解，考虑 X_o 上的映照 $L(\mathbf{v},t)$:

$$\mathbf{v}\to\int_o^t(<\mathbf{f}(s),\mathbf{v}> - a_o(\mathbf{u}(s),\mathbf{v}) - a_1(\mathbf{u}(s);\ \mathbf{u}(s),\mathbf{v}))ds$$
$$-(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+(\mathbf{u}_o,\mathbf{v})$$

$\forall t\in[0,T]$, L 是 X_o 上的线性连续泛函，并且 $L(\mathbf{v},t)=0$, $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, 因而由推论 4.6.4(或引理 9.2.1) 可知，$\forall t\in[0,T]$, 存在唯一的函数 $p(t)\in\mathbf{L}_o^2(\Omega)$, 使得

$$L(\mathbf{v},t)=-<\mathrm{grad}p,\mathbf{v}> \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o$$

换句话说

$$(p,\mathrm{div}\mathbf{v})=\int_o^t\{<\mathbf{f}(s),\mathbf{v}> - a_o(\mathbf{u}(s),\mathbf{v}) - a_1(\mathbf{u}(s);\mathbf{u}(s),\mathbf{v})\}ds$$
$$-(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+(\mathbf{u}_o,\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o \tag{9.6.11}$$

利用引理 9.6.2 容易验证 $p(t)\in\mathbf{C}([0,T];\ \mathbf{L}_o^2(\Omega))$, 对式 (9.6.11) 两边微分后，得

$$<\frac{dp}{dt},\mathrm{div}\mathbf{v}> = <\mathbf{f}(t),\mathbf{v}> - a_o(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) - a_1(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{v})$$
$$-<\frac{du}{dt}(t),\mathbf{v}> \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{X}_o \tag{9.6.12}$$

如果取 $P=\dfrac{dp}{dt}$, 那么 P 即我们所求的，$(\mathbf{u},P)$ 是 (Q) 的解．证毕．

为了证明问题 (P) 的解的存在性，我们需要关于向量值函数空间的 Rellich 型紧嵌入定理．

引理 9.6.3 设 $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_{-1}$ 为三个可分的自反的 Banach 空间，并且 $\mathbf{X}_1\subset\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}_{-1}$, 使得 $\mathbf{X}_1$ 到 $\mathbf{X}_0$ 的嵌入是紧的，$\mathbf{X}_o$ 到 $\mathbf{X}_{-1}$ 的嵌入是连续的，如果 $\{u_m\}$ 是 $\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\mathbf{X}_1)$ 中一个

有界序列，而 du_m/dt 在 $\mathbf{L}^{p_2}(0,T;\mathbf{X}_{-1})$ 中有界，$1<p_1<+\infty$，$1<p_2<+\infty$，那么存在一个 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_k\}$，它在 $\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\mathbf{X}_o)$ 中强收敛．

证 由于 $\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\mathbf{X}_1)$ 是可分和自反的，$\mathbf{L}^{p_1'}(0,T;\mathbf{X}_1')$ 为其对偶空间，$1/p_1+1/p_1'=1$，$\mathbf{X}_1'$ 是 $\mathbf{X}_1$ 的对偶空间，因而存在 $\{u_m\}$ 的一个子序列 $\{u_k\}$ 在 $\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\mathbf{X}_1)$ 中弱收敛，不失一般性，设 $\{u_k\}$ 弱收敛于零，利用引理 6.5.1 有

$$\|u_k\|_{\mathbf{X}_o}^{p_1}\leqslant\varepsilon\|u_k\|_{\mathbf{X}_1}^{p_1}+c_\varepsilon\|u_k\|_{\mathbf{X}_{-1}}^{p_1}\quad \varepsilon>0$$

因为 $\|u_k\|_{\mathbf{X}_1}\leqslant c$，故

$$\|u_k\|_{\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\ \mathbf{X}_o)}^{p_1}\leqslant c\varepsilon+c_\varepsilon\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\ \mathbf{X}_{-1})}^{p_1}$$

如果 $\|u_k\|_{\mathbf{L}^{p_1}(0,T;\ \mathbf{X}_{-1})}\to 0$，当 $k\to\infty$ 时，则引理就得到证明．

实际上，我们能证明 $\{u_k\}$ 在 $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{X}_{-1})$ 中收敛于零．设 I 为 $[0,T]$ 的一个子区间，序列 $\{\int_I u_m(s)ds\}$ 在 $\mathbf{X}_1$ 中弱收敛于零．事实上，记 x_I 为 I 的特征函数，设 $L\in\mathbf{X}_1'$，那么 $x_I L\in(\mathbf{L}^{p_1}(0,T,\mathbf{X}_1))'$，有

$$<u_m,x_I L> = \int_I <u_m,L>ds = <\int_I u_m(s)ds,L> \to 0$$

由于嵌入 $\mathbf{X}_1\subset\mathbf{X}_o$ 是紧的，所以 $\{\int_I u_m(s)ds\}$ 在 $\mathbf{X}_o$ 中强收敛于零，从而在 $\mathbf{X}_{-1}$ 中也强收敛于零，设 $t\in[0,T]$，$u_m(t)-u_m(t_1)$

$= \int_{t_1}^{t} \frac{du_m}{ds} ds$. 另一方面

$$u_k(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} u_k(\tau)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t}(s-t+\varepsilon)\frac{du_k}{ds}ds$$

利用Hoelder不等式

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t}|s-t+\varepsilon|\|\frac{du_k}{ds}\|_{X_{-1}}ds$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}(\int_{t-\varepsilon}^{t}(s-t+\varepsilon)^{p_2'}ds)^{1/p_2'}(\int_{t-\varepsilon}^{t}\|\frac{du_k}{ds}\|_{X_{-1}}^{p_2}ds)^{1/p_2}$$

$$\leqslant (\frac{1}{p_2'+1})^{1/p_2'}\varepsilon^{1/p_2'}(\int_{o}^{T}\|\frac{du_k}{ds}\|X_{X_{-1}}^{p_2}ds)^{1/p_2} \leqslant c\varepsilon^{1/p_2'}$$

其中 $1/p_2' + 1/p_2 = 1$，对任何 $\varepsilon_o > 0$，取 ε，使得 $c\varepsilon^{1/p_2'} \leqslant \varepsilon_o/2$，那么固定 ε，于是

$$\|u_k(t)\|_{X_{-1}} \leqslant \varepsilon_o/2 + \|\int_{t-\varepsilon}^{t}u_k(\tau)d\tau\|_{X_{-1}}/\varepsilon$$

故对每个 t，上式第二项趋于零，当 $k\to\infty$ 时，从而

$$\|u_k(t)\|_{X_{-1}} \to 0,\ \text{当} k\to\infty \text{时},\ \forall t$$

由 Lebesque 控制收敛定理，可得本命题．证毕．

引理9.6.4　设序列$\{\mathbf{u}_m\}$满足

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ V)} \leqslant M \tag{9.6.13}$$

$$\|d\mathbf{u}_m/dt\|_{L^p(0,T;\ V')} \leqslant M \tag{9.6.14}$$

其中 $M>0$ 为常数，$p>1$，$m=1,2,\cdots$，那么存在 $\{\mathbf{u}_m\}$ 的子序列 $\{\mathbf{u}_k\}$，它在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$ 中强收敛于 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$，即

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\ H)} = 0$$

这个引理是引理9.6.3的自然结果.

引理 9.6.5　设序列 $\mathbf{u}_m \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ 并且它在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ 中弱收敛于 $\mathbf{u}$，而在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ 中强收敛于 $\mathbf{u}$，即当 $m\to\infty$ 时，$\|\mathbf{u}_m-\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})}\to 0$，那么$\forall\ \mathbf{w}\in \mathbf{C}^1([0,T]\times\Omega)$ 有

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{w})dt=\int_0^T a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{w})dt \tag{9.6.15}$$

证　实际上

$$\begin{aligned}
&a_1(u_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{w})-a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{w})\\
&\quad=a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{u})-a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{w},\mathbf{u}_m)\\
&\quad=a_1(\mathbf{u}-\mathbf{u}_m;\mathbf{w},\mathbf{u})+a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{u}_m)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T (a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{w})-a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{w}))dt\right|\\
&\quad\leqslant c\max_t\|\mathrm{grad}\mathbf{w}\|_\infty\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})}\\
&\qquad\cdot(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})}+\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})})
\end{aligned}$$

因为 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})$ 强收敛，故 $\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})}$ 一致有界，从而式 (9.6.15) 得证．证毕．

我们用 Galerkin 方法证明问题 (P) 的解的存在性，为此令 $\mathbf{w}_i (i=1,2,\cdots,m)$ 是 Stokes 算子 A 的前 m 个本征函数，λ_i 为相应的本征值．$\mathbf{w}_i$ 和区域 Ω 有同阶光滑性．$\{\mathbf{w}_j\}$ 组成 H 的正交完备系，而 $\lambda_j^{-1/2}\mathbf{w}_j$ 组成 V 的正交完备系．

考察有限维动力系统

$$
(P_m)\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_i)+a_o(\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_i)+a_1(\mathbf{u}_m;\ \mathbf{u}_m,\mathbf{w}_i)\\ \quad = <\mathbf{f},\mathbf{w}_1> \qquad (i=1,\cdots,m) & (9.6.16)\\ \mathbf{u}_m(0)=\mathbf{u}_{om} & (9.6.17)\end{cases}
$$

其中

$$
\mathbf{u}_{om}=\sum_{j=1}^{m}\xi_j^o\mathbf{w}_j,\ \xi_j^o=(\mathbf{u}_o,\mathbf{w}_i) \tag{9.6.18}
$$

若令 $\mathbf{u}_m=\sum_{j=1}^{m}\xi_j\mathbf{w}_j,\ \eta_j=(\mathbf{f},\mathbf{w}_j)$

那么(9.6.16)和(9.6.17)变为

$$
\begin{cases}\dfrac{d\xi_1}{dt}+\lambda\lambda_j\xi_j+\sum_{i,k}a_1(\mathbf{w}_i;\ \mathbf{w}_k,\mathbf{w}_j)\xi_i\xi_k=\eta_j & (9.6.19)\\ \xi_j(0)=\xi_j^o & (9.6.20)\end{cases}
$$

这是一个二次的常微分方程组，由经典理论可知在 $t=0$ 的邻域内存在唯一解．设在 $(0,t_m)$ 内它有局部极大解，设 $t_m\leqslant T$，如果 $t_m<T$，那就意味着 $\lim\limits_{t\to t_m^{-1}}\|\mathbf{u}_m\|_o=\infty$. 因此，如果我们能够证明 $|\mathbf{u}_m|$ 是一致有界，就证明了 (9.6.16), (9.6.20) 在 $[0,T]$ 上有全局解 $\mathbf{u}_m$，为此，要先估计 $|\mathbf{u}_m|$

引理 9.6.6 Galerkin 逼近问题 (P_m) 有唯一解 $\mathbf{u}_m\in \mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathrm{H})\cap\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathrm{V})$，且

$$
\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathrm{H})}+\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathrm{V})}\leqslant c \tag{9.6.21}
$$

其中c为与m无关的常数.

证 我们只须证明式 (9.6.21)，注意到 $a_1(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j,\mathbf{w}_k)=-a_1(\mathbf{w}_i;\mathbf{w}_k,\mathbf{w}_j)$，所以

$$\sum_{i,j,k} a_1(\mathbf{w}_i;\ \mathbf{w}_k,\mathbf{w}_j)\xi_i\xi_k\xi_j = 0 \tag{9.6.22}$$

于是得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2 + \lambda\sum_j \lambda_j\xi_j^2 = <\eta,\xi>$$

这里 $\xi = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$，$\eta = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，$|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{m}\xi_j^2$，因为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m$，故

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2 + \lambda\lambda_1|\xi|^2 \leqslant \frac{1}{2}\lambda\lambda_1|\xi|^2 + \frac{|\eta|^2}{2\lambda\lambda_1}$$

利用Gronwall不等式，有

$$|\xi|^2 \leqslant |\xi^o|^2 e^{-\lambda\lambda_1 t} + \int_o^t e^{-\lambda\lambda_1(t-s)}|\eta(s)|^2 ds / \lambda\lambda_1 \tag{9.6.23}$$

这说明$\xi(t)$在$[0,T]$上存在且唯一.

对式(9.6.16)两边乘以ξ_i，并对i求和，则得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_o^2 + \lambda|\mathbf{u}_m|_1^2 + a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m) = <\mathbf{f},\mathbf{u}_m>$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_1^2 + \lambda|\mathbf{u}_m|_1^2 = <\mathbf{f}(t),\mathbf{u}_m(t)>$$

积分后得

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 - \|\mathbf{u}_m(0)\|_o^2 + 2\lambda\int_o^t |\mathbf{u}_m(s)|_1^2 dt = 2\int_o^t <\mathbf{f}(s),\mathbf{u}_m(s)> ds \tag{9.6.24}$$

利用Young不等式

$$\left|\int_o^t <\mathbf{f}(s),\mathbf{u}_m(s)> ds\right| = \frac{1}{2}(\varepsilon\int_o^t |\mathbf{u}_m(s)|_1^2 ds$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t \|\mathbf{f}(s)\|_{V'}^2\, ds) \tag{9.6.25}$$

所以取$\varepsilon=2\lambda$，得

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{u}_{om}\|_o^2+\int_o^t \|\mathbf{f}(s)\|_{V'}^2\, ds/2\lambda$$

$$\leqslant \|\mathbf{u}_o\|_o^2+\int_o^t \|\mathbf{f}(s)\|_{V'}^2\, ds/2\lambda$$

即 $\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,T;\ H)} \leqslant c$

另外，若在式(9.6.25)中，取$\varepsilon=\lambda$，代入(9.6.24)，得

$$\|\mathbf{u}_m(T)\|_o^2+\lambda\int_o^T |\mathbf{u}_m(s)|_1^2 ds \leqslant \|\mathbf{u}_{om}\|_o^2+\int_o^T \|\mathbf{f}(s)\|_{V'}^2 ds/\lambda \tag{9.6.26}$$

从而 $\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ V)} \leqslant c$

所以有式(9.6.21)成立.证毕.

引理 9.6.7 序列$\{\mathbf{u}_m\}$在$\mathbf{k}^\gamma(0,T;\mathrm{V},\mathrm{H})$中有界，$0<\gamma<1/4$，其中$\mathbf{k}^r(0,T;\mathrm{V},\mathrm{H})$为第四章§4.8中所定义的

$$\mathbf{K}^r(0,T;\mathrm{V},\mathrm{H})=\{\mathbf{u}\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{V});\ \tau\to|\tau|^r\hat{\mathbf{u}}(\tau)\in \mathbf{L}^2(\mathrm{R};\mathrm{H})\}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{k^r}^2=\int_o^T |\mathbf{u}(t)|_1^2 dt+\int_R |\tau|^{2r}\|\hat{\mathbf{u}}(\tau)\|_o^2 d\tau$$

其中$\hat{\mathbf{u}}(\tau)$是$\tilde{\mathbf{u}}$的Fourier变换，而

$$\tilde{\mathbf{u}}=\begin{cases}\mathbf{u}(t) & \forall t\in[0,T]\\ 0 & \forall t\notin[0,T]\end{cases}$$

证 令$\tilde{\mathbf{f}}$也是$\mathbf{f}$的零延拓，那么(9.6.16)可以延拓为

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{u}}_m(t),\mathbf{w}_i)+a_o(\tilde{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_i)+a_1(\tilde{\mathbf{u}}_m;\tilde{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_i)=\ <\tilde{\mathbf{f}},\mathbf{w}_i>$$

$$+(\mathbf{u}_{om},\mathbf{w}_i)\delta_o-(\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_i)\delta_T \quad (i=1,2,\cdots m) \tag{9.6.27}$$

其中δ_o，δ_T为$t=0$和$t=T$的Dirac分布.

(9.6.27)两边做Fourier变换得

$$2\pi i\tau(\hat{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j)+a_o(\hat{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j)+\ <\hat{B}(\mathbf{u}_m),\mathbf{w}_j>$$
$$=\ <\hat{\mathbf{f}},\mathbf{w}_j>\ +(\mathbf{u}_{om},\mathbf{w}_j)-(\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j)e^{-2\pi i\tau T}$$

这里记 $B(\mathbf{u})=B(\mathbf{u},\mathbf{u})$，$\hat{B}(\mathbf{u})$ 为 $B(\mathbf{u})$ 之 Fourier 变换．由此得

$$2\pi i\tau\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2+\lambda|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|_1^2+\ <\hat{B}(\mathbf{u}_m),\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)>$$
$$=\ <\hat{\mathbf{f}}(\tau),\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)>\ +(\mathbf{u}_{om},\hat{\mathbf{u}}_m(\tau))-(\mathbf{u}_m(T),\hat{\mathbf{u}}_m(\tau))e^{-2\pi i\tau T}$$

从而有

$$2\pi|\tau|\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2\leqslant(\|\hat{B}(\mathbf{u}_m)\|_{v'}+\|\hat{\mathbf{f}}(t)\|_{v'})|\hat{\mathbf{u}}_m|_1$$
$$+(\|\mathbf{u}_{om}\|_o+\|\mathbf{u}_m(T)\|_o)\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o$$

但是 $\qquad \|\hat{\mathbf{f}}(\tau)\|_{v'}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{\mathbf{f}}(t)\|_{\mathbf{V}'}dt\leqslant c_1$

又由(9.3.44)得

$$\|\hat{B}(\mathbf{u}_m(\tau))\|_{\mathbf{V}'}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\|B(\tilde{\mathbf{u}}_m(t),\tilde{\mathbf{u}}_m(t))\|_{\mathbf{V}'}dt$$
$$\leqslant c\int_o^T|\mathbf{u}_m|_1^2dt\leqslant c\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;\ \mathbf{V})}\leqslant c_2$$

从而有

$$|\tau|\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2\leqslant c_4(\|\mathbf{u}_m(\tau)\|_o+|\hat{u}_m(\tau)|_1) \tag{9.6.28}$$

在 (9.6.28) 两边除以 $(1+|\tau|^\sigma)$，$\frac{1}{2}<\sigma<1$，然后积分，并利用

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|_1}{1+|\tau|^\sigma}d\tau\leqslant\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ \mathbf{V})}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{(1+|\tau|^\sigma)^2}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant c_s\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ \mathbf{V})}\quad(\text{因为}\sigma>1/2)$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o}{1+|\tau|^\sigma} d\tau \leqslant c_5 \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ H)} \tag{9.6.29}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2}{1+|\tau|^\sigma} d\tau \leqslant c(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ V)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;\ H)})$$

利用(9.6.21), 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2}{1+|\tau|^\sigma} d\tau \leqslant c_6 \tag{9.6.30}$$

然而对固定的$r < 1/4$, e有

$$|\tau|^{2r} \leqslant c_7(1+|\tau|)/(1+|\tau|^{1-2r}) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2r} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2 d\tau &\leqslant c_7 \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2 (1+|\tau|)/(1+|\tau|^{1-2r}) d\tau \\ &\leqslant c_7 (\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2 |\tau|/(1+|\tau|^{1-2r}) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2 /(1+|\tau|^{1-2r}) d\tau\end{aligned}$$

由(9.6.30), (9.6.29)和(9.6.21)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2r} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_o^2 d\tau \leqslant c$$

最后有

$$\|\mathbf{u}_m\|_{K^r(0,T;\ V,H)} \leqslant c \tag{9.6.31}$$

证毕.

定理 9.6.3 问题 (P) 至少有一个解 $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;\ H)$

证　由引理 9.6.4, 9.6.5, 9.6.6 和 9.6.7, 存在问题 (P_m) 的解序列 $\{\mathbf{u}_m\}$ 的子序列 $\{\mathbf{u}_\mu\}$, 使得当 $\mu\to\infty$ 时

$$\text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\text{中,}\ \mathbf{u}_\mu\text{弱收敛于}\mathbf{u} \tag{9.6.32}$$

$$\text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})\text{中,}\ \mathbf{u}_\mu\text{弱星收敛于}\mathbf{u} \tag{9.6.33}$$

$$\text{在}\mathbf{k}'(0,T;\mathbf{V},\mathbf{H})\text{中,}\ \mathbf{u}_\mu\text{弱收敛于}\mathbf{u} \tag{9.6.34}$$

$$\text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})\text{中,}\ \mathbf{u}_\mu\text{强收敛于}\mathbf{u} \tag{9.6.35}$$

现在对问题 (P_m) 进行极限过渡，设 $\psi(t)\in\mathbf{C}^1([0,T])$, $\psi(T)=0$, 在式 (9.6.16) 两边乘上 $\psi(t)$, 并且在 $[0,T]$ 上积分，记 $\mathbf{W}(0,T)$ $=\mathbf{W}(0,T;\mathbf{V},\mathbf{V}')=\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V});\ \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}')\}$; $\|u\|^2_{\mathbf{W}(0,T)}$ $=\|u\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})}+\|\dfrac{du}{dt}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V}')}$

由于$\mathbf{u}_m\in\mathbf{W}(0,T)$, 可以利用Green公式

$$\int_0^T\{<\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t),\ \mathbf{v}(t)>+<\mathbf{u}(t),\ \frac{dv}{dt}(t)>\}dt$$
$$=<\mathbf{u}(T),\mathbf{v}(T)>-<\mathbf{u}(0),\mathbf{v}(0)>$$

得

$$-\int_0^T(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_i)\psi'(t)dt+\int_0^T a_o(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_i)\psi(t)dt$$
$$+\int_0^T a_1(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_i)\psi(t)dt$$
$$=\int_0^T<\mathbf{f}(t),\mathbf{w}_i>\psi(t)dt+(\mathbf{u}_{om},\mathbf{w}_i)\psi(0) \tag{9.6.36}$$

固定任一正整数 μ_o, 令 $\mathbf{v}\in S_{\mu o}=\mathrm{Span}\{\mathbf{w}_i,i=1,2,\cdots,\mu_o\}$, 则式 (9.6.36) 可写为

$$-\int_o^T (\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt+\int_o^T a_o(\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi(t)dt$$

$$+\int_o^T a_1(\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi(t)dt$$

$$=\int_o^T <\mathbf{f}(t),\mathbf{v}>\psi(t)dt-(\mathbf{u}_{o\mu},\mathbf{v})\psi(o)\quad\forall\mu>\mu_o \tag{9.6.37}$$

由式(9.6.32)有

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_o^T (\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt=\int_o^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_o^T a_o(\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi(t)dt=\int_o^T a_o(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)dt$$

由引理9.6.5，则有

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_o^T a_1(\mathbf{u}_\mu(t);\mathbf{u}_\mu(t),\mathbf{v})\psi(t)dt=\int_o^T a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})\psi(t)dt$$

另外，在H内有$\lim\limits_{\mu\to\infty}\mathbf{u}_{o\mu}=\mathbf{u}_o$.令$\mu\to\infty$，(9.6.37)变为

$$-\int_o^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt+\int_o^T a_o(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)dt$$

$$+\int_o^T a_1(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)dt$$

$$=\int_o^T <\mathbf{f}(t),\mathbf{v}>\psi(t)dt-(\mathbf{u}_o,\mathbf{v})\psi(o)$$

$$\mathbf{v}\in S_{\mu o},\ \forall\psi\in C^1([0,T]),\ \psi(T)=0 \tag{9.6.38}$$

由于μ_o是任意的，以及$S_{\mu o}$在H中稠密，所以上式对任何v$\in$H都成立，对任何v$\in$V也成立，如果把ψ限制在$D(0,T]$上，则上式给出

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+a_o(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{v})=\ <\mathbf{f}(t),\mathbf{v}>\quad\forall \mathbf{v}\in \mathbf{V}$$

因而$\mathbf{u}(t)$满足(9.6.16).

我们还需证明 $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o$. 对 (9.6.2) 两边乘上 $\psi(t)$ 并且在$[0,T]$上积分，利用 Green 公式，与 (9.6.38) 比较，得

$$(\mathbf{u}(0),\mathbf{v})=(\mathbf{u}_o,\mathbf{v})\quad\forall \mathbf{v}\in \mathbf{V}$$

因而 $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o$ 在 $\mathbf{V}'$ 意义下成立，由 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{H}$ 知在 $\mathbf{H}$ 中也有 $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o$ 所以 $\mathbf{u}(t)$ 是问题 (P) 的解．证毕．

§9.7 解的估计和唯一性

首先有

定理9.7.1 问题 (P) 的解满足下列能量不等式

$$\|\mathbf{u}(t)\|_o^2+2\lambda\int_{t_o}^{t}|\mathbf{u}(s)|_1^2ds$$

$$\leqslant\|\mathbf{u}(t_o)\|_o^2+2\int_{t_o}^{t}<\mathbf{f}(s),\mathbf{u}(s)>ds \tag{9.7.1}$$

这里$0\leqslant t_o\leqslant t\leqslant T$, a.e,$t_o\in[0,T]$.

证　设 E 为 $[0,T]$ 中测度为零的集合，使得 $t_o\in[0,T]\setminus E$, $\{\mathbf{u}_m(t_o)\}$ 在 $\mathbf{V}$ 中弱收敛于 $\mathbf{u}(t_o)$, 在 $\mathbf{H}$ 中强收敛于 $\mathbf{u}(t_o)$. 对式 (9.6.16) 两边乘 ξ_i 并对 i 求和，利用 $a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m)=0$. 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2+\lambda|\mathbf{u}_m(t)|_1^2=\ <\mathbf{f}(t),\mathbf{u}_m(t)> \tag{9.7.2}$$

从t_o到$t\in[0,T]$积分，有

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 + 2\lambda\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(t_o,t;\,V)}^2$$

$$\leqslant \|\mathbf{u}_m(t_o)\|_o^2 + 2\int_{t_o}^{t} \langle \mathbf{f}(s),\mathbf{u}_m(s)\rangle ds$$

由于式(9.6.32) – (9.6.35)，有

$$\lim_{m\to\infty} (\|\mathbf{u}_m(t_o)\|_o^2 + 2\int_{t_o}^{t} < \mathbf{f}(s),\mathbf{u}_m(s) > ds)$$

$$= \|\mathbf{u}(t_o)\|_o^2 + 2\int_{t_o}^{t} < \mathbf{f}(s),\mathbf{u}(s) > ds$$

另一方面，由于范数弱下半连续性（参看附录 A），有

$$\limsup_{m\to\infty}(\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 + 2\lambda\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(t_o,t;\,V)}^2)$$

$$\geqslant \limsup_{m\to\infty}\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 + \liminf_{m\to\infty} 2\lambda\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(t_o,t;\,V)}^2$$

$$\geqslant \|\mathbf{u}(t)\|_o^2 + 2\lambda\|\mathbf{u}\|_{L^2(t_o,t;\,V)}^2$$

于是有能量不等式(9.7.1).证毕.

在 (9.7.2) 中，利用 $\lambda_1\|\mathbf{u}_m\|_o^2 \leqslant |\mathbf{u}_m|_1^2$，$|<\mathbf{f},\mathbf{u}_m>| \leqslant \|\mathbf{f}\|_o^2/(2\lambda\lambda_1) + \lambda\lambda_1\|\mathbf{u}_m\|_o^2/2$，得

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_o^2 + \lambda|\mathbf{u}_m|_1^2 \leqslant \|\mathbf{f}\|_o^2/\lambda\lambda_1 \tag{9.7.3}$$

从而有

$$\lambda\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,t;\,V)}^2 \leqslant \|\mathbf{u}_o\|_o^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;\,H)}^2/(\lambda\lambda_1) \tag{9.7.4}$$

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{u}_o\|_o^2 e^{-\lambda\lambda_1 t} + + \int_0^t e^{-\lambda\lambda_1(t-s)}\|\mathbf{f}\|_o^2 ds/(\lambda\lambda_1) \tag{9.7.5}$$

如果 $\mathbf{f}\in L^\infty(\mathbf{R}_+,\mathbf{H})$，记 $|\mathbf{f}|_\infty = \sup_{t>0}\|\mathbf{f}(t)\|_o$，那么 (9.7.3) 和 (9.7.5) 可写为

$$\lambda\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,t;V)} \leqslant \|\mathbf{u}_o\|^2_o + (\lambda\lambda_1)^{-1}|\mathbf{f}|^2_\infty t \tag{9.7.6}$$

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_o \leqslant \|\mathbf{u}_o\|^2_o + (\lambda\lambda_1)^{-2}|\mathbf{f}|^2_\infty \tag{9.7.7}$$

在$(t,t+\tau)$上积分(9.7.3)，利用(9.7.7)，得

$$\lambda\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(t,t+\tau;V)} \leqslant \|\mathbf{u}_o\|^2_o + (\lambda\lambda_1)^{-1}|\mathbf{f}|^2_\infty(\tau + (\lambda\lambda_1)^{-1}) \tag{9.7.8}$$

记μ为R中的Lebesque测度，共定义为

$$\mu\{s\in[t,t+\tau]:|\mathbf{u}_m(s)|_1 \geqslant \rho\} \leqslant (\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|^2_o + \lambda_1^{-1}\lambda^{-2}|\mathbf{f}|^2_\infty(\tau + (\lambda\lambda_1)^{-1}))\rho^{-2}$$

取$\rho = \sqrt{2}(\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|^2_o + \lambda_1^{-1}\lambda^{-2}|\mathbf{f}|^2_\infty(\tau + \lambda_1^{-1}\lambda^{-1}))^{1/2}/\sqrt{\tau}$，有

$$\mu\{s\in[t,t+\tau]:\ |\mathbf{u}_m(s)|_1 \geqslant \rho\} \leqslant \tau/2,$$

这样在每个长度为τ的区间上，存在时刻$t_o\in[t,t+\tau]$，使得

$$|\mathbf{u}_m(t_o)|^2_1 \leqslant 2(\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|^2_o + \lambda_1^{-1}\lambda^{-2}|\mathbf{f}|^2_\infty(\tau + (\lambda\lambda_1)^{-1}))/\tau \tag{9.7.9}$$

对Galerkin系统

$$\frac{du_m}{dt} + \lambda A\mathbf{u}_m + P_m B(\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m) = P_m\mathbf{f} \tag{9.7.10}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = P_m\mathbf{u}_o \tag{9.7.11}$$

式(9.7.10)两端对$A\mathbf{u}_m$作H内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|^2_1 + \lambda\|A\mathbf{u}_m\|^2_o + a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,A\mathbf{u}_m) = (\mathbf{f},A\mathbf{u}_m) \tag{9.7.12}$$

因 $\quad |(\mathbf{f},A\mathbf{u}_m)| \leqslant \lambda\|A\mathbf{u}_m\|^2_o/4 + \lambda^{-1}|\mathbf{f}|^2_\infty$

利用式(9.3.12)，当$n=2$时，取$s_1=1/2$，$s_2=1/2$，$s_3=0$；当$n=3$时，取$s_1=1$，$s_2=1/2$，则有

$$|a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,A\mathbf{u}_m)| \leqslant \begin{cases} c\|\mathbf{u}_m\|^{1/2}_o|\mathbf{u}_m|_1\|A\mathbf{u}_m\|^{3/2}_o & n=2 \\ c|\mathbf{u}_m|^{3/2}_1\|A\mathbf{u}_m\|^{3/2}_o & n=3 \end{cases} \tag{9.7.13}$$

这样，式(9.7.12)变为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}_m\|_o^2$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_o^2 + \lambda^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2 + \frac{\lambda}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_o^2$$

$$+ c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^4, \quad n = 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}_m\|_o^2$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_o^2 + \lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + c|\mathbf{u}_m|_1^{3/2}\|A\mathbf{u}_m\|_o^{3/2}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{2}\|A\mathbf{u}_m\|_o^2 + \lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_m|_1^6, \quad n = 3$$

故有如下估计

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}_m\|_o^2 \leqslant 2\lambda^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2 + c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|u_m|_1^4, n = 2 \quad (9.7.14)$$

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}_m\|_o^2 \leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_m|_1^6, \quad n = 3 \quad (9.7.15)$$

在(9.7.14)两端乘以$\exp(-\int_{t_o}^t c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^2 ds)$，得

$$\frac{d}{dt}[|\mathbf{u}_m|_1^2\exp(-\int_{t_o}^t c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^2 ds)]$$

$$\leqslant 2\lambda^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2\exp(-\int_{t_o}^t c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^2 ds)$$

积分后有

$$|\mathbf{u}_m(t)|_1^2 \leqslant |\mathbf{u}_m(t_o)|^2\exp\left(\int_{t_o}^t c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^2 ds\right)$$

$$+ 2\lambda^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2(t - t_o)\exp\left(\int_{t_o}^t c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}_m\|_o^2|\mathbf{u}_m|_1^2 ds\right)$$

$$n=2 \qquad (9.7.16)$$

利用式(9.7.7)和(9.7.8)有

$$
\begin{aligned}
& c\lambda^{-3}\int_{t_o}^{t} \|\mathbf{u}_m\|_o^2 |\mathbf{u}_m|_1^2 ds \\
& \leqslant c\lambda^{-3}(\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + \lambda^{-2}\lambda_1^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2)\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(t_o,t;\ V)}^2 \\
& \leqslant c\lambda^{-4}(\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda\lambda_1)^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2)(\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda\lambda_1)^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2 \\
& \quad \cdot (t - t_o + (\lambda\lambda_1)^{-1})), \quad n=2 \qquad (9.7.17)
\end{aligned}
$$

取 $t_o \in [t-\tau, t]$，使得(9.7.9)成立，则由(9.7.16)有

$$|\mathbf{u}_m(t)|_1^2 \leqslant \alpha e^\beta + 2\lambda^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2 e^\beta \tau \qquad n=2$$

其中

$$\alpha = 2[\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda_1\lambda^2)^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2(\tau + \lambda_1^{-1}\lambda^{-1})]/\tau$$

$$\beta = c\lambda^{-4}[\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda_1\lambda)^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2][\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda_1\lambda)^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2 \cdot (\tau + (\lambda_1\lambda)^{-1})]$$

如果取 τ，使得 $\tau \leqslant \lambda_1^{-1}\lambda^{-1}$，则 $\forall t \geqslant \tau$，有

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}_m(t)|_1^2 \leqslant & \{2[\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + 2\lambda_1^{-2}\lambda^{-3}|\mathbf{f}|_\infty^2]/\tau + 2\lambda_1^{-1}\lambda^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2\} \\
& \cdot \exp\{c\lambda^{-4}(\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + (\lambda_1\lambda)^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2)^2\} \quad n=2 \qquad (9.7.18)
\end{aligned}
$$

现在在区间 $[(2^{(k+1)}\lambda_1\lambda)^{-1},\ (2^k\lambda_1\lambda)^{-1}]$ 上应用式(9.7.18)，这时 $\tau = (2^{(k+1)}\lambda_1\lambda)^{-1}$，那么如果 $t \leqslant (2^k\lambda_1\lambda)^{-1}$，则有 $\tau \leqslant t \leqslant 2\tau$，这样由式(9.7.18)可知 $\forall t \in [(2^{k+1}\lambda_1\lambda)^{-1},\ (2^k\lambda_1\lambda)^{-1}]$

$$
\begin{aligned}
t|\mathbf{u}_m(t)|_1^2 \leqslant & \{4[\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + 2\lambda_1^{-2}\lambda^{-3}|\mathbf{f}|_\infty^2] + 2\lambda_1^{-2}\lambda^{-3}|\mathbf{f}|_\infty^2\} \\
& \cdot \exp(c\lambda^{-4}(\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + \lambda_1^{-2}\lambda^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2)^2) \qquad n=2 \qquad (9.7.19)
\end{aligned}
$$

最后这个不等式与 k 无关，因此 (9.7.19) 对任何 $0<t\leqslant 1/\lambda\lambda_1$ 都成立.

对于 $n=3$，我们要假设存在一个 $T>0$，$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathrm{H})$ 且

$$|\mathbf{u}_m(0)|_1^2+2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathrm{H})}\leqslant 2c^{-1/2}\lambda^2\lambda_1^{1/2}. \tag{9.2.20}$$

那么，对所有这样的 $T\geqslant t\geqslant 0$，有 $|\mathbf{u}_m(0)|_1^2<c^{-1/2}\lambda^2\lambda_1^{1/2}$. 因为 $|\mathbf{u}_m(t)|_1$ 是光滑的，因此在 $t=0$ 的邻域内也有

$$|\mathbf{u}_m(t)|_1^2<c^{-1/2}\lambda^2\lambda_1^{1/2} \tag{9.7.21}$$

因而
$$\lambda\|A\mathbf{u}_m\|_o^2-c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_m|_1^6\geqslant\lambda\lambda_1|\mathbf{u}_m|_1^2-c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_m|_1^6$$
$$=\lambda\lambda_1|\mathbf{u}_m|_1^2(1-c\lambda_1^{-1}\lambda^{-4}|\mathbf{u}_m|_1^4)>0$$

综合式(9.7.15)和(9.7.20)，有

$$|\mathbf{u}_m(t)|_1^2\leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,t;\ \mathrm{H})}+|\mathbf{u}_m(0)|_1^2$$
$$\leqslant 2c^{-1/2}\lambda^2\lambda_1^{1/2}\qquad n=3 \tag{9.7.22}$$

式(9.7.22)表明，对于$0\leqslant t\leqslant T$，(9.7.21)也成立.

从式(9.7.17)，(9.7.18)可得

引理 9.7.1 设 $m\geqslant 1$ 是一整数，$n=2$，$\mathbf{u}_o\in\mathrm{H}$，$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}_+,\mathrm{H})$，$\mathbf{u}_m$ 是 Galerkin 系统 (9.7.10) 和 (9.7.11) 的解，那么存在一个只依赖于 λ，λ_1，$\|\mathbf{u}_o\|$ 和 $\sup\limits_{t>0}\|\mathbf{f}(t)\|_o$ 的常数，使得

$$\sup_{0<t\leqslant(\lambda\lambda_1)^{-1}}\lambda\lambda_1 t|\mathbf{u}_m(t)|_1^2\leqslant\rho_1^2 \tag{9.7.23}$$

$$\sup_{t>(\lambda\lambda_1)^{-1}}|\mathbf{u}_m(t)|_1<\rho_o \tag{9.7.24}$$

如果 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{V}$，那么存在一个只依赖于 $|\mathbf{u}_o|_1$，λ，λ_1 和 $\sup\limits_t\|f(t)\|_o$

的常数 ρ_1，使得(9.7.24)和下式成立

$$\sup_{0\leq t\leq(\lambda\lambda_1)^{-1}} |\mathbf{u}_m(t)|_1 \leq \rho_1$$

进行极限过渡，可得

定理 9.7.2 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是一个 $\mathbf{C}^2$ 类有界开集，设 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{H}$; $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}_+,\mathbf{H})$ 以及 $T>0$，那么 Navier－stokes 方程

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f}\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o\end{cases}$$

存在一个解 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty_{loc}(0, T; \mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2_{loc}(0, T; \mathbf{D}(\mathbf{A}))\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})\cap L^2(0, T; \mathbf{V})$，而且

$$\sup_{0\leq t\leq(\lambda\lambda_1)^{-1}\leq T} \lambda\lambda_1 t|\mathbf{u}(t)|_1^2 + \sup_{(\lambda\lambda_1)^{-1}\leq t\leq T} |\mathbf{u}(t)|_1^2 \leq 2\rho_o^2 \tag{9.7.25}$$

这里 ρ_o 依赖于 $\|\mathbf{u}_o\|_o$, λ, λ_1 和$\sup\limits_t\|\mathbf{f}(t)\|_o$，但与 T 无关．

如果$\mathbf{u}_o\in\mathbf{V}$，那么$\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2(0,T;D(A))$且

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\mathbf{u}(t)|_1^2+\lambda\int_o^T\|A\mathbf{u}\|_o^2dt\leq c(T+(\lambda\lambda_1)^{-1})$$

其中 c 是依赖于 λ、λ_1，$|\mathbf{u}_o|_1$ 和$\sup\limits_t\|\mathbf{f}(t)\|_o$ 的常数，但与 T 无关，而 ρ_o 的上界是

$$\begin{aligned}\rho_o^2 &\leq 10(\lambda_1\|\mathbf{u}_o\|_o^2+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1}|\mathbf{f}|_\infty^2)\\ &\exp(c\lambda^{-4}(\|\mathbf{u}_o\|_o^2+(\lambda\lambda_1)^{-2}|\mathbf{f}|_\infty^2)^2)\end{aligned} \tag{9.7.26}$$

对(9.7.21)进行极限过渡，可得

定理 9.7.3 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是 $\mathbf{C}^2$ 类的有界开集，并且存在常

数 $c>0$，使得 $\forall \mathbf{u}_o \in \mathbf{V}$ 和 $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ 满足

$$\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}_o|_1^2 + 2\lambda^{-3}\lambda_1^{-1/2}\int_o^T \|\mathbf{f}(t)\|_o^2 dt \leqslant (4c^{1/2})^{-1} \tag{9.7.27}$$

那么Navier – Stokes方程存在一个解 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0,T;D(A))$，且满足

$$\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}(t)|_1^2 + \lambda^{-1}\lambda_1^{-1/2}\int_o^T \|A\,\mathbf{u}(s)\|_o^2 ds \leqslant 2c^{-1/2},$$
$$\forall 0 \leqslant t \leqslant T \tag{9.7.28}$$

条件 (9.7.27) 说明，如果初值 $\mathbf{u}_o$ 和 $\mathbf{f}$ 很小，则 T 可以是任意的，或者 λ 很大，则定解数据和 T 可以是任意的，但是 $|\mathbf{u}_o|_1^2$ 与 $\lambda^2\lambda_1^{1/2}$ 比较必须是很小的.

下面，给出一个更为广泛的存在性条件:

定理 9.7.4 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 是一个 C^2 类有界开集，设 $\mathbf{u}_o \in \mathbf{V}, \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ 满足

$$(\lambda^{-3}\lambda_1^{-1/2}\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_o;\ \mathbf{H})} + \lambda\lambda_1 T_o)(1+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}_o|_1^2)^2$$
$$\leqslant (4(4+2c))^{-1} \tag{9.7.29}$$

那么Navier – Stokes方程

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o \end{cases}$$

存在一个解 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{L}^\infty(0,T_o;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0,T_o;D(A))$ 满足

$$\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}(t)|_1^2 \leqslant \sqrt{2}\,(1+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}_o|_1^2)$$
$$\forall 0 \leqslant t \leqslant T_o \tag{9.7.30}$$

证 在式(9.7.15)中略去 $\lambda\|A\,\mathbf{u}_m\|_o^2$，得

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m|_1^2 \leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_m|_1^6 \tag{9.7.31}$$

引入无量纲的量

$$\tilde{y}(t) = \lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}_m(t)|_1^2; \qquad \tilde{g}(t) = \lambda^{-4}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}(t)\|_o^2$$

则从(9.7.31)得

$$\frac{1}{\lambda\lambda_1}\frac{d\tilde{y}}{dt} \leqslant 2\tilde{g}(t) + c\tilde{y}^3(t)$$

设 $s = \lambda\lambda_1 t$（无量纲时间），$y(s) = \tilde{y}(t) = \tilde{y}(s/\lambda\lambda_1)$，$g(s) = \tilde{g}(s/\lambda\lambda_1)$，那么

$$\frac{dy}{dt} \leqslant 2g(s) + cy^3(s) \tag{9.7.32}$$

如果 $y(s_o)$ 是有限的，那么在 $s = s_o$ 邻域，$y(s)$ 是有限的，实际上式 (9.7.32) 两边除以 $(1+y)^3$，并且从 s_o 到 s 积分，得

$$(1+y(s_o))^{-2} - (1+y(s))^{-2} \leqslant 4\int_{s_o}^{s} g(\sigma)d\sigma + 2c(s-s_o)$$

令 $\quad E(s,s_o) = 2c(s-s_o) + 4\int_{s_o}^{s} g(\sigma)d\sigma$

则 $\quad (1+y(s)) \leqslant (1+y(s_o))(1-(1+y(s_o))^2E(s,s_o))^{-1/2}$

那么

$$y(s) \leqslant [1+y(s_o) - (1-(1+y(s_o))^2 \cdot E(s,s_o)][1-(1+y(s_o))^2E(s,s_o)]^{-1}$$

若令

$$(1+y(s_o))^2E(s,s_o) < 1$$

或 $4\int_{s_o}^{s} y(\sigma)d\sigma + 2c(s - s_o) \leqslant (2(1 + y(s_o))^{-2})$ (9.7.33)

那么可以得到 $y(s) \leqslant \sqrt{2}(y(s_o) + 1)$.

此即(9.7.30).证毕.

弱解：设 $\mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{H}) \subset \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$，它是由 $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ 中弱连续函数组成的，即 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{H})$，$(u(t),\mathbf{v})$ 对所有的 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ 都是连续函数．如果函数 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{H})$ 满足$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(0,T;\ \mathbf{V}')$以及

$$< \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} > + a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f},\mathbf{v} \rangle$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},\ a.e.\ \ \forall t \tag{9.7.34}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{9.7.35}$$

则称 $\mathbf{u}$ 为 Navier－Stokes 方程始边值问题 (9.7.34) 和 (9.7.35) 的弱解．

强解：如果函数

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty_{\text{loc}}(0,\mathbf{T};\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2_{\text{loc}}(0,T;\mathbf{D}(\mathbf{A})) \cap \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \cap \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}),$$

满足问题 (9.7.34) 和 (9.7.35)，则称 $\mathbf{u}$ 为 Navier－Stokes 方程始边值问题的强解．

定理 9.7.5 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是 $\mathbf{C}^2$ 类有界开集 .$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$，$\mathbf{u}_o \in \mathbf{H}$.如果(9.7.34)和(9.7.35)的两个解属于$\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{H})$，那么它们必重合.

证 设 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ 为 (9.7.34) 和 (9.7.35) 的解．记 $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$，那么 $\mathbf{w}$ 满足

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}+\lambda A\mathbf{w}+B(\mathbf{u}_1,\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{u}_2)=0 \tag{9.7.36}$$

$$\mathbf{w}(0)=0 \tag{9.7.37}$$

(9.7.36)两边和w作内积，得

$$<\frac{d\mathbf{w}}{dt},\mathbf{w}>+\lambda|\mathbf{w}|_1^2+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2,\mathbf{w})=0 \tag{9.7.38}$$

由于$\frac{du_i}{dt}(i=1,2)$，$\frac{d\mathbf{w}}{dt}$ 都属于 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$，故 (9.7.38) 对几乎所有的 t 都成立．利用估计式

$$|a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2,\mathbf{w})|\leqslant c|\mathbf{w}|_1|\mathbf{u}_2|_1\|\mathbf{w}\|_o$$

同时，$<\frac{d\mathbf{w}}{dt},\mathbf{w}>=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_o^2\in\mathbf{L}^1(0,T)$，故(9.7.38)给出

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_o^2\leqslant c\lambda^{-1}|\mathbf{u}_2|_1^2\|\mathbf{w}\|_o^2 \tag{9.7.39}$$

由Gronwall不等式，得

$$\|\mathbf{w}(t)\|_o^2\leqslant\|\mathbf{w}(0)\|_o^2\exp(c\lambda^{-1}\int_o^t|\mathbf{u}_2|_1^2ds)$$

由于$\|\mathbf{w}(0)\|_o=0$，从而$\mathbf{w}(t)=0$.证毕.

对于三维情况，弱解的唯一性尚不得而知，但已经知道，强解是唯一的．

定理 9.7.6 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是 C^2 类有界开集，$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ 和 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{V}$，那么式 (9.7.34) 和式 (9.7.35) 的任何属于 $\mathbf{L}^2(0,T;D(A))\cap\mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{V})$ 的两个解必重合．

证 证明过程和定理9.7.5类似，由估计式

$$|a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2,\mathbf{w})|\leqslant c\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}|\mathbf{w}|_1^{1/2}|\mathbf{u}_2|_1^{1/2}\|A\mathbf{u}_2\|_o^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}|\mathbf{w}|_1^{1/2}$$

以及式(9.7.38)(利用Young不等式)给出

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_o^2 \leqslant (\lambda^{-1}|\mathbf{u}_2|_1\|A\mathbf{u}_2\|_o\|\mathbf{w}\|_o^2) \tag{9.7.40}$$

由Gronwall不等式，有

$$\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{w}(0)\|_o^2\exp(\int_o^t c\lambda^{-1}|\mathbf{u}_2|_1\|A\mathbf{u}_2\|_o ds)$$

由于 $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathrm{V})\cap\mathbf{L}^2(0,T;D(A))$，因此上式积分项是有限的．由于 $\mathbf{w}(0)=0$，所以$\forall 0\leqslant t\leqslant T$，$\|\mathbf{w}(t)\|_o=0$. 证毕．

附注 如果利用另一种估计

$$|a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2,\mathbf{w})| \leqslant c\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}|\mathbf{w}|_1^{3/2}|\mathbf{u}_2|_1$$
$$\leqslant \lambda|\mathbf{w}|_1^2/2 + c\lambda^{-3}\|\mathbf{w}\|_o^2|\mathbf{u}_2|_1^4$$

则由(9.7.38)有

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 \leqslant c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_2|_1^4\|\mathbf{w}\|_o^2 \tag{9.7.41}$$

由Gronwall不等式得

$$\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{w}(0)\|_o^2\exp(\int_o^t c\lambda^{-3}|\mathbf{u}_2|_1^4 ds)$$

因此，如果$\mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}^4(0,T;\mathrm{V})$，则唯一性定理也可保证．

§9.8 吸引子

考察N－S方程算子形式

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f} & (9.8.1)\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o & (9.8.2)\end{cases}$$

我们已经知道$\forall \mathbf{u}_o \in \mathbf{H}$，总存在解 $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$

$\cap L^2(0,T;V)$.(9.8.1), (9.8.2) 定义了一个算子 $S(t)$: $H \to H$, 使得 $S(t)u_o = u(t)$. 容易证明 $S(t)$ 是一个半群.

定义 9.8.1　一个集合 $\sum \subset H$ 称为半群 $S(t)$ 的泛函不变集, 如果

$$S(t)\sum = \sum \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{9.8.3}$$

定义 9.8.2　一个集合 $\sum \subset H$ 称为半群 $S(t)$ 的吸引子, 如果 $\sum$ 满足下列性质

(1) $\sum$是一个泛函不变集;

(2) 存在 $\sum$ 的一个开邻域 U, 使得 $\forall u_o \in U$, 当 $t \to \infty$ 时, $S(t)u_o \to \sum$, 即

$$\mathrm{dist}(S(t)u_o, \textstyle\sum) \to 0, \text{ 当} t \to \infty \text{时} \tag{9.8.4}$$

这里 $\mathrm{dist}(x,\sum) = \inf\limits_{y\in\sum} d(x,y)$, $d(x,y)$ 是 H 中 x, y 的距离.

定义9.8.3　$\sum$一致吸引一个集合$B \subset U$, 如果

$$d(S(t)B, \textstyle\sum) \to 0, \text{ 当} t \to \infty \text{时} \tag{9.8.5}$$

其中　$d(B_o, B_1) = \sup\limits_{x\in B_o} \inf\limits_{y\in B_1} d(x,y)$

定义 9.8.4　如果 $\sum$ 是一个紧吸引子, 它吸引 H 中的任一有界集合, 那么称 $\sum$ 为半群 $S(t)$ 的全局吸引子.

定义 9.8.5　设 $\sum$ 是 H 的一个子集, U 是包含 $\sum$ 的一个开子集. 我们说 $\sum$ 是 U 中一个吸收集, 如果 U 中任一有界集 B 的轨迹在某一确定时刻之后进入 $\sum$, 即

$\forall B \subset U$, B为有界集, 存在$t_o(B)$, 使得

$$S(t)B \subset \textstyle\sum \quad \forall t \geqslant t_o(B) \tag{9.8.6}$$

当 $n = 2$, 即二维情形, 定理 9.7.2 和 9.7.5 告诉我们, 如

果 $\mathbf{f}\in\mathbf{H}$ 与 t 无关，$\mathbf{u}_o\in\mathbf{H}$，那么式 (9.8.1), (9.8.2) 存在唯一解

$$\mathbf{u}\in\mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{H})\cap\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\quad\forall T>0$$

并且 $\mathbf{u}$ 是 $t\to\mathbf{u}(t)\in D(A)$ 的解析函数，$S(t):\mathbf{u}_o\to\mathbf{u}(t)=S(t)\mathbf{u}_o$ 是 $\mathbf{H}\to D(A)$ 的连续映照 . 如果 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{V}$，那么

$$\mathbf{u}\in\mathbf{C}_w(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2(0,T;D(A))\quad\forall T>0$$

式 (9.8.1) 两边和 $\mathbf{u}$ 作 H 的内积，并利用 $a_1(\mathbf{u};\mathbf{u};\mathbf{u})=0$ 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_o^2+\lambda|\mathbf{u}|_1^2=(\mathbf{f},\mathbf{u})\leqslant\|\mathbf{f}\|_o\|\mathbf{u}\|_o \tag{9.8.7}$$

注意 λ_1 是 A 的最小特征值和 $(A\mathbf{u},\mathbf{u})=|\mathbf{u}|_1^2$，则

$$\|\mathbf{u}\|_o\leqslant\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}|_1\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}$$

故 $\|\mathbf{f}\|_o\|\mathbf{u}\|_o\leqslant\lambda_1^{-1/2}\|\mathbf{f}\|_o|\mathbf{u}|_1\leqslant\lambda|\mathbf{u}|_1^2/2+\|\mathbf{f}\|_o^2/2\lambda\lambda_1$

于是得

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_\rho^2+\lambda|\mathbf{u}|_1^2\leqslant\|\mathbf{f}\|_o^2/\lambda\lambda_1 \tag{9.8.8}$$

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_o^2+\lambda\lambda_1\|\mathbf{u}\|_o^2\leqslant\|\mathbf{f}\|_o^2/\lambda\lambda_1 \tag{9.8.9}$$

由经典的Gronwall不等式，有

$$\|\mathbf{u}(t)\|_o^2\leqslant\|\mathbf{u}(0)\|_o^2\exp(-\lambda\lambda_1 t)$$

$$+(\lambda\lambda_1)^{-2}\|\mathbf{f}\|_o^2(1-\exp(-\lambda\lambda_1 t)) \tag{9.8.10}$$

由此得

$$\limsup_{t\to\infty}\|\mathbf{u}(t)\|_o\leqslant\rho_o,\ \rho_o=\|\mathbf{f}\|_o/\lambda\lambda_1 \tag{9.8.11}$$

不等式 (9.8.10) 说明，若记 $\mathrm{B}(0,\rho)$ 为 H 中以 0 为中心，以 $\rho\leqslant\rho_o$ 为半径的球，则 $B(0,\rho)$ 是半群 $S(t)$ 的一个不变集，实际上

$$\|S(t)u_o\|_o^2 \leqslant \rho^2 \exp(-\lambda\lambda_1 t) + \rho_o^2(1-\exp(-\lambda\lambda_1 t)) \leqslant \rho^2.$$

并且当 $\rho > \rho_o$ 时，这些球是吸收集．实际上，若令 $B(0,R)$ 为半径为 R 的球，那么 H 中任一有界集 D 必包含在 $B(0,R)$ 内，因而由式 (9.8.10) 容易推出

$$S(t)D \subset B(0,\rho_o) \quad \forall t \geqslant t_o$$

$$t_o = (\lambda_1\lambda)^{-1}\log(R^2 / (\bar{\rho}_o^2 - \rho_o^2)),\ \bar{\rho}_o > \rho_o \tag{9.8.12}$$

另一方面，由(9.8.8)积分后得

$$\lambda\int_t^{t+r} |\mathbf{u}(s)|_1^2 ds \leqslant r(\lambda\lambda_1)^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_o^2 \quad \forall r > 0 \tag{9.8.13}$$

利用式(9.8.11)，有

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+r} |\mathbf{u}(s)|_1^2 ds \leqslant r\|\mathbf{f}\|_o^2 / \lambda_1\lambda^2 + \|\mathbf{f}\|_o^2 / \lambda_1^2\lambda^3 \tag{9.8.14}$$

如果 $\mathbf{u}_o \in D \subset B(0,R)$，$t \geqslant t_o$，那么

$$\int_t^{t+r} |\mathbf{u}(s)|_1^2 ds \leqslant r\|\mathbf{f}\|_o^2 / \lambda_1\lambda^2 + \bar{\rho}_o^2 / \lambda \tag{9.8.15}$$

现在考察 V 中的吸收集．为此，式 (9.8.1) 两边和 $A\mathbf{u}$ 作 H 内积，注意 $(\mathbf{u}', A\mathbf{u}) = (\mathrm{grad}\mathbf{u}', \mathrm{grad}\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|_1^2$，则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}\|_o^2 + a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},A\mathbf{u}) = (\mathbf{f},A\mathbf{u}) \tag{9.8.16}$$

但是

$$(\mathbf{f},A\mathbf{u}) \leqslant \|\mathbf{f}\|_o\|A\mathbf{u}\|_o \leqslant \lambda\|A\mathbf{u}\|_o^2 / 4 + \|\mathbf{f}\|_o^2 / \lambda$$

又由 $|a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{u},A\mathbf{u})| \leqslant c_1\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}|\mathbf{u}|_1\|A\mathbf{u}\|_o^{3/2}$ 以及 Young 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon a^p / p + b^q / q\varepsilon^{q/p},\ \forall a,b,\varepsilon > 0;\ 1 < p < \infty,$$

$q = p/(p-1)$，取 $p = 4/3$，$\varepsilon = \lambda/3$，$q = 4$，则

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},A\mathbf{u})| \leqslant \lambda\|A\mathbf{u}\|_o^2/4 + c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}\|_o^2|\mathbf{u}|_1^4$$

因而

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{u}\|_o^2 \leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + 2c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}\|_o^2|\mathbf{u}|_1^4 \quad (9.8.17)$$

由于

$$|\varphi|_1 \leqslant \lambda_1^{-1/2}\|A\varphi\|_o \quad \forall \varphi \in D(A) \quad (9.8.18)$$

从而有

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|_1^2 + \lambda\lambda_1|\mathbf{u}|_1^2 \leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2 + 2c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}\|_o^2|\mathbf{u}|_1^4 \quad (9.8.19)$$

为了得到 $|\mathbf{u}|_1$ 的估计，我们需要一致的 Gronwall 引理

引理 9.8.1 设 g，h，y 是 $(t_o, +\infty)$ 上局部可积函数，使得 y' 在 $(t_o, +\infty)$ 上也是局部可积，并且满足

$$\frac{dy}{dt} \leqslant gy + h \quad \forall t \geqslant t_o \quad (9.8.20)$$

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leqslant a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)ds \leqslant a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)ds \leqslant a_3, \quad \forall t \geqslant t_o \quad (9.8.21)$$

其中a_1，a_2，a_3，r是正常数，那么

$$y(t+r) \leqslant (a_3/r + a_2)\exp(a_1) \quad \forall t \geqslant t_o \quad (9.8.22)$$

证 设 $t_o \leqslant t \leqslant s \leqslant t+r$，且 $\exp(-\int_t^s g(\tau)d\tau)$ 乘 (9.8.20) 两边，得

$$\frac{d}{ds}\left(y(s)\exp\left(-\int_t^s g(\tau)d\tau\right)\right) \leqslant h(s)\exp\left(-\int_t^s g(\tau)d\tau\right) \leqslant h(s)$$

再从s到$t+r$积分，得

$$y(t+r) \leqslant y(s)\exp\left(\int_s^{t+r} g(\tau)d\tau\right)$$

$$+\left(\int_s^{t+r} h(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_s^{t+r} g(\tau)d\tau\right)$$

$$\leqslant (y(s)+a_2)\exp(a_1)$$

上式关于 s 从 t 到 $t+r$ 积分后可得 (9.8.22). 证毕.

现在回到式(9.8.19), 取

$$g = 2c\lambda^{-3}\|\mathbf{u}\|_o^2|\mathbf{u}|_1^4,\ h = 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o^2,\ y = |\mathbf{u}|_1^2$$

再利用式(9.8.10)和(9.8.15), 可得

$$a_1 = 2c\lambda^{-3}\rho_o^{-2}a_3,\ a_2 = 2\lambda^{-1}\|f\|_o^2,\ a_3 = r\lambda^{-2}\lambda_1^{-1} + \lambda^{-1}\rho_o^2 \tag{9.8.23}$$

由式(9.8.19)和(9.8.22)得

$$|\mathbf{u}(t)|_1^2 \leqslant (a_3/r + a_2)\exp(a_1),\ \forall t \geqslant t_o + r$$

其中 t_o 由(9.8.12)确定.

固定 r, 令 $\rho_1^2 = (a_3/r + a_2)\exp(a_1)$. 以 $B_v(0,\rho_1)$ 表示 V 中以原点为中心, 以 ρ_1 为半径的球. 那么容易验证, $B_v(0,\rho_1)$ 是关于半群 $S(t)$ 在 V 中的吸收集. 进而设 $D \subset$ H 为任一有界集, 那么 $S(t)D \subset B_v(0,\rho_1)$, 对任何 $t \geqslant t_o + r$ 成立, 这表明在 V 中存在吸收集 $B_v(0,\rho_1)$. 而半群 $S(t)$ 对于大的 t 是一致紧的, 即对任何有界集 D 存在 t_o, 使得 $\bigcup_{t \geqslant t_o} s(t)D$ 在 H 中是相对紧的.

定理 9.8.1 设 H 是一个度量空间, $S(t)$ 是 $\mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 的连续半群, 并且 $S(t)$ 对大的 t 是一致紧. 另外设 U 为一开集, B 为 U 的有界集, 使得 B 是 U 中的吸收集, 那么

$$\omega(B)=\bigcap_{s>0}\bigcup_{t\geq s}S(t)B$$

是一个紧吸引子，它吸引 U 中的有界集，而且是 U 中最大吸引子.

如果 H 是 Banach 空间，U 是凸的连续集，那么 $\omega(B)$ 也是连通的.

证 首先，证

引理 9.8.2 设 $B\subset\mathrm{H}$，$B\neq\Phi$ 且 $\forall t_0>0$，集合 $\bigcup\limits_{t\geq t_0}S(t)B$ 在 H 中相对紧，那么 $\omega(B)$ 是非空、紧和不变的.

证 由于 B 非空、集合 $\bigcup\limits_{t\geq s}S(t)B$ 对任何 $s\geq0$ 是非空的，从而 $\bigcup\limits_{t\geq s}S(t)B$ 是非空紧集. 当 S 下降时，它是增序列，它们的交集等于 $\omega(B)$，而且 $\omega(B)$ 是非空紧集. 因为 $\varphi\in\omega(B)$ 当且仅当存在一个序列 $\{\varphi_n\}\subset B$，使得当 $t_n\to+\infty$ 时，有

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi,\ n\to+\infty \tag{9.8.24}$$

从而容易验证 $\forall t>0$，$S(t)\omega(B)=\omega(B)$. 如果 $\psi\in S(t)\omega(B)$，那么 $\psi=S(t)\varphi$，$\psi\in\omega(B)$，利用半群性质及连续性，有

$$S(t)S(t_n)\varphi_n=S(t+t_n)\varphi_n\to S(t)\varphi=\psi$$

从而 $\psi\in\omega(B)$，所以 $\omega(B)$ 是一个不变集，证毕.

现在回到定理 9.8.1 的证明，由引理 9.8.2 可知 $\omega(B)$ 是非空，紧的不变集. 现在证明 $\omega(B)$ 是 V 中的吸引子和吸引 U 中的有界集，用反证法，设 D 为 U 的有界集，当 $t\to+\infty$ 时，$\mathrm{dist}(S(t)D,\omega(B))$ 不趋于零，则存在 $\delta>0$ 和序列 $t_n\to\infty$，使得

$$\mathrm{dist}(S(t_n)D,\ \omega(B))\geq\delta>0\qquad\forall n$$

对每个n，存在$b_n \in D$满足

$$\mathrm{dist}(S(t_n)b_n,\ \omega(B)) \geqslant \delta/2 > 0 \tag{9.8.25}$$

由于 B 是吸收集，只要 n 充分大，$S(t_n)D$，$S(t_n)b_n$ 均属于 B. 序列 $\{S(t_n)b_n\}$ 是相对紧，故至少存在一个子聚点 b，使得

$$b = \lim_{m\to\infty} S(t_m)b_m = \lim_{m\to\infty} S(t_m - t_1)S(t_1)b_m$$

由于$S(t_1)b_m \in B$. $b \in \omega(B)$，这与(9.8.25)相矛盾.

为了证明 $\omega(B)$ 是最大吸引子，设 $E \subset \omega(B)$ 是一个大的有界吸引子，那么因为只要 t 充分大，$S(t)E = E \subset B$（B 是吸收集），所以 $E \subset B$，从而 $\omega(E) = E \subset \omega(B)$.

$\omega(B)$ 的连通性是由于如果 U 是开的，凸的连通紧，$\omega(B)$ 是紧的不变集，是吸引紧集．所以 $\omega(B)$ 是连通的（见 Temam[25]). 证毕．

由定理9.8.1和以前的讨论，可得

定理 9.8.2 二维 Navier-Stokes 方程，如具有齐次 Dirichlet 边界条件或周期边界条件，那么它对应的半群算子有吸引子，这个吸引子在 H 中是紧的，单连通的和最大的吸引 H 中任一有界集，它同样也是 H 中最大的有界泛函不变集．

在以后的讨论中，Grashof数

$$G = \|\mathbf{f}\|_0 / \lambda^2 \lambda_1$$

是很重要的，由它可以定义Reynolds数$R_e = G^{1/2}$.

三维 N-S 方程只能证明在一个确定的区间 $[0,T_0]$ 内存在强解，而且 $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant T_0} |\mathbf{u}(s)|_1$ 是有界的．因而我们尚不能证明吸引子的存在．另一方面，当 $T > T_0$ 时，在 $[0,T]$ 内存在弱解，在 $[0,T_0]$ 内，强解与弱解相等．现在设 $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{V}, \mathbf{f} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H})$

以及 Reynolds 数 λ^{-1} 固定．令强解存在的最大时间区间为 $[0,T^*]$，$T^* = \max\{T>0$，N－S 方程 (9.8.1)，(9.8.2) 的解存在且 $\mathbf{u}\in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})\cap \mathbf{L}^2(0,T;D(A))\}$．由于强解的唯一性，如果 $T^* < \infty$，那么 $\lim\limits_{t\to T^*}|\mathbf{u}(t)|_1 = \infty$．$\sup\limits_{t\leqslant T_o}|\mathbf{u}(t)|_1 < +\infty \quad \forall T_o < T^*$．实际上，如果 $\lim\limits_{t\to T^*}\sup\|\mathbf{u}(t)\|_1 < \infty$，由此对于充分靠近 T^* 的 t，有 $|\mathbf{u}(t)|_1 \leqslant c$，这里 c 是一个适当的常数，由局部存在性定理，我们可以求 $\mathbf{v}(s)$，使得它满足式 (9.8.1) 和 $\mathbf{v}(0)=\mathbf{u}(t_o)\in \mathbf{V}$，那么 $\mathbf{v}(s)$ 是式 (9.8.1) 在 $[0,T_o]$ 上定义的强解．T_o 是与 $\|\mathbf{f}\|_o$，$|\mathbf{v}(0)|_1 = |\mathbf{u}(t_o)|_1$ 有关的数，也就是可以选择 T^* 邻域的一个 t_o，使 $t_o\to T^*$ 时 $|\mathbf{u}(t_o)|_1$ 上有界．如果 $T^* - t_o < T_o$，我们得到强解 $\tilde{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{u}(s+t_o)$，$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$，对 $t < T^*$ 成立．这就是说，可以越过 T^* 延拓 $\mathbf{u}(t)$，(因为可以选取 t_o，$T_o + t_o > T^*$)，但这与 T^* 的定义矛盾．这就是说，强解损失光滑性的必要条件是 $|\cdot|_1$ 变成无穷大．

有一个有趣的结果，如果三维 Navier－Stokes 方程 (9.8.1)，(9.8.2) 的解 $|\mathbf{u}(t)|_1^2$ 在无限大时间内变为无穷大，那么存在另外的解 $\hat{\mathbf{u}}$，它在有限时间内，使 $|\hat{\mathbf{u}}(t)|_1$ 变成无限大．

定理 9.8.3 设 $\Omega\subset \mathbf{R}^3$ 是 $\mathbf{C}^2$ 类区域，$\mathbf{u}(t)$ 是三维 Navier－Stokes 方程的解．设 $\mathbf{f}\in \mathbf{H}$ 与时间无关．如对任意的 $T>0$，$\mathbf{u}(t)$ 是 $[0,T]$ 上的强解，$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o\in \mathbf{V}$，$\mathbf{u}\in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})\cap \mathbf{L}^2(0,T;D(A))$，而且 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup|\mathbf{u}(t)|_1 = +\infty$．那么对任何 $T_1>0$，存在 $\mathbf{v}_o$

$\in V$，使得 N－S 方程初值问题 $\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_o$ 的解 $\mathbf{v}$ 在 $0<T_1<+\infty$ 以前爆炸，即 $\mathbf{v}$ 在 $[0,T_1]$ 上不是强解．

证　首先应用 (9.7.9). 令 $t_j\to\infty$，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}|\mathbf{u}(t_j)|_1=\infty$，由式 (9.7.9) 可以求出 $a_j\in[t_j-r_1,\ t_j]$，使得

$$|\mathbf{u}(a_j)|_1^2\leqslant k_1T_1^{-1}+k_2=k$$

这里 k_1，k_2 是两个相应的常数，它们与 j 无关，由此可以选取 $\mathbf{u}(a_j)$ 的一个子序列在 V 中弱收敛于 $\mathbf{v}_o\in V$，在 H 中强收敛于 $\mathbf{v}_o$，设 $\mathbf{v}_j(s)=\mathbf{u}_j(a_j+s)$，而 $v(s)$ 为

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}+\lambda A\mathbf{v}+B(\mathbf{v},\mathbf{v})=\mathbf{f}\\ \mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_o\end{cases}$$

的解，由解的局部存在性定理知 $\mathbf{v}(s)$ 是 $[0,T_o]$ 上的强解，$T_o=T_o(|\mathbf{v}_o|_1)$，即 T_o 依赖于 $|\mathbf{v}_o|_1$

现在我们证明 $\mathbf{v}$ 不可能是 $[0,T_1]$ 上的强解．实际上，如果不然，$\mathbf{v}$ 是一个强解，作 $\mathbf{w}_j(s)=\mathbf{v}_j(s)-\mathbf{v}(s)$，有

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{w}_j}{dt}+\lambda A\mathbf{w}_j+B(\mathbf{w}_j,\mathbf{v})+B(\mathbf{v},\mathbf{w}_j)+B(\mathbf{w}_j,\mathbf{w}_j)=0\\ \mathbf{w}_j(0)=\mathbf{v}_j(0)-\mathbf{v}_o\end{cases}$$

与 $\mathbf{w}_j$ 作 H 内积后，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_j(t)\|_o^2+\lambda|\mathbf{w}_j(t)|_1^2&\leqslant c|\mathbf{v}|_1|\mathbf{w}_j|_1^{3/2}|\mathbf{w}_j|_o^{1/2}\\&\leqslant\lambda|\mathbf{w}_j|_1^2+c|\mathbf{v}|_1^4\|\mathbf{w}_j\|_o^2/\lambda^3\end{aligned}$$

这里用了

$$|a_1(\varphi;\psi,\theta)|\leqslant c|\varphi|_1|\psi|_1\|\theta\|_o^{1/2}|\theta|_1^{1/2}\quad\forall\varphi,\psi,\theta\in V$$

从而有

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_j(t)\|_o^2+\lambda|\mathbf{w}_j(t)|_1^2\leqslant c\lambda^{-3}|\mathbf{v}|_1^4\|\mathbf{w}_j\|_o^2 \tag{9.8.26}$$

常数 c 在不同地方代表不同的意义．去掉 $\lambda|\mathbf{w}_j(t)|_1^2$ 这一项后，应用 Gronwall 不等式，有

$$\|\mathbf{w}_j(t)\|_o^2\leqslant\|\mathbf{w}_j(0)\|_o^2\exp\left(\int_o^t c\lambda^{-3}|\mathbf{v}|_1^4ds\right)$$

由假设，$\int_o^{T_1}|\mathbf{v}(s)|_1^4ds$ 是有限的，$\mathbf{v}_j(0)\to\mathbf{v}_o$ 在 H 中强收敛．故对所有的 $t\in[0,T_1]$，$\mathbf{w}_j(t)$ 在 H 中收敛于零，即$\forall t\in[0,T_1]$，$\lim\limits_{j\to\infty}\mathbf{w}_j(t)=0$.同样，由于

$$\|\mathbf{w}_j(t)\|_o^2+\lambda\int_o^t|\mathbf{w}_j(s)|_1^2ds\leqslant c\lambda^{-3}\int_o^t|\mathbf{v}(t)|_1^4\|\mathbf{w}_j(s)\|_o^2ds$$

有
$$\lim_{j\to\infty}\int_o^{T_1}|\mathbf{w}_j(s)|_1^2ds=0$$

由此对几乎所有的 $s\in[0,T_1]$，有 $|\mathbf{w}_j(s)|_1\to0$. 另一方面，$|\mathbf{v}_j(t)|_1\leqslant|\mathbf{w}_j(t)|_1+|\mathbf{v}(t)|_1\leqslant|\mathbf{w}_j(t)|_1+\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T_1;\,V)}=|\mathbf{w}_j(t)|_1+r$ 任取 $t\in[0,T_1]$，使得 $|\mathbf{w}_j(t)|_1\leqslant1$，那么 $|\mathbf{v}_j(t)|_1\leqslant1+r$，由局部存在性定理 9.7.4 知，存在一个时间区间 $[t,t+T_2]$，这里 T_2 依赖于 γ，$\|\mathbf{f}\|_o$，λ，λ_1，但与 t 无关，使得

$$|\mathbf{v}_j(s)|_1^2\leqslant\sqrt{2}(1+|\mathbf{v}_j(t)|_1^2)\leqslant\sqrt{2}(1+c(1+r)^2)\quad\forall s\in[t,t+\sqrt{2}]$$

设

$$I=\{t\in[0,T_1]:\ \text{使得}\lim_{j\to\infty}|\mathbf{w}_j(t)|_1=0\}$$

显然，存在有限多个 $t_i\in I$ $(i=1,2,\cdots,m)$，使得 $[T_o,T_1]$

$\subset \bigcup_{i=1}^{m}[t_i, t_i+T_2]$，$T_2$ 由定理 9.7.5 定义，所以存在 $j_o \geqslant 1$，使得 $\forall t \in [0,T_1]$，$j \geqslant j_o$，$|\mathbf{v}_j(t)|_1 \leqslant c$. 但是由于

$$|\mathbf{v}_j(t_j - a_j)|_1 = |\mathbf{u}(t_j)|_1 \to +\infty$$

所以 $|\mathbf{v}_j(t)|_1 \leqslant c$ 是不可能的，这说明 v 不是 $[0,T_1]$ 上的强解，证毕.

这个定理说明，对于三维情形，我们必须研究解的光滑性和奇异性问题.

§9.9 解的正则性和奇异性

限于考察周期性边界条件情形，首先，引用如下引理[5]

引理9.9.1 设u,v是两个有限和

$$\mathbf{u} = \sum_{k \in z^n} \mathbf{u}_k \exp(2\pi i / L < x, \mathbf{k} >)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k \in z^n} \mathbf{v}_k \exp(2\pi i / L < x, \mathbf{k} >)$$

它们满足 $\mathbf{u}_o = 0$，$\mathbf{v}_o = 0$，$\bar{u}_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}$，$\bar{\mathbf{v}}_k = \mathbf{v}_{-\mathbf{k}}$

$$\langle \mathbf{u}_k,\ \mathbf{k} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{v}_k,\ \mathbf{k} \rangle = 0$$

设 $s > n/2$ 是一个实数，那么成立：

$$\|A^{s/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v})\|_o \leqslant cL^{s-n/2}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o \|A^{(s+1)/2}\mathbf{v}\|_o \quad \forall s > n/2 \tag{9.9.1}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},A^{s/2}\mathbf{v})| \leqslant cL^{s-1-n/2}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o \|A^{s/2}\mathbf{v}\|_o^2 \quad s > n/2+1 \tag{9.9.2}$$

$$\|A^{s/2}B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},A^{s/2}\mathbf{v})\|_o \leqslant c\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o \|A^{s/2}\mathbf{v}\|_o$$

$$s > n/2+1 \tag{9.9.3}$$

现在我们来讨论强解的光滑性问题．设 $n=3$，f 与 t 无关，L 为周期，λ 固定，设 u 是 $[0,T]$ 上的强解

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^{2}(0,T;D(A))$$

于是有如下结果

定理 9.9.1 设 $s>3/2$，$n=3$，$\mathbf{u}_o \in D(A^{s/2})$，$\mathbf{f} \in D(A^{s-1/2})$，$\mathbf{u}(t)$ 是 (9.8.1)，(9.8.2) 的强解，$\mathbf{u}(t) \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^{2}(0,T;D(A))$，那么

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;D(A^{s/2})) \cap \mathbf{L}^{2}(0,T;D(A^{\frac{s+1}{2}}))$$

证 由引理 9.9.1，$s>n/2$，故可用 $A^{s}\mathbf{u}$ 和 (9.8.1) 作 H 内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2 + \lambda\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2 = (\mathbf{f},A^{s}\mathbf{u} - a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},A^{s}\mathbf{u})) \tag{9.9.4}$$

由于式(9.9.1)

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},A^{s}\mathbf{u}) &= (B(\mathbf{u},\mathbf{u}),\ A^{s}\mathbf{u}) = (A^{s/2}B(\mathbf{u},\mathbf{u}),A^{s/2}\mathbf{u}) \\ &\leqslant \|A^{s/2}B(\mathbf{u},\mathbf{u})\|_o\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o \\ &\leqslant cL^{s-3/2}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o \\ &\leqslant \frac{c}{\lambda}(L^{2s-3}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^4) + \frac{\lambda}{4}\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{f},A^{s}\mathbf{u}) &= (A^{\frac{s-1}{2}}f,A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}) \leqslant \|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o^2 + \frac{\lambda}{4}\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2 \end{aligned}$$

代人式(9.9.4)之后，得

$$\frac{d}{dt}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2+\lambda\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2$$

$$\leqslant\frac{2c}{\lambda}(L^{2s-3}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^4)+\frac{2}{\lambda}\|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o^2 \qquad (9.9.5)$$

先略去$\lambda\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o$,

$$\frac{d}{dt}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2\leqslant\frac{2c}{\lambda}L^{2s-3}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2+\frac{2}{\lambda}\|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o^2$$

利用Gronwall不等式得

$$\|A^{s/2}\mathbf{u}(t)\|_o^2\leqslant\|A^{s/2}\mathbf{u}_o\|_o^2\exp(\frac{2c}{\lambda}L^{2s-3}\int_o^t\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2ds)$$
$$+\frac{2}{\lambda}\int_o^t\|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o^2ds\cdot\exp(\frac{2c}{\lambda}L^{2s-3}\int_o^t\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2ds)$$

由此推出如果 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{s/2}))$, 则 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;D(A^{s/2}))$. 如果对 (9.9.5) 两边积分，则可以得到

$$\lambda\int_o^t\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}(s)\|_o^2ds\leqslant\|A^{s/2}\mathbf{u}_o\|_o^2+\int_o^t\frac{2}{\lambda}\|A^{\frac{s-1}{2}}\mathbf{f}\|_o^2ds$$
$$+\frac{2\varepsilon}{\lambda}L^{2s-3}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\ D(A^{s/2}))}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\ D(A^{s/2}))}$$

所以$\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{\frac{s+1}{2}}))$.因此，我们有

只要 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{s/2}))$, 则

$$\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{\frac{s+1}{2}}))\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;D(A^{s/2})) \qquad (9.9.6)$$

如果 $3/2<s<2$, 则

$$\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A))\cap\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{s/2}))$$

从这里可以推出，如果对 $s\in[3/2,2]$,u 是带有基础数据 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{s/2}))$, $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;D(A^{\frac{s-1}{2}}))$ 的强解，那么 u

$\in L^\infty(0,T;D(A^{s/2}))\bigcap L^2(0,T;D(A^{\frac{s+1}{2}}))$，如果 $s\in(2,5/2]$，令 $s'=s-1/2\in(3/2,2]$. 因而强解 $u\in L^2(0,T;D(A^{\frac{s'+1}{2}}))$. 由于 $\frac{s'+1}{2}=\frac{s}{2}+\frac{1}{4}>\frac{s}{2}$，从(9.9.6)推出 $u\in L^\infty(0,T;D(A^{s/2}))\bigcap L^2(0,T;D(A^{\frac{s+1}{2}}))$，$s\in(2,5/2]$，依次类推，便可得定理结论．证毕

定理 9.9.2 设 $n=3$，$s>3/2$，$f\in D(A^{\frac{s-1}{2}})$，$u_o\in D(A^{s/2})$ 那么 N－S 方程始值问题的弱解 $u\in L^\infty(0,T;H)\bigcap L^2(0,T;V)$（周期边界条件）属于

$$L^\infty(0,T;D(A^{s/2}))\bigcap L^2(0,T;D(A^{s/2}))$$

其充分必要条件是 $u\in L^4(0,T;D(A^{1/2}))$

证 当 $s>3/2$ 时，显然

$L^\infty(0,T;D(A^{s/2}))\bigcap L^2(0,T;D(A^{s/2}))\subset L^4(0,T;D(A^{1/2}))$

反之，如果 $u\in L^4(0,T;D(A^{1/2}))$，利用(9.8.17)

$$\frac{d}{dt}|u|_1^2+\lambda\|Au\|_o^2\leqslant 2\lambda^{-1}\|f\|_o^2+c\lambda^{-3}|u|_1^4\|u\|_o^2$$

去掉 $\lambda\|Au\|_o^2$ 后应用Gronwall引理

$$|u(t)|_1^2\leqslant|u_o|_1^2\exp\left(\int_o^t c\lambda^{-3}|u|_1^4ds\right)$$
$$+2\lambda^{-1}\int_o^t\|f\|_o^2ds\exp\left(\int_o^t c\lambda^{-3}|u|_1^4ds\right)\qquad(9.9.7)$$

另一方面，

$$|u(t)|_1^2+\int_o^t\lambda\|Au\|_o^2ds\leqslant|u_o|_1^2+2\lambda^{-1}\int_o^t\|f\|_o^2ds$$

$$+c\lambda^{-3}\int_0^t |\mathbf{u}|_1^4 ds(\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\ H)})^2$$

从而

$$\lambda\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;\ D(A))} \leqslant |\mathbf{u}_o|_1^2 + 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\ H)}$$

$$+ c\lambda^{-3}(\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\ H)})^2\|\mathbf{u}\|^4_{L^4(0,T;\ V)} \qquad (9.9.8)$$

由于$\mathbf{u}\in L^4(0,T;\mathrm{V})=\mathrm{L}^4(0,T;D(A^{1/2}))$, (9.9.7)和(9.9.8)告诉我们

$$\mathbf{u}\in \mathrm{L}^\infty(0,T;D(A^{1/2}))\bigcap \mathrm{L}^2(0,T;D(A))$$

所以u是强解，由定理9.9.1，则有

$$\mathbf{u}\in \mathrm{L}^\infty(0,T;D(A^{s/2}))\bigcap \mathrm{L}^2(0,T;D(A^{\frac{(s+1)}{2}}))$$

证毕.

到目前为止，尚不知什么时候强解损失正则性，但是我们看到强解损失正则性，只有在$|\mathbf{u}(t)|_1$变成无穷时才发生，由于弱解$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\ V)}<+\infty$，所以弱解的奇异时间集合的测度是零，更加准确地讲弱解的奇异时间集合有不大于1/2的Hausdorff维数.

设M是一个度量空间的紧子集，M之d维Hausdorff测度定义为

$$\mu_H^d(M)=\lim_{r\to 0}\mu_{H,r}^d(M) \qquad (9.9.9)$$

其中

$$\mu_{H,r}^d(M)=\inf\{\sum_{i=1}^k r_i^d,\ M\subset\bigcup_{i=1}^k B_i,\ B_i\text{ 是半径为 } r_i<r$$

度量空间中之开球}

M之Hausdorff维数定义为

$$d_H(M)=\inf\{d>0,\ \mu_H^d(M)=0\} \qquad (9.9.10)$$

现在，我们来考察弱解的奇异时间集合．为简单起见，令 $\mathbf{u}_o\in\mathbf{V}$, $\mathbf{f}\in\mathbf{H}$, $\mathbf{u}(t)$ 是抽象的 N－S 方程的弱解，则由解的局部存在唯一定理 9.7.5 知 $\mathbf{u}|_{[t_o,t_o+T_o]}$ 是正则解，即

$$\mathbf{u}\in\mathbf{L}^{\infty}(t_o,t_o+T_o,\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2(t_o,t_o+T_o,\ D(A))$$

T_o 是依赖于 $|\mathbf{u}(t_o)|_1$ 的常数，它由式 (9.7.28) 所决定

$$\lambda\lambda_1T_o(1+\lambda^{-4}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^2)\geqslant c(1+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}(t_o)|_1^2)^{-2} \qquad (9.9.11)$$

对于每个 t_o, $|\mathbf{u}(t_o)|_1$ 是有限的，$I\subset[0,T]$ 是 $\mathbf{u}$ 在 I 上正则的最大区域，即 $I\subset[0,T]$, $t_o\in I$, 对任何 $J\subset I$, $\mathbf{u}|_J\subset\mathbf{L}^{\infty}(J,\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2(I,D(A))$: I 的右端点必须是开的（只要右端点不是 T)，显然，最多存在可数个不同类型的这类区间 I_j

$$\text{meas}([0,T]\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}I_i)=0$$

这是由 $\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(0,T;\ V)}<+\infty$, $|\mathbf{u}(t_o)|_1<\infty$ 对几乎所有的 t_o 成立．

设 I 是 I_j 中之一，由 (9.9.11) 推出，$\forall t_o\in I$,

$$\lambda\lambda_1(b-t_o)(1+\lambda^{-4}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^2)\geqslant c(1+\lambda^{-2}\lambda^{-1/2}|\mathbf{u}(t_o)|_1^2)^{-2}$$

这里b是I的最小上界.从而得

$$(b-t_o)^{-1/2}\leqslant(1+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}|\mathbf{u}(t_o)|_1^2)(\lambda\lambda_1)^{1/2}$$
$$(1+\lambda^{-4}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^2)^{1/2} \qquad (9.9.12)$$

对上式在I上积分，得

$$2|I_j|^{1/2}\leqslant k(|I_j|+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}\int_{I_j}|\mathbf{u}(t_o)|_1^2dt_o)$$

对于j求和后

$$\sum_j |I_j|^{1/2} \leqslant k(T+\lambda^{-2}\lambda_1^{-1/2}\int_o^T |\mathbf{u}(t_o)|_1^2 dt_o) < +\infty \qquad (9.9.13)$$

令

$$(a_j, b_j) \subset I_j \subset (a_j, b_j)$$

显然，a_j，b_j是奇异时间，特别$|\mathbf{u}(b_j)|_1 = +\infty$或

$$\lim_{t\to b_j} |\mathbf{u}(t)|_1 = +\infty$$

于是我们有下列定理：

定理 9.9.3　设 $\mathbf{u}$ 是 $[0,T]$ 上三维抽象 N－S 方程的弱解．那么存在一个集合 E，它是闭的，1／2 维的 Hausdorff 测度是零，在 E 之外，$\mathbf{u}$ 是正则的，即

$$\mathbf{u}|_{[0,T]\setminus E} \in \mathbf{L}^{\infty}_{\text{loc}}((0,T)\setminus E, \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2_{\text{loc}}((0,T)\setminus E; \mathrm{D}(\mathrm{A}))$$

证　$E=[0,T]\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^o$，$I_j$ 是上面所讨论的正则最大区间，I^o 表示 I 之内部．让我们来计算 E 的 1／2 维 Hausdorff 测度，这里度量空间是 $\mathbf{R}$，令 m 是正整数．

$$E_m = [0,T]\setminus\bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

那么$E_m \supset E$，显然E_m也可以表示为

$$E_m = \bigcup_{j=1}^{x_m} K_j^{(m)}，\text{区间}K_j^{(m)}\text{是闭的，互不连接.}$$

因为$\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ 的 Lebesque 测度是 T，从而有 $K_j^{(m)}$ 中任一个测度不大于接触它的 I_j 之测度，然而区间 $I_j(j \geqslant m+1)$ 接触到 $K_l^{(m)}$．因此

$$N_l^{(m)} = \{j \geqslant m+1,\ I_j \cap K_l^{(m)} \neq \theta\} = \{j \geqslant m+1,\ I_j \subset K_l^{(m)}\}$$

是相互分离的，用$|F|$来记F之Lebesque测度，那么

$$|K_l^{(m)}| \leqslant \sum_{j \in N_l^{(m)}} |I_j|$$

如此
$$|K_l^{(m)}| \leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} |I_j| = \varepsilon_n$$

$$|K_l^{(m)}|^{1/2} \leqslant \sum_{j \in N_l^{(m)}} |I_j|^{1/2}$$

那么

$$\sum_{l=1}^{k_m} |K_l^{(m)}|^{1/2} \leqslant \sum_{j \geqslant m+1} |I_j|^{1/2} \to 0 \ (m \to \infty)$$

由于$\bigcup_{l=1}^{k_m} K_l^{(m)}$覆盖$E$，它是由区间半径$\leqslant \varepsilon_m / 2$组成的．这就证明了

$$\mu_{H, \varepsilon_m/2}^{1/2}(E) \leqslant \delta_m = \sum_{j=m+1}^{\infty} |I_j|^{1/2}$$

由(9.9.13)，$\delta_m \to 0$，故$\mu_H^{1/2}(E) = 0$.证毕.

§9.10．关于粘性消失问题

考察

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f} & (9.10.1) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o & (9.10.2) \end{cases}$$

设边界条件是周期性条件，$n = 2,3$，f与t无关，设

$$\mathbf{f} \in D(A^{s/2}),\ \mathbf{u}_o \in D(A^{s/2}),\ s > 1 + n/2$$

用$A^s\mathbf{u}$和式(9.10.1)作H内积，利用引理9.9.1，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^2+\lambda\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2$$

$$\leqslant\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o\|A^{s/2}\mathbf{f}\|_o+cL^{s-1-n/2}\|A^{s/2}\mathbf{u}\|_o^3 \tag{9.10.3}$$

定义如下的尺度不变量

$$\tau=\lambda L^{-2}t \tag{9.10.4}$$

$$y(\tau)=\lambda^{-1}L^{s-n/2-1}\|\mathbf{A}^{s/2}\mathbf{u}(L^2\tau\lambda^{-1})\|_o \tag{9.10.5}$$

$$g=\lambda^{-2}L^{s-n/2+3}\|A^{s/2}\mathbf{f}\|_o \tag{9.10.6}$$

对式(9.10.3)乘$L^{2s-n+4}\lambda^{-3}$，得

$$\frac{d}{d\tau}y(\tau)\leqslant g+cy(\tau)^2 \tag{9.10.7}$$

这里略去了 $\lambda\|A^{\frac{s+1}{2}}\mathbf{u}\|_o^2\lambda^{-3}L^{2s-n+4}$ 并且两边除以$\sqrt{y}$ 才得到 (9.10.7)，由 (9.10.7) 得

$$\frac{dy}{d\tau}/(g+cy^2)\leqslant 1 \tag{9.10.8}$$

在$(0,\tau)$上积分得

$$\arctan\sqrt{\frac{c}{g}}y(\tau)-\arctan\sqrt{\frac{c}{g}}y(0)\leqslant\sqrt{cg}\,\tau$$

如果

$$\sqrt{cg}\,\tau+\arctan\sqrt{\frac{c}{g}}y(0)\leqslant\pi/2 \tag{9.10.9}$$

那么

$$\sqrt{\frac{c}{g}}y(\tau)\leqslant\tan(\sqrt{cg}\,\tau+\arctan\sqrt{\frac{c}{g}}y(0))$$

利用熟悉的三角公式

$$\sqrt{\frac{c}{g}}\,y(\tau)\leqslant\frac{\tan(\sqrt{cy}\,\tau)+\sqrt{\frac{c}{g}}\,y(0)}{1-\tan(\sqrt{cg}\,\tau)\sqrt{\frac{c}{g}}\,y(0)} \tag{9.10.10}$$

如果$g=0$，从式(9.10.8)得

$$y(\tau)\leqslant\frac{y(0)}{1-c\tau y(0)} \tag{9.10.11}$$

我们得：$g=0$ 并且如果

$$\tau y(0)c\leqslant 1/2 \tag{9.10.12}$$

得

$$y(\tau)\leqslant 2y(0) \tag{9.10.13}$$

这就意味着，如果$f=0$，并且t足够小：

$$CL^{-n/2-1}\|A^{s/2}\mathbf{u}_o\|_o t\leqslant\frac{1}{2} \tag{9.10.14}$$

那么

$$\|A^{s/2}\mathbf{u}(t)\|_o\leqslant 2\|A^{s/2}\mathbf{u}(0)\|_o \tag{9.10.15}$$

条件(9.10.14)与粘性无关，如果 $g\neq 0$，可以找到 $\varepsilon>0$，使得

$$cy(0)\tau\leqslant 1/2 \tag{9.10.16}$$

$$\sqrt{cg}\,\tau\leqslant\varepsilon \tag{9.10.17}$$

那么

$$y(\tau)\leqslant 2(2\tau g+y(0)) \tag{9.10.18}$$

由(9.10.18)可得

$$\|A^{s/2}\mathbf{u}(t)\|_o\leqslant 4t\|A^{s/2}\mathbf{f}\|_o+2\|A^{s/2}\mathbf{u}_o\|_o \tag{9.10.19}$$

只要t充分小

$$t\leqslant\min\{\frac{1}{4c}\|A^{s/2}\mathbf{u}_o\|_o^{-1}L^{1+n/2-3};\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}}\|A^{s/2}\mathbf{f}\|_o^{-1}L^{\frac{1}{2}+\frac{n}{4}-\frac{s}{2}}\} \tag{9.10.20}$$

如此，我们可以得到如下定理

定理 9.10.1 设 $\mathbf{f}\in D(A^{s/2})$, $\mathbf{u}_o\in D(A^{s/2})$, $s>1+n/2$, $n=2,3$, 边界条件是以 L 为周期的周期性边界条件, 那么存在 $T>0$, T 由式 (9.10.20) 右边所定义的, 使得对任何 $\lambda>0$, 对应式 (9.10.1), (9.10.2) 的解 $\mathbf{u}_\lambda$ 满足 (9.10.19).

还有, 如果 $s>3+n/2$, 那么当 $\lambda\to 0$ 使 $\mathbf{u}_\lambda$ 在 $\mathbf{L}^\infty(0,T;D(A^{r/2}))$ 中收敛于欧拉方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}+B(\mathbf{v},\mathbf{v})=\mathbf{f} & (9.10.21)\\ \mathbf{v}(0)=\mathbf{u}_o & (9.10.22)\end{cases}$$

的解v, 这里$1+n/2r\leqslant s-2$

证 只须证明定理的后半部, 在 (9.10.1), (9.10.2) 中取 $\mathbf{u}_\lambda$ 和 $\mathbf{u}_\mu$ 且设 $\lambda>\mu$, 令 $\omega=\mathbf{u}_\lambda-\mathbf{u}_\mu$ 于是有

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{w}}{dt}+\lambda A\mathbf{w}+B(\mathbf{w},\mathbf{u}_\mu)+B(\mathbf{u}_\mu,\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{w})=(\mu-\lambda)A\mathbf{u}_\mu\\ \mathbf{w}(0)=0\end{cases}$$

和$A^{r/2}\mathbf{w}$做内积, 利用引理9.9.1得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o^2\leqslant k\{&\|A^{\frac{r+1}{2}}\mathbf{u}_\mu\|_o\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o^2\\ &+\|A^{r/2}\mathbf{u}_\mu\|_o\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o^2+\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o^3\}\\ &+(\mu-\lambda)\|A^{r/2+1}\mathbf{u}_\mu\|_o\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_\infty\end{aligned}$$

由于$r+2\leqslant s$, 利用式 (9.10.19) 可以得到 $\|A^{r/2+1}\mathbf{u}_\mu\|_o$, $\|A^{r/2}\mathbf{u}_\mu\|_o$, $\|A^{r/2+1/2}\mathbf{u}_\mu\|_o$ 在 $[0,T]$ 上的一致界. 在上式两边除 $\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o$, 令 $y=\|A^{r/2}\mathbf{w}\|_o$ 得

$$\frac{dy}{dt}\leqslant k(y+y^2+\lambda)$$

令$z = ye^{-kt}$则有

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} \leqslant Mz^2 + M\lambda \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{9.10.23}$$

这是一个和式(9.10.7)同样类型的不等式，如果

$$\lambda \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M^2 T^2} \tag{9.10.24}$$

从式(9.10.18)可以推出

$$z(t) \leqslant 4TM\lambda, \ t \in [0,T] \tag{9.10.25}$$

由式(9.10.25)推出

$$\|A^{r/2}(\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_\mu)(t)\|_o \leqslant (4TMe^{kT})\lambda \tag{9.10.26}$$

$$\forall t \leqslant T, \ \lambda \leqslant \varepsilon^2/(M^2T^2), \ \mu < \lambda$$

估计式 (9.10.26) 允许我们对式 (9.10.1) 进行极限过渡，即可得到所需结论。证毕。

§ 9.11 非齐次Dirichlet边界条件问题

在定常 N－S 方程情形，讨论了非齐次 Dirichlet 边界条件

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \varphi, \ \varphi\text{与}t\text{无关}$$

那么对任何 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Phi \in \mathbf{H}^2(\Omega)^n$，$\mathrm{div}\Phi = 0$，$\int_\Gamma \Phi \cdot \mathbf{n} ds = 0$，且

$$|a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\Phi)|_1^2 \leqslant \varepsilon |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_o \tag{9.11.1}$$

令 $\mathbf{u} + \Phi$为N－S方程的解，则$\mathbf{u}$满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + (\Phi \cdot \text{grad})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\Phi - \lambda\Delta\mathbf{u} \\
+ \text{grad} p = \mathbf{f} + \lambda\Delta\Phi - (\Phi \cdot \text{grad})\Phi & (9.11.2) \\
\text{div}\mathbf{u} = 0 & (9.11.3) \\
\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 & (9.11.4) \\
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o
\end{cases}
$$

它的变分形式是

$$
\begin{cases}
\text{求}\mathbf{u} \in \mathbf{V},\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o \text{使得} \\
\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_o(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{u},\mathbf{v}) \\
+ a_1(\Phi;\ \mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\ \Phi,\mathbf{v}) \\
= \langle \mathbf{F},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}
\end{cases} \qquad (9.11.5)
$$

它的算子形式

$$
\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + R\mathbf{u} = \mathbf{F},\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o \qquad (9.11.6)
$$

其中

$$
\langle R\mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = a_1(\Phi;\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u};\Phi,\mathbf{v}) \qquad (9.11.7)
$$

或者，R: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$

$$
\mathbf{R}\mathbf{u} = B(\mathbf{u},\Phi) + B(\Phi,\mathbf{u}) \qquad (9.11.8)
$$

而

$$
\langle \mathbf{F},\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f},\mathbf{v} \rangle + a_o(\Phi,\mathbf{v}) - a_1(\Phi;\Phi,\mathbf{v}) \qquad (9.11.9)
$$

它的算子形式$\mathbf{F} \in \mathbf{V}'$

$$
\mathbf{F} = \mathbf{f} + \lambda A\Phi - B(\Phi,\Phi) \qquad (9.11.10)
$$

先建立一个抽象的结果:

定理 9.11.1　设 $\mathbf{u}_o \in \mathbf{H}$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$, $a(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ 是对称正定的连续的双线性形式

$$
a(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \alpha \|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \qquad (9.11.11)
$$

对应的线性算子记A：$\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$，记$D(A)=\{\mathbf{u}\in\mathbf{V},\ A\mathbf{u}\in\mathbf{H}\}$有

$$D(A)\subset\mathbf{V}\subset\mathbf{H}\subset\mathbf{V}'$$

线性算子 R：$\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$，它也是 $D(A)\to\mathbf{H}$ 的线性映照使得存在 θ_1，$\theta_2\in[0,1]$和常数 c_1，$c_2>0$，满足

$$\|R\mathbf{u}\|_o\leqslant c_1\|\mathbf{u}\|^{1-\theta_1}|A\mathbf{u}|^{\theta_1}\quad\forall\mathbf{u}\in D(A)\tag{9.11.12}$$

$$|(R\mathbf{u},\mathbf{u})|\leqslant c_2\|\mathbf{u}\|^{1+\theta_2}|\mathbf{u}|^{1-\theta_2}\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}\tag{9.11.13}$$

同时也有

$$a(\mathbf{u},\mathbf{u})+(R\mathbf{u},\mathbf{u})\geqslant\beta\|\mathbf{u}\|^2\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V},\ \beta>0\tag{9.11.14}$$

而双线性连续算子 $B(\cdot,\cdot)$：$\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$ 和 $D(A)\times D(A)\to\mathbf{H}$ 使得

$$(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{v})=0\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\tag{9.11.15}$$

$$|(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w})|\leqslant c_3|\mathbf{u}|^{\theta_3}\|\mathbf{u}\|^{1-\theta_3}\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|^{\theta_3}|\mathbf{w}|^{1-\theta_3}\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}\tag{9.11.16}$$

$$|B(\mathbf{u},\mathbf{v})|+|B(\mathbf{v},\mathbf{u})|\leqslant c_4\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|^{1-\theta_4}|A\mathbf{v}|^{\theta_4}\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V},\ \forall\mathbf{v}\in D(A)\tag{9.11.17}$$

$$|B(\mathbf{u},\mathbf{v})|\leqslant c_5|\mathbf{u}|^{\theta_5}\|\mathbf{u}\|^{1-\theta_5}\|\mathbf{v}\|^{1-\theta_5}|A\mathbf{v}|^{\theta_5}\quad\forall\mathbf{u}\in\mathbf{V},\ \mathbf{v}\in D(A)\tag{9.11.18}$$

其中 c_3，c_4，c_5 为正常数，$\theta_i\in[0,1]$，$i=3,4,5$. $\|\cdot\|$ 记 $\mathbf{V}$ 之范数，$|\cdot|$ 记 $\mathbf{H}$ 之范数，$((\cdot,\cdot))$ 记 $\mathbf{V}$ 之内积，$(\cdot,\cdot)$ 记 $\mathbf{H}$ 之内积.

那么$\mathbf{H}$中非线性发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})+R\mathbf{u}=\mathbf{f} & (9.11.19)\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o & (9.11.20)\end{cases}$$

存在唯一解$\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}\in C([0,T];\ H)\cap L^2(0,T;V)\quad \forall T>0 \tag{9.11.21}$$

并且$\mathbf{u}$是在$D(A)$中关于$t>0$的解析函数，映照$\mathbf{u}_o\to\mathbf{u}(t)=S(t)\mathbf{u}_o$是H到$D(A)$, $\forall t>0$的连续映照.

如果$\mathbf{u}_o\in V$, 那么解$\mathbf{u}$满足

$$\mathbf{u}\in C([0,T];V)\cap L^2(0,T;D(A)),\ \forall T>0 \tag{9.11.22}$$

证　证明方法类似于齐次边界条件情形 N－S 方程弱解与强解存在性的证明，作为练习留给读者。

关于非线性发展方程 (9.11.19), (9.11.20), 同样存在 **H** 中和 **V** 中的吸收集，即

定理 9.11.2　设定理 9.11.1 假设成立，则动力系统 (9.11.19) 具有一个吸引子 $\sum$, 它在 **H** 中是紧的，单连通和极大的，$\sum$ 吸引 **H** 中的有界集，它也是 **H** 中最大的有界的泛函不变集。

证　先对 (9.11.19) 两边和 $\mathbf{u}$ 做内积，由于 (9.11.15) 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2+a(\mathbf{u},\mathbf{u})+(R\mathbf{u},\mathbf{u})=(\mathbf{f},\mathbf{u}) \tag{9.11.23}$$

存在c_6使得

$$|\mathbf{u}|\leqslant c_6\|\mathbf{u}\|,\ \forall\mathbf{u}\in V;\ \|\mathbf{u}\|\leqslant c_6|A\mathbf{u}|,\ \forall\mathbf{u}\in D(A) \tag{9.11.24}$$

利用(9.11.14)和

$$(\mathbf{f},\mathbf{u})\leqslant|\mathbf{f}||\mathbf{u}|\leqslant c_6|\mathbf{f}|\|\mathbf{u}\|\leqslant\frac{\beta}{2}\|\mathbf{u}\|^2+\frac{c_6}{2\beta}|\mathbf{f}|^2$$

得

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2+\beta\|\mathbf{u}^2\|\leqslant\frac{c_6}{\beta}|\mathbf{f}|^2 \tag{9.11.25}$$

这个不等式与 (9.8.8) 相类似，因此可以用 §9.8 中同样方法，

证明存在一个有界集 D，它吸收 H 的有界集.

为了证明 V 中吸收集的存在性，则利用 $A\mathbf{u}$ 与 (9.11.19) 作 H 内积，利用

$$(A\mathbf{u},\frac{d\mathbf{u}}{dt})=a(\mathbf{u},\frac{d\mathbf{u}}{dt})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\mathbf{u},\mathbf{u})$$

得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\mathbf{u},\mathbf{u})+|A\mathbf{u}|^2=(\mathbf{f},A\mathbf{u})-(B(\mathbf{u},\mathbf{u}),\ A\mathbf{u})-(R\mathbf{u},\ A\mathbf{u})$$

因为

$$(\mathbf{f},A\mathbf{u})\leqslant|\mathbf{f}||A\mathbf{u}|\leqslant\frac{1}{b}|A\mathbf{u}|^2+|\mathbf{f}|^{3/2}$$

再利用 (9.11.12) 和 (9.11.18) 和 Young 不等式 $ab\leqslant\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{q}\varepsilon^{\frac{-q}{p}}b^q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，得

$$|(R\mathbf{u},A\mathbf{u})|\leqslant|R\mathbf{u}||A\mathbf{u}|\leqslant c_1\|\mathbf{u}\|^{1-\theta_1}|A\mathbf{u}|^{1+\theta_1}\leqslant\frac{1}{b}|A\mathbf{u}|^2+c_2\|\mathbf{u}\|^2$$

$$|(B(u,\mathbf{u}),A\mathbf{u})|\leqslant c_5|\mathbf{u}|^{\theta_5}\|\mathbf{u}\|^{2-2\theta_5}|A\mathbf{u}|^{1+\theta_5}$$

$$\leqslant\frac{1}{b}|A\mathbf{u}|^2+c_1\|\mathbf{u}\|^4|\mathbf{u}|^{2\theta}5/(1-\theta_5)$$

因而

$$\frac{d}{dt}a(u,\mathbf{u})+|A\mathbf{u}|^2\leqslant2|\mathbf{f}|^2+2c_3\|\mathbf{u}\|^2+c_1\|\mathbf{u}\|^4|\mathbf{u}|^{2\theta_5/(1-\theta_5)}$$

对右端第二项再利用 Young 不等式，分别归并到第一项和第三项后，则所得的不等式与 (9.8.17) 相类似，故同样可以证明吸收集的存在. 证毕.

现在我们回到非齐次 Dirichlet 边界条件情形，由

于 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 可以取如下估计（对 $n=2$）

$$
|a_1(\mathbf{u};\ \mathbf{v},\mathbf{w})| \leqslant c\begin{cases}
\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_2^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o, \\
\qquad \forall \mathbf{u}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^2,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^2(\Omega)^2\quad \forall \mathbf{w}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^2 \\
\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_2^{1/2}\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_o, \\
\qquad \forall \mathbf{u}\in \mathbf{H}^2(\Omega)^2,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^2 \mathbf{w}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^2 \\
\|\mathbf{u}\|_o\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}\|\mathbf{w}\|_2^{1/2} \\
\qquad \forall \mathbf{u}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^2,\ \mathbf{v}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^2,\ \mathbf{w}\in \mathbf{H}^2(\Omega)^2 \\
\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}\|\mathbf{w}\|_1^{1/2} \\
\qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in \mathbf{H}^1(\Omega)^2
\end{cases} \tag{9.11.26}
$$

现在我们来验证定理 9.11.1 的假设是否对 (9.11.6) 满足，为此，从 (9.11.1) 和 (9.11.7) 可知，(9.11.14) 得到满足．而 (9.11.15) 自然满足，另外

$$
\begin{aligned}
|(R\mathbf{u},\mathbf{w})| &= |a_1(\mathbf{u};\Phi,\mathbf{w})+a_1(\Phi;\mathbf{u},\mathbf{w})| \quad (\text{利用}9.11.26) \\
&\leqslant c\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\Phi\|_1^{1/2}\|\Phi\|_2^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o \\
&\quad + c\|\Phi\|_o^{1/2}\|\Phi\|_1^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{u}\|_2^{1/2}\|\mathbf{w}\|_o
\end{aligned}
$$

即
$$
\begin{aligned}
\|R\mathbf{u}\|_o &\leqslant c\|\Phi\|_1^{1/2}\|\Phi\|_2^{1/2}\|\mathbf{u}\|_o^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2} \\
&\quad + c\|\Phi\|_o^{1/2}\|\Phi\|_1^{1/2}\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{u}\|_2^{1/2}
\end{aligned}
$$

因为 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 在 $\mathbf{V}$ 中等价；$|A\mathbf{u}|$ 在 $D(A)$ 中与 $\|\mathbf{u}\|_2$ 等价，故 (9.11.12) 得到满足，只要取 $\theta_1=1/2$.

利用 $a_1(\Phi;\mathbf{u},\mathbf{u})=0$，则从 (9.11.26) 最后一个不等式有 $|(R\mathbf{u},\mathbf{u})|\leqslant c\|\mathbf{u}\|_o\|\mathbf{u}\|_1\|\Phi\|_1$，故取 $\theta_2=0$ 便可知 (9.11.13) 得到满足。

(9.11.16) 中取 $\theta_3=1/2$，则可以从 (9.11.26) 的最后不等式得到；

(9.11.17) 中取 $\theta_4=1/2$，则可以从 (9.11.26) 的前两个不等式得到；

(9.11.18) 中取 $\theta_5=1/2$，则恰是 (9.11.26) 中最后一个不等式。

到此，我们全部验证了，对于 (9.11.6)，定理 9.11.1 的所有条件都满足 ($n=2$)，所以解的存在唯一及吸引子的存在，均有定理 9.11.1 和 9.11.2 保证。

至于 $n=3$ 情形，则同样必须研究解的正则性问题和奇异性问题。

§ 9.12 Navier-Stokes方程解的渐近行为

N-S 方程的渐近行为 ($t\to+\infty$)，在不同的 Reynolds 数下，是大不一样的。在 § 9.10，§ 9.11 中，我们知道，在大 Reynolds 数下，解的渐近行为表现在一个吸引子结构上 ($n=2$)，而在小 Reynolds 数之下，发展的 N-S 方程的解的渐近行为表现在趋于定常解的结构上。同时，我们还要知道，是否可找到一个节点集 $E_N=\{x^\Delta,\ \Delta=1,2,\cdots,N\}$，当 $t\to\infty$ 时，$\mathbf{u}(x^\Delta,t)\to\xi^\Delta$，$\{\xi^\Delta\}$ 在多大程度上能描述解的渐近行为？例如，如果 $\lim\limits_{t\to\infty}(\mathbf{u}(x^\Delta,t)-\mathbf{v}(x^\Delta,t))=0$，其中 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 均是 N-S 方程的解，那么是否能推出 $\lim\limits_{t\to\infty}(u(x,t)-\mathbf{v}(x,t))=0$? 尤其是，设 $\mathbf{u}_\infty$ 是 N-S 方程唯一定常解，那么 $\lim\limits_{t\to\infty}(\mathbf{u}(x^\Delta,t)-\mathbf{u}_\infty(x^\Delta))=0$，$\Delta$

$=1,2,\cdots,N$, 是否会有$\lim\limits_{t\to\alpha}(\mathbf{u}(x,t)-\mathbf{u}_{\infty}(x))=0$, a.e. $\forall x\in\Omega$?

为了描述节点集 E_N 的“密度”，我们需要引入下面的量来衡量，即

$$d_N(x)=\min_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|x-x^{\Delta}|\quad\forall x\in\Omega \tag{9.12.1}$$

它描述了 Ω 中任一个点 x 到节点集 E_N 的最小距离；而

$$d_N=\max_{x\in\Omega}d_N(x) \tag{9.12.2}$$

则是 E_N 在 Ω 中的密度分布，例如，设 $d_N\leqslant\varepsilon$, 这就说明，Ω 中的任一个点 x, 至少存在 E_N 中的一个点 x^6, 使得 x 落在以 x^6 为中心，以 ε 为半径的球内，换句话说，以 $\{x^{\Delta},\Delta=1,2,\cdots,N\}$ 为中心，以 ε 为半径的 N 个球覆盖了 Ω。

我们已经知道，如果 Re 很小，那么定常解是唯一的；否则，可能出很多个定常解。我们要问，如果定常解不唯一，那么要多少个节点能够唯一刻画一个定常解？为回答这个问题，先建立几个引理。

引理9.12.1 $\forall\mathbf{w}\in D(A)$, 成立

$$\|\mathbf{w}\|_{o,\infty}\leqslant\max_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|\mathbf{w}(x^{\Delta})|+cd_N^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o \tag{9.12.3}$$

$$\|\mathbf{w}\|_o\leqslant c'\max_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|\mathbf{w}(x^{\Delta})|+cd_N^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o \tag{9.12.4}$$

$$\|\mathbf{w}\|_1\leqslant c'\max_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|\mathbf{w}(x^{\Delta})|d_N^{-1/4}+cd_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o \tag{9.12.5}$$

证 设 $n=2$ 或 3, 那么 $\mathbf{H}^2(\Omega)\subset\mathbf{C}^{0,1/2}(\Omega)$(Hoelder 连续函数空间，指数是 1/2) 是连续嵌入，同时 $D(A)\subset(\mathbf{H}^2(\Omega))^n$, $\|A\cdot\|_o$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价的，所以存在常数 c 使得

$$|\mathbf{w}(x)-\mathbf{w}(y)|\leqslant c|x-y|^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o \quad \forall x,y\in\Omega,\ \forall \mathbf{w}\in D(A)$$

尤其

$$|\mathbf{w}(x)|\leqslant|\mathbf{w}(x^{\Delta})|+c|x-x^{\Delta}|^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o \tag{9.12.6}$$

对任何 $x\in\Omega$，存在 x^j 使得 $|x-x^j|\leqslant d_N$， 因而由 (9.2.6) 推出式 (9.12.3). 记

$$\eta(\mathbf{w})=\max_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|\mathbf{w}(x^{\Delta})|$$

那么由式(9.12.6)得

$$|\mathbf{w}(x)|^2\leqslant 2(\eta(\mathbf{w}))^2+2cd_N^2\|A\mathbf{w}\|_o^2$$

上式两边积分后，就可以得到式(9.12.4)。

利用插入不等式

$$\|\varphi\|_1\leqslant c\|\varphi\|_o^{1/2}\|\varphi\|_2^{1/2} \quad \forall\varphi\in\mathbf{H}^2(\Omega)$$

所以

$$\|\mathbf{w}\|_1\leqslant c\|\mathbf{w}\|_o^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o^{1/2} \quad \forall\mathbf{w}\in D(A)$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}\|_1^2 &\leqslant c(\|\mathbf{w}\|_o\|A\mathbf{w}\|_o)\leqslant c(\eta(\mathbf{w})+cd_N^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o)\|A\mathbf{w}\|_o\\
&\leqslant c(\eta(\mathbf{w})\|A\mathbf{w}\|_o+cd_N^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o^2)\\
&\leqslant c(d_N^{-1/2}\eta^2/4+2d_N^{-1/4}(\eta/2)d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o\\
&\quad+d_N^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_o^2)\\
&=c(\eta d_N^{-1/4}/2+d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o)^2
\end{aligned}$$

即 $\quad \|\mathbf{w}\|_1\leqslant c(\eta d_N^{-1/4}+d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o)$

这就是式(9.12.5).证毕.

另外， 注意式 (9.3.31), (9.3.32) 或 (9.3.37), (9.3.38), 那么

$$\|B(\varphi,\psi)\|_o \leqslant c\begin{cases}\|A\varphi\|_o\|\psi\|_1 \\ \|\varphi\|_1\|A\psi\|_o\end{cases} \quad \forall\varphi,\psi\in D(A)$$

定理 9.12.1 设 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 为 N－S 方程的两个定常解

$$\lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathbf{f} \tag{9.12.7}$$

$$\lambda A\mathbf{v} + B(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \mathbf{f} \tag{9.12.8}$$

使得 $\mathbf{u}(x^{\Delta}) = \mathbf{v}(x^{\Delta}) \quad \Delta = 1,2,\cdots,N$ (9.12.9)

那么，如果 d_N 是够小，即

$$d_N < \alpha(\|\mathbf{f}\|_o,\lambda,\Omega) \equiv c(\lambda^{-2}\|\mathbf{f}\|_o + \lambda^{-6}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^3)^{-4} \tag{9.12.10}$$

其中常数 α 仅与 $\|\mathbf{f}\|_o$，λ，Ω 有关，则有 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$。

证 设 $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$，那么由式 (9.12.7)，(9.12.8) 和 (9.12.6) 有

$$\lambda A\mathbf{w} + B(\mathbf{u},\mathbf{w}) + B(\mathbf{w},\mathbf{v}) = 0$$

$$\lambda\|A\mathbf{w}\|_o \leqslant \|B(\mathbf{u},\mathbf{w})\|_o + \|B(\mathbf{w},\mathbf{v})\|_o$$

$$\leqslant c\|\mathbf{w}\|_1(\|A\mathbf{u}\|_o + \|A\mathbf{v}\|_o) \tag{9.12.11}$$

因为

$$\eta = \max_{1\leqslant\Delta\leqslant N}|\mathbf{w}(x^{\Delta})| = 0$$

故从式(9.12.5)得

$$\|\mathbf{w}\|_1 \leqslant c d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o \tag{9.12.12}$$

将式(9.12.12)代入(9.12.11)得

$$(\lambda - d_N^{1/4}(\|A\mathbf{u}\|_o + \|A\mathbf{v}\|_o))\|A\mathbf{w}\|_o \leqslant 0 \tag{9.12.13}$$

毫无疑问，如果

$$\lambda - c(\|A\mathbf{u}\|_o + \|A\mathbf{v}\|_o)d_N^{1/4} > 0 \tag{9.12.14}$$

则从式(9.12.13)推出 $\|A\mathbf{w}\|_o = 0$，因而 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

根据式 (9.3.44)，分别取 $s_3 = 0$，$s_1 = 1$ 或 $s_3 = 0$，$s_2 = 0$，$s_1 = 2$，并利用

$$\lambda\|A\mathbf{u}\|_o \leqslant \|\mathbf{f}\|_o + \|B(\mathbf{u},\mathbf{u})\|_o \leqslant \|\mathbf{f}\|_o + c\|\mathbf{u}\|_1^{3/2}\|A\mathbf{u}\|_o^{1/2}$$

应用Young不等式，得

$$\lambda\|A\mathbf{u}\|_o \leqslant \|\mathbf{f}\|_o + \lambda\|A\mathbf{u}\|_o/2 + c^2\|\mathbf{u}\|_1^3/2\lambda$$

然而，$\mathbf{u}$ 是N－S方程的解，故 $\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant \lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_{V'}$
$\leqslant \lambda^{-1}\lambda_1^{-1/2}\|\mathbf{f}\|_o$，从而

$$\|A\mathbf{u}\|_o \leqslant 2\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o + \lambda^{-5}\lambda_1^{-3/2}c^2\|\mathbf{f}\|_o^3 \tag{9.12.15}$$

对于 $\|A\mathbf{v}\|_o$ 有同样的估计。所以如果

$$cd_N^{1/4}(4\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_o + 2c^2\lambda^{-5}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^3) < \lambda \tag{9.12.16}$$

那么式(9.12.14)自然得到满足，式(9.12.16)也可表示为

$$d_N \leqslant c(\lambda^{-2}\|\mathbf{f}\|_o + \lambda^{-6}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^3)^{-4} \equiv \alpha$$

所以，只要式(9.12.10)得到满足，那么由式(9.12.9)可以推出 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$. 证毕.

现在，我们研究，在怎样情况下，非定常的Navier－Stokes方程的解 $\mathbf{u}(t)$，当 $t\to\infty$ 趋于定常解 $\mathbf{u}_\infty$

定理9.12.2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，具有Lipschitz边界，考察齐次Dirichlet边值条件或周期性边值条件，$\forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}$ 与 t 无关，$\mathbf{u}_o\in\mathbf{H}$，如果

$$c(\lambda_1^{-3/4}\lambda^{-17/8}\|\mathbf{f}\|_o + \lambda_1^{-9/4}\lambda^{-49/8}\|\mathbf{f}\|_o^2)^{4/3} < 1 \tag{9.12.17}$$

成立，则定常的Navier－Stokes方程的解是唯一的，记为 $\mathbf{u}_\infty$，而非定常的Navier－Stokes方程的解 $\mathbf{u}(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\infty \quad 在\mathbf{H}内 \tag{9.12.18}$$

证 设 $\mathbf{w}(t)=\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_\infty$，那么

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}+\lambda A\mathbf{w}+B(\mathbf{w},\mathbf{u})-B(\mathbf{u}_{\infty},\mathbf{w})=0$$

与 w 作 H 内积，并且利用 (9.2.24) 和 (9.3.17) 可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}+\lambda|\mathbf{w}(t)|_{1}^{2}+a_{1}(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{w})-a_{1}(\mathbf{u}_{\infty};\ \mathbf{w},\mathbf{w})=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}+\lambda|\mathbf{w}(t)|_{1}^{2}=-a_{1}(\mathbf{w}(t);\mathbf{u}_{\infty},\mathbf{w}(t))$$

$$\leqslant c\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{3/2}|\mathbf{w}(t)|_{1}^{1/2}\|Au_{\infty}\|_{o}$$

利用 Young 不等式右端小于

$$\lambda|\mathbf{w}(t)|_{1}^{2}/2+c\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}\|A\mathbf{u}_{\infty}\|_{o}^{4/3}\lambda^{-1/3}$$

从而得到

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}+\lambda|\mathbf{w}(t)|_{1}^{2}\leqslant c\lambda^{-1/3}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}\|Au_{\infty}\|_{o}^{4/3}\qquad(9.12.19)$$

注意$\lambda_{1}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}\leqslant|\mathbf{w}(t)|_{1}^{2}$，那么

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}+(\lambda\lambda_{1}-c\lambda^{-1/3}\|A\mathbf{u}_{\infty}\|_{o}^{4/3})\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}\leqslant0\quad(9.12.20)$$

如果

$$\mu=\lambda\lambda_{1}-c\lambda^{-1/3}\|A\mathbf{u}\|_{o}^{4/3}>0\qquad(9.12.21)$$

那么 $\|\mathbf{w}(t)\|_{o}^{2}\leqslant\|\mathbf{w}(0)\|_{o}^{2}e^{-\mu t}$. 这里 $\mathbf{w}(0)=\mathbf{u}_{o}-\mathbf{u}_{\infty}$，当 $t\to\infty$ 时，有 $\|\mathbf{w}(t)\|_{o}\to0$，因此

$\mathbf{u}(t)\to\mathbf{u}_{\infty}$，$t\to\infty$，在 H 内成立的充分条件是式 (9.12.21)，把式 (9.12.15) 代入式 (9.12.21) 得

$$c(\lambda_{1}^{-3/4}\lambda^{-17/8}\|\mathbf{f}\|_{o}+\lambda_{1}^{-9/4}\lambda^{-49/8}\|\mathbf{f}\|_{o}^{2})^{4/3}<1$$

设 N－S 方程存在另外一个定常解 $\mathbf{u}_{\infty}^{*}$，令 $\mathbf{w}^{*}=\mathbf{u}^{\infty}-\mathbf{u}_{\infty}^{*}$. 和上面推导一样，可以得到式 (9.12.20)，由于 (9.12.21) 有

$$\mu\|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_\infty^*\|_o \leqslant 0 \tag{9.12.22}$$

由于$\mu > 0$, 可得$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty^*$, 证毕.

我们定义线性连续算子$E:D(A)\to \mathbf{H}$

$$(E\varphi,\psi) = \lambda(A\varphi,\psi) + a_1(\varphi;\mathbf{u}_\infty,\psi) + a_1(\mathbf{u}_\infty;\varphi,\psi) \quad \forall\varphi,\psi\in D(A) \tag{9.12.23}$$

E的对偶算子E^*: $D(A)\to \mathbf{H}$

$$(E^*\varphi,\psi) = \lambda(A\varphi,\psi) + a_1(\psi;\mathbf{u}_\infty,\varphi) + a_1(\mathbf{u}_\infty;\psi,\varphi) \quad \forall\varphi,\psi\in D(A) \tag{9.12.24}$$

定理 9.12.3 如果对称算子$(E+E^*)/2$所有的特征值大于零，那么对应的 N－S 方程定常解$\mathbf{u}_\infty$是唯一的，而非定常解$\mathbf{u}(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\infty \tag{9.12.25}$$

证 同样令$\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty$, 那么

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \lambda A\mathbf{w} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) - B(\mathbf{u}_\infty,\mathbf{u}_\infty) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + E\mathbf{w} + B(\mathbf{w},\mathbf{w}) = 0$$

所以，和$\mathbf{w}$作$\mathbf{H}$内积后得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 + (E\mathbf{w},\mathbf{w}) = 0$$

同样容易证

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 + (E^*\mathbf{w},\mathbf{w}) = 0$$

故 $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_o^2 + ((E+E^*)\mathbf{w}/2,\mathbf{w}) = 0$$

由于 $(E+E^{*})/2$ 所有特征值均为正的，$0<\mu_1<\mu_2,\cdots$，那么

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_o^2+\mu_1\|\mathbf{w}(t)\|_o^2<0$$

$$\|\mathbf{w}(t)\|_o^2\leqslant\|\mathbf{w}(0)\|_o^2\exp(-2\mu_1 t)$$

因为 $\mathbf{w}(0)=\mathbf{u}_o-\mathbf{u}_\infty$，所以 $\lim\limits_{t\to 0}\|\mathbf{w}(t)\|_o=0$，唯一性证明与定理 9.12.2 相同，证毕．

定理 9.12.4 设 Navier－Stokes 方程存在强解 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(0,\infty;D(A)),\mathbf{u}'\in\mathbf{L}^2(0,\infty,\mathbf{H})$

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f}(t)\quad\forall\mathbf{f}\in\mathbf{L}^\infty(0,\infty;\ \mathbf{H}) & (9.12.26)\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_o & (9.12.27)\end{cases}$$

它满足

$$\sup_{t\geqslant 0}|\mathbf{u}(t)|_1\leqslant\alpha_1,\ \sup_{t\geqslant\varepsilon}\|A\mathbf{u}\|_o\leqslant\alpha_2 \tag{9.12.28}$$

另外，设 $\mathbf{f}_\infty\in\mathbf{H}$,使得

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_\infty\|_o=0 \tag{9.12.29}$$

在节点集 E_N 上，只要有

$$d_N<\beta \tag{9.12.30}$$

解 $\mathbf{u}(t)$ 具有性质

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{u}(x^j,t)=\xi^j\quad j=1,2,\cdots,N \tag{9.12.31}$$

那么定常的N－S方程

$$\lambda A\mathbf{u}+B(\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathbf{f}_\infty \tag{9.12.32}$$

存在唯一解 $\mathbf{u}_\infty$，并且

$$\mathbf{u}_\infty(x^j)=\xi^j \tag{9.12.33}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_\infty\|_1=0,\ \lim_{t\to\infty}\sup|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_\infty|=0 \quad (9.12.34)$$

证 先建立一类能量不等式，设 t'; t 满足 $0<t<t'$, $t'=t+s$.

设$\mathbf{v}(t)=\mathbf{u}(t+s)$, $\mathbf{g}(t)=\mathbf{f}(t+s)$, 那么

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\lambda A\mathbf{v}+B(\mathbf{v},\mathbf{v})=\mathbf{g}(t) \quad (9.12.35)$$

设$\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$, 那么

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}+\lambda A\mathbf{w}+B(\mathbf{u},\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{v})=\mathbf{f}-\mathbf{g} \quad (9.12.36)$$

对(9.12.36)两边和$A\mathbf{w}$做H内积, 那么

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2+\lambda\|A\mathbf{w}\|_o^2$$
$$=-a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},A\mathbf{w})-a_1(\mathbf{w};\mathbf{v},A\mathbf{w})+(\mathbf{f}-\mathbf{g},A\mathbf{w})$$

利用schwartz不等式

$$|(\mathbf{f}-\mathbf{g},A\mathbf{w})|\leqslant\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o\|A\mathbf{w}\|_o\leqslant\frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2+\delta\lambda\|A\mathbf{w}\|_o^2$$

共中$\delta>0$, 而

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},A\mathbf{w})|\leqslant c\|A\mathbf{w}\|_o\|A\mathbf{u}\|_o|\mathbf{w}|_1$$
$$|a_1(\mathbf{w};\mathbf{v},A\mathbf{w})|\leqslant c\|A\mathbf{v}\|_o|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o$$

从而

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2+\lambda(1-\delta)\|A\mathbf{w}\|_o^2\leqslant\frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2$$
$$+c(\|A\mathbf{u}\|_o+\|A\mathbf{v}\|_o)|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o$$

因为$\mathbf{u},\mathbf{v}$是$(0,\infty)$上的强解, 利用假设(9.12.28), 则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2+\lambda(1-\delta)\|A\mathbf{w}\|_o^2\leqslant\frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2+c(\alpha_1$$
$$+\alpha_2)|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o \quad (9.12.37)$$

应用(9.12.5)，记

$$\eta(t)=\max_{1\leqslant j\leqslant N}|\mathbf{w}(x^j)|$$

那么

$$|\mathbf{w}(t)|_1\leqslant c(\eta d_N^{-1/4}+d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o)$$

$$c(\alpha_1+\alpha_2)|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o\leqslant c(d_N^{-1/4}\eta\|A\mathbf{w}\|_o+d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o^2)$$

$$\leqslant(\lambda\delta+cd_N^{1/4})\|A\mathbf{w}\|_o^2+\frac{c^2d^{-1/2}\eta^2}{4\lambda\delta}$$

代入(9.12.37)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}|_1^2+(\lambda-2\delta_\lambda-cd_N^{1/4})\|A\mathbf{w}\|_o^2\leqslant\frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2$$

$$+\frac{c^2}{4\lambda\delta}d^{-1/2}\eta^2 \tag{9.12.38}$$

如果

$$\mu=\lambda-cd_N^{1/4}>0 \tag{9.12.39}$$

并选取δ使得

$$2\delta\lambda=\frac{1}{2}\mu,\ \delta=\frac{\mu}{4\lambda} \tag{9.12.40}$$

那么(9.12.38)给出

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}|_1^2+\mu|\mathbf{A}\mathbf{w}|_o^2\leqslant h \tag{9.12.41}$$

$$h=\frac{1}{2\mu}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2+\frac{c^2}{2\mu}d^{-1/2}\eta^2 \tag{9.12.42}$$

实际上

$$h(t)=\frac{1}{2\mu}\|\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t')\|_o^2+\frac{c^2}{2\mu}d^{-1/2}\max_{1\leqslant j\leqslant N}|\mathbf{u}(x^j,t)-\mathbf{u}(x^j,t')|^2$$

那么当 $t,t'\to+\infty$，$h(t)\to0$，故$\forall\varepsilon>0$ 存在 $t_o=t_o(\varepsilon)$ 使

得 $\forall t, t' \geq t_o$ 有

$$h(t) \leqslant \varepsilon$$

因此 $\forall t > t_o$，$t' = t + s \geqslant t_o$，有

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2 + \lambda_1 \mu |\mathbf{w}(t)|_1^2 \leqslant \varepsilon$$

由Gronwall引理得

$$|\mathbf{w}(t)|_1^2 \leqslant |\mathbf{w}(t_o)|_1^2 \exp(-\mu\lambda_1(t - t_o)) + \frac{\varepsilon}{\mu\lambda_1}(1 - \exp(-\mu\lambda_1(t - t_o)))$$

或等价地

$$|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t')|_1^2 \leqslant |\mathbf{w}(t_o)|_1^2 \exp(-\mu\lambda_1(t - t_o)) + \frac{\varepsilon}{\mu\lambda_1}(1 - \exp(-\mu\lambda_1(t - t_o))) \quad (9.12.43)$$

故

$$\limsup_{t,t' \to 0} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t')|_1^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu\lambda_1} \quad (9.12.44)$$

由于 ε 任意小，故上式极限是零，所以 $\mathbf{u}(t)$ 在 V 中当 $\varepsilon \to +\infty$ 时是 Cauchy 点列，它的极限记为 $\mathbf{u}_\infty$.

由 (9.12.28)，$t \to +\infty$，$\mathbf{u}(t)$ 在 $D(A)$ 中有界，由于 $\mathbf{H}^{7/4}$ 连续嵌入 $\mathbf{C}(\overline{\Omega})$ 和 $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{7/4}(\Omega)$ 是紧嵌入，因而 $\mathbf{u}(t)$ 在 $C(\overline{\Omega})^n$ 中相对紧. 另一方面，在 V 中当 $t \to +\infty$，$\mathbf{u}(t) \to \mathbf{u}_\infty$，因而收敛也是一致的，从而由 (9.12.31) 有

$$\mathbf{u}_\infty(x^j) = \xi^j \quad j = 1, 2, \cdots, N \quad (9.12.45)$$

对(9.12.26)进行极限过渡，便得到

$$\lambda A \mathbf{u}_\infty + B(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = \mathbf{f}_\infty \quad (9.12.46)$$

由定理 9.12.1，如果 d_N 也满足 (9.12.10)，那么满足 (9.12.45) 的 (9.12.46) 的解是唯一的，所以若取

$$\beta = \min\{(c^{-1}\lambda^1)^4,\ c(\lambda^{-2}\|\mathbf{f}\|_o + \lambda^{-6}\lambda_1^{-3/2}\|\mathbf{f}\|_o^2)^{-4}\} \tag{9.12.47}$$

则如果 d_N 满足 (9.12.30)，则必满足 (9.12.10) 和 (9.12.39)，从而定理得证．

定理9.12.5 设$\mathbf{f},\mathbf{g}\in \mathbf{L}^\infty(0,\infty,\mathbf{H}),\mathbf{u}_o$，$\mathbf{v}_o\in \mathbf{V}$，方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \lambda A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathbf{f},\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o \tag{9.12.48}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \lambda A\mathbf{v} + B(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \mathbf{g},\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o \tag{9.12.49}$$

分别存在强解 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathbf{L}^2(0,\infty,D(A))$，$\mathbf{u}',\mathbf{v}'\in \mathbf{L}^2(0,\infty,\mathbf{H})$，并满足 (9.12.28)，如果

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\|_o = 0 \tag{9.12.50}$$

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbf{u}(x^j,t) - \mathbf{v}(x^j,t)| = 0 \quad j = 1,2,\cdots,N \tag{9.12.51}$$

那么存在常数γ

$$d_N \leqslant \gamma \tag{9.12.52}$$

就有

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{v}(x,t)|_1 = 0 \tag{9.12.53}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\Omega}|\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{v}(x,t)| = 0 \tag{9.12.54}$$

证 令$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$，于是

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \lambda A\mathbf{w} + B(\mathbf{u},\mathbf{w}) + B(\mathbf{w},\mathbf{v}) = \mathbf{f} - \mathbf{g}$$

两边和$A\mathbf{w}$作$\mathbf{H}$内积之后，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{w}\|_o^2$$
$$= (\mathbf{f}-\mathbf{g}, A\mathbf{w}) - a_1(\mathbf{u};\mathbf{w}, A\mathbf{w}) - a_1(\mathbf{w};\mathbf{v}, A\mathbf{w})$$
$$\leqslant \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o\|A\mathbf{w}\|_o + c(\|A\mathbf{u}\|_o + \|A\mathbf{v}\|_o)|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o$$

利用(9.12.18)之后，则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2 + \lambda\|A\mathbf{w}\|_o^2 \leqslant \|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o\|A\mathbf{w}\|_o + c|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o$$

和以前一样，不同地方出现的 c，代表不同的意义，设 $\delta>0$ 为任意的

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o\|A\mathbf{w}\|_o \leqslant \delta\lambda\|A\mathbf{w}\|_o^2 + \frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2$$

再利用(9.12.5)

$$c|\mathbf{w}|_1\|A\mathbf{w}\|_o \leqslant c(\eta d_N^{-1/4}\|A\mathbf{w}\|_o + d_N^{1/4}\|A\mathbf{w}\|_o^2)$$
$$\leqslant (\delta\lambda + c d_N^{1/4})\|A\mathbf{w}\|_o^2 + \frac{c}{4\delta\lambda}\eta^2 d_N^{1/2}$$

最后有

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}|_1^2 + (2\lambda(1-2\delta) - 2c d_N^{1/4})\|A\mathbf{w}\|_o^2$$
$$\leqslant \frac{1}{4\lambda\delta}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2 + \frac{c}{4\delta\lambda}\eta^2 d_N^{1/2} \tag{9.12.55}$$

如果

$$\lambda - c d_N^{1/4} > 0 \tag{9.12.56}$$

取 $\delta = (\lambda - c d_N^{1/4})/4\lambda$，那么

$$\mu = 2\lambda(1-2\delta) - 2c d_N^{1/4} > 0 \tag{9.12.57}$$

故有

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|_1^2 + \mu\lambda_1|\mathbf{w}|_1^2 \leqslant h \tag{9.12.58}$$

$$h = \frac{1}{4\delta\lambda}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_o^2 + \frac{c}{4\delta\lambda}\eta^2 d_N^{1/2} \tag{9.12.59}$$

由假设，$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$，所以

$$|\mathbf{w}(t)|_1 = |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_1 \to 0, \quad t \to +\infty \tag{9.12.60}$$

$\mathbf{w}(t)$ 在 $C(\overline{\Omega})^n$ 中收敛于零，证明方法和定理 9.12.4 相似，证毕.

定理 9.12.5 说明，N－S 方程解的渐近行为可以由有限个节点值所决定.这一点和吸引子有有限维 Hausdorff 维数是相关联的.

第十章　在数学物理中的应用

本章是把在第五、六、七、八章中所建立的理论应用到弹性力学、电磁场以及量子力学等领域中去.

§10.1　在弹性力学中的应用

1. 本构关系

在线性弹性力学中，应力张量 σ_{ij}, $\sigma^{ij}(i,j=1,2,3)$ 和变形张量 ε_{ij}, $\varepsilon^{ij}(i,j=1,2,3)$ 服从 Hooke 定律

$$\varepsilon_{ij}=E_{ijkl}\sigma^{kl}\quad 或\quad \sigma^{kl}=E^{klij}\varepsilon_{ij}\tag{10.1.1}$$

这里 E^{ijkl},E_{ijkl} 是材料弹性系数张量，服从张量变化规律．且

$$E_{ijkl}=g_{im}g_{jn}g_{kr}g_{lp}E^{mnrp}$$

其中 $\{g_{it}\}$ 为协变度量张量．在直角坐标系中 $g_{ij}=\delta_{ij}$, δ_{ij} 为 Kronecker 记号．在各向同性介质中，E_{ijkl} 具有对称性

$$E_{ijkl}=E_{jilk}=E_{klij}$$

和正定性

$$E_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\geqslant\alpha_1\sigma^{ij}\sigma_{ij},\quad \alpha_1>0\quad \forall\sigma_{ij}\tag{10.1.2}$$

在非均匀介质中，$E_{ijkl}=E_{ijkl}(x)$; 在均匀介质中 E_{ijkl} 是常数．

由 (10.1.2) 式可知，E_{ijkl} 具有可逆性 .E^{ijkl} 是逆变分量，并且同样具有对称性

$$E^{ijkl}=E^{jilk}=E^{klij}$$

和正定性

$$E^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geqslant \alpha_2 \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij}, \quad \alpha_2 > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij}$$

从而记 $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$，则有

$$E^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geqslant \alpha \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} \tag{10.1.3}$$

$$E_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \geqslant \alpha \sigma_{ij}\sigma^{ij} \tag{10.1.4}$$

对于各向同性和均匀介质

$$E^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk})$$

其中 λ, μ 为 Lame 系数，而 Hooke 定律可表示为

$$\sigma_{ij} = \lambda \mathrm{tr}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{10.1.5}$$

$$\mathrm{tr}(\varepsilon) = g_{ij}\varepsilon^{ij} = g^{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \mathrm{tr}(\sigma) = g_{ij}\sigma^{ij} = g^{ij}\sigma_{ij} \tag{10.1.6}$$

那么

$$\mathrm{tr}(\sigma) = (3\lambda + 2\mu)\mathrm{tr}(\varepsilon) \tag{10.1.7}$$

而(10.1.5)式的逆关系是

$$\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} / 2\mu - \lambda \mathrm{tr}(\sigma)\delta_{ij} / (3\lambda + 2\mu) \tag{10.1.8}$$

这里 $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) / 2$ 为变形张量协变分量，$\mathbf{u}$ 为位移向量，∇_i 为协变导数.

若引入弹性模量 E 和 Poisson 比 ν，压缩系数 k. 那么

$$3k = 3\lambda + 2\mu, \quad E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu),$$
$$\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu) \tag{10.1.9}$$

或

$$k = \lambda + 2\mu / 3, \quad \lambda = \gamma E / (1 + \nu)(1 - 2\nu),$$
$$\mu = G = E / 2(1 + \gamma) \tag{10.1.10}$$

于是

$$\varepsilon_{ij} = (1 + \nu)\sigma_{ij} / E - \nu \mathrm{tr}(\sigma)\delta_{ij} / E \tag{10.1.11}$$

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij} / (1 + \nu) + \nu E \mathrm{tr}(\varepsilon)\delta_{ij} / (1 + \nu)(1 - 2\nu) \tag{10.1.12}$$

由物理意义 $k \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, 则

$$\sigma_{ij}\varepsilon^{ij} \geqslant 0$$

如果记 $\sigma = \{\sigma_{ij}\}(i,j = 1,2,3)$，$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}(i,j = 1,2,3)$，那么 (10.1.11) 和 (10.1.12) 可以表示为

$$\sigma = A\varepsilon(u),\ \varepsilon(\mathbf{u}) = A^{-1}\sigma \tag{10.1.13}$$

并且，成立如下定理：

定理 10.1.1 设弹性模量 E 和 Poisson 比 ν 满足

$$E > 0, \qquad 0 < \nu < 1/2 \tag{10.1.14}$$

那么由 (10.1.13) 所定义的弹性模量算子 A 是可逆的，并且满足下列强制不等式：存在 $c_i = c_i(\nu, E) > 0(i = 0,1,2)$，使得 $\forall\tau \in \mathbf{W}$，有

$$\int_\Omega (A^{-1}\tau)\tau dx \geqslant c_o \|\tau\|^2_{o,\Omega} \tag{10.1.15}$$

$$\int_\Omega (A\tau)\tau dx \geqslant c_1 \|\tau\|^2_{o,\Omega} \tag{10.1.16}$$

$$\|\tau\|_{o,\Omega} \geqslant c_2 \|A\tau\|_{o,\Omega} \tag{10.1.17}$$

其中Соболев空间**W**为

$$\mathbf{W} = \{\tau:\ \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij} = \tau_{ji},\quad i,\ j = 1,2,3\} \tag{10.1.18}$$

$$\|\tau\|^2_{o,\Omega} = \sum_{i,j=1}^{3} \|\tau_{ij}\|^2_{o,\Omega} \tag{10.1.19}$$

2. 方程和边界条件

静弹性力学的平衡方程是

$$-\operatorname{div}\sigma = f \tag{10.1.20}$$

这里 $\operatorname{div}\sigma = \{\nabla_j \sigma^{ij}, i = 1,2,3\}$ 为二阶张量的散度，代入 Hooke 定律后，得到关于位移 $\mathbf{u}$ 的 Navier－Lame 方程

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \tag{10.1.21}$$

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n = 2,\ 3)$ 是有界区域．$\Gamma = \partial\Omega$ 为其边界，Γ

$=\Gamma_u \bigcup \Gamma_f$, $\Gamma_u \bigcap \Gamma_f$ 为空集，其中 Γ_u 为给出位移的边界部分，而 Γ_f 为给出面力的边界部分

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_o \tag{10.1.22}$$

$$\{\sigma_{ij} n^j\}\big|_{\Gamma_f} = g_i, \quad i=1,2,3$$

为了方便，引入记号

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n^i n^j = \sigma^{ij} n_i n_j \tag{10.1.23}$$

$$\sigma_t = \{\sigma_{ti},\ i=1,2,3\},\ \sigma_{ti} = \sigma_{ij} n^j - \sigma_n n_i \tag{10.1.24}$$

$$u_n = u^i n_i, \quad u_t = u - u_n n \tag{10.1.25}$$

由此，经常用到下列各式

$$\sigma^{ij}(\mathbf{u}) n_j v_i = (\sigma^{ti} + \sigma_n n^i) v_i = \sigma^{ti} v_i + \sigma_n n^i v_i$$

$$= \sigma^{\mathbf{t}} v_{\mathbf{t}} + \sigma_n v_n$$

这里用到指标上升规律，即

$$\sigma^{ti} = \sigma^{ij} n_j - \sigma_n n^i, \quad \sigma^{\mathbf{t}} v = \sigma^{\mathbf{t}} (v_{\mathbf{t}} + v_n \mathbf{n}) = \sigma^t \mathbf{v}_t + \sigma^t \mathbf{n} v_n$$

$$\sigma^{\mathbf{t}} \mathbf{n} = \sigma^{ti} n_i = (\sigma^{ij} n_j - \sigma_n n^i) n_i = \sigma^{ij} n_i n_j - \sigma_n = 0$$

故

$$\sigma^{ij}(\mathbf{u}) n_j v_i = \sigma^{\mathbf{t}} v_t + \sigma_n v_n \tag{10.1.26}$$

3. **Galerkin变分**

首先证明下列Green公式

引理10.1.1

$$(-\mathrm{div}\sigma, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \oint \sigma \mathbf{n} \mathbf{v} ds \tag{10.1.27}$$

这里 $\mathbf{div}\sigma = \{\nabla_j \sigma^{ij},\ i=1,2,3\}$

$$\sigma \mathbf{n} \mathbf{v} = \sigma^{ij} n_j v_i$$

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) = (\mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) \tag{10.1.28}$$

$$(\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) = \int_\Omega \sigma^{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx$$

证 利用应力张量和应变张量的对称性 $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$，有

$$-(\mathrm{div}\sigma)\mathbf{v} = -\nabla_j(v_i\sigma^{ij}) + \sigma^{ij}\nabla_j v_i$$

$$= -\mathrm{div}(\mathbf{v}\sigma(\mathbf{u})) + \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{v})$$

利用Gauss定理，有

$$-(\mathrm{div}\sigma,\mathbf{v}) = (\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) - \oint_\Gamma \sigma^{ij}n_j v_i ds.$$

证毕.

利用 (10.1.26)，则 (10.1.23) 可表示为

$$(-\mathrm{div}\sigma,\mathbf{v}) = B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \oint_\Gamma (\sigma_t v_t + \sigma_n v_n)ds \tag{10.1.29}$$

利用 (10.1.15) 和 (10.1.16)，则

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{u})) \geqslant \alpha\|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 \tag{10.1.30}$$

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = (\sigma,A^{-1}\sigma) \geqslant \alpha\|\sigma(\mathbf{u})\|^2 \tag{10.1.31}$$

从而有

引理 10.1.2 由 (10.1.28) 所定义的 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{R}$ 的连续双线性形式，并且是 $\mathbf{W}$ 强制的.

引入基本空间

$\mathbf{U} = \mathbf{V} = (\mathbf{H}^1(\Omega))^n$， $\partial\mathbf{U} = \partial\mathbf{V} = (\mathbf{H}^{1/2}(T))^n$， γ: $\mathbf{U} \to \partial\mathbf{U}$， γ^*: $\mathbf{V}\to\partial\mathbf{V}$, $\mathrm{Ker}(\gamma) = \mathrm{Ker}(\gamma^*) = (\mathbf{H}_o^1(\Omega))^n$, Π_1: $\mathbf{U}\to\partial\mathbf{U}$ 连续投影算子，$\Pi_2 = I - \Pi_1$, $\gamma_1 = \Pi_1\gamma$， $\gamma_2 = \Pi_2\gamma$

又令

$$\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1) = \{\, q|_{\Gamma_1};\ q\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)\}$$

$$H^{1/2}(\Gamma_2) = \{ q|_{\Gamma_2}: q \in H^{1/2}(\Gamma) \}$$

那么 $\partial U_1 = \gamma_1 U = (H^{1/2}(\Gamma_1))^n$

$$\partial U_2 = \gamma_2 U = (H^{1/2}(\Gamma_2))^n$$

$$U_{o1} = \mathrm{Ker}(\gamma_1) = \{ v \in (H^1(\Omega))^n: \ v|_{\Gamma_1} = 0 \}$$

$$U_{o2} = \mathrm{Ker}(\gamma_2) = \{ v \in (H^1(\Omega))^n: \ v|_{\Gamma_2} = 0 \}$$

边界算子

$$\delta u = \sigma^{ij}(u) n_j \Big|_{\Gamma}, \delta u_1 = \Pi_1 \delta u, \quad \delta u_2 = \Pi_2 \delta u$$

利用上述记号，则 Green 公式 (10.1.28) 可以表示为

$$(-\mathrm{div}\sigma(u), v) = B(u,v) - \langle \delta_1 u, \gamma^* v \rangle_{\Gamma_u} - \langle \delta_2 u, \gamma^* v \rangle_{\Gamma_f} \quad (10.1.32)$$

因此对应于静弹性边值问题 (10.1.20),(10.1.22) 的 Galerkin 变分问题是

求$u \in U_{o1}$，使得

$$B(w,v) = \langle f,v \rangle + \langle g,v \rangle_{\Gamma_f} - B(\gamma_1^{-1} u^o, v), \quad \forall v \in U_{o1} \quad (10.1.33)$$

而 $u = w + \gamma_1^{-1} u_o$ 则是式 (10.1.20) 和 (10.1.22) 的弱解. 这里 γ_1^{-1} 是 γ_1 的右逆. $\langle f,v \rangle = \int_\Omega fv dx$, $\langle g,v \rangle = \int_{\Gamma_f} vg ds$.

为了证明 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $U_{o1} \times U_{o1} \to R$ 的强制双线性形式，我们需要下列 Korn 不等式:

定理 10.1.2 设 $\Omega \subset R^n$ 是带有光滑边界的有界开集，那么存在只依赖于区域 Ω 的常数 c，使得

$$(\varepsilon(v), \varepsilon(v)) + \|v\|_{o,\Omega}^2 \geqslant \|v\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall v \in (H^1(\Omega))^n \quad (10.1.34)$$

这一定理的证明见定理 9.1.1. 这个定理说明了，在 $(H^1(\Omega))^n$ 中

可以定义等价范数

$$\|v\|_1^{*2} = (\varepsilon(v),\varepsilon(v)) + \|v\|_{o,\Omega}^2 \tag{10.1.35}$$

定理 10.1.3 设 $\Omega \subset R^n$ 是带有光滑边界的有界开集，$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$，$\Gamma_u \cap \Gamma_f$ 为空集，且 $\text{meas}(\Gamma_u) \neq 0$，那么存在 $\alpha_o > 0$，使得

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \alpha_o \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{o1} \tag{10.1.36}$$

即双线性形式$B(\mathbf{u},\mathbf{u})$是$\mathbf{U}_{o1}$强制的.

证 由式(10.1.30)和(10.1.34)，我们只须证明存在常数 $c > 0$，使得

$$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant c\|\mathbf{v}\|_{o,\Omega}^2 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1} \tag{10.1.37}$$

由(10.1.34)和(10.1.37)得

$$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant c\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1} \tag{10.1.38}$$

在不同的不等式中所出现的常数具有不同的意义．由(10.1.38)和(10.1.30)就可以得到式(10.1.36).

为了证明式(10.1.37)，分为两步

(1) 首先证明$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1}$

$$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0 \tag{10.1.39}$$

实际上，只要证明$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1}$，如果$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega} = 0$，则有$\mathbf{v} = 0$. 变形张量为零的位移场是无限小刚体运动，即$\varepsilon(\mathbf{v}) = 0$，有$\mathbf{v} \in \mathbf{S} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{r}}$，其中$\vec{a},\vec{b}$为常向量，$\vec{r}$为原点到$x$的矢径$\}$. 由于$\text{meas}(\Gamma_u) \neq 0$，所以$\mathbf{v} \in S \cap \mathbf{U}_{o1}$以及$\mathbf{v} = 0$.

(2) 现在证明式(10.1.37). 用$\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$代替$\mathbf{v}$以后，(10.1.37)可以表示为

$$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \geqslant C \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1} \tag{10.1.40}$$

用反证法，如它不成立，则存在一个序列 $\mathbf{v}_n \in \mathbf{U}_{o1}$，使得

$$\|\mathbf{v}_n\|_{o,\Omega} = 1, \text{但} \varepsilon(\mathbf{v}_n) \to 0, \text{当} n \to \infty \text{时}.$$

由式(10.1.34)，有

$$\|\mathbf{v}_n\|_{1,\Omega} \leqslant c$$

由于 $\mathbf{U}_{o1}$ 的自弱列紧性，可以选出一个序列 $\{\mathbf{v}_n\}$，使得

$$\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} (\text{在} \mathbf{U}_{o1} \text{中})(\text{弱收敛})$$

又因为 $\mathbf{U}_{o1}$ 紧嵌入 $\mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 中，故在 $\mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 中，$\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$（强收敛）.

另一方面，$\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_o$ 是弱下半连续，有

$$\liminf_{n\to\infty} \|\varepsilon(\mathbf{v}_n)\|_{o,\Omega} \geqslant \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}$$

从而有 $\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega} = 0$. 由 (1) 的讨论，有 $\mathbf{v} \equiv 0$. 但是在 $\mathbf{L}^2(\Omega)^n$ 中 $\mathbf{v}_n$ 强收敛于 $\mathbf{v}$，故 $\|\mathbf{v}_n\|_{o,\Omega} \to 0$. 这与 $\|\mathbf{v}_n\|_{o,\Omega} = 1$ 的假设相矛盾. 证毕.

由此可知，$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o1}$，双线性形式

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (A\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) = (\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v}))$$

是 $\mathbf{U}_{o1} \times \mathbf{U}_{o1} \to \mathbf{R}$ 的双线性泛函，满足

(1) 连续性 $|B(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leqslant M\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o,1}$

(2) 对称性 $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{U}_{o,1}$

(3) U_{o1} 强制性 $B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant c_o\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}$

另一方面，不难验证

$$F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f},\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{g},\mathbf{v} \rangle_{\Gamma_f} - B(\gamma_1^{-1}\mathbf{u}_o,\mathbf{v}) \qquad (10.1.41)$$

是 $\mathbf{U}_{o1}$ 上线性有界泛函. 从而由 Lax－Milgram 定理得

定理 10.1.4 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界开集，边界 Γ 适当光滑，Γ

$=\Gamma_u\bigcup\Gamma_f$, $\text{meas}(\Gamma_u)\neq 0$, 那么对应于混合边值问题 (10.1.20) 和 (10.1.22) 的 Galerkin 变分问题 (10.1.33) 存在唯一解 .

定理 10.1.5 设区域 Ω 满足定理 10.1.4 的假设，能量泛函

$$J(\mathbf{v})=B(\mathbf{v},\mathbf{v})/2-\mathbf{F}(\mathbf{v})$$

共中 F 为式 (10.1.41) 所定义 . 令

$$U(\mathbf{u}_o)=\{\mathbf{u}\in\mathbf{V};\ \ \mathbf{u}|_{\Gamma_u}=\mathbf{u}_o\}$$

那么 $J(\mathbf{v})$ 满足强制性条件 :

$$\forall\mathbf{v}\in U(\mathbf{u}_o),\ \text{当}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\to\infty\text{时},\ J(\mathbf{v})\to\infty \tag{10.1.42}$$

证 由迹定理，存在 $\mathbf{v}_o\in\mathbf{V}=(\mathbf{H}^1(\Omega))^n$，使得 $\mathbf{v}_o|_{\Gamma_u}=\mathbf{u}_o$，$\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$，令 $\mathbf{w}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_o$，则 $\mathbf{w}\in\mathbf{U}_{o1}$，于是

$$J(\mathbf{v})=J(\mathbf{w})+J(\mathbf{v}_o)+B(\mathbf{w},\mathbf{v}_o)\geqslant\frac{1}{2}c\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2-c_1\|\mathbf{v}_o\|_{1,\Omega}^2$$

$$-c_1\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}-c_1\|\mathbf{v}_o\|_{1,\Omega}-m\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}_o\|_{1,\Omega}$$

利用Young不等式

$$J(\mathbf{v})\geqslant(c/2-\varepsilon)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2-c\|\mathbf{v}_o\|_{1,\Omega}^2-c_1$$

或

$$J(\mathbf{v})\geqslant c\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2-c_1\|\mathbf{v}_o\|_{1,\Omega}^2-c_2$$

由于 $\mathbf{v}_o$ 是固定的，c_2 为常数，所以式 (10.1.42) 成立 . 证毕 .

如果 $\text{meas}(\Gamma_u)=0$，则边界条件 (10.1.22) 为在边界上给定面应力，称为自然边界条件 . 这时 $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 在 $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ 上不再是 $\mathbf{U}$ 强制的 . 为了进一步研究它的强制性，需要引入一个无限小刚体位移空间

$$S=\{\mathbf{v}:\ \mathbf{v}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{r}}\} \tag{10.1.43}$$

共中 $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$ 为任意常向量，$\vec{\mathbf{r}}$ 为原点到动点的矢径，引入商空间

$$\overset{o}{\mathbf{V}} = \mathbf{V} / S, \quad \mathbf{V} = \mathbf{U} = (\mathbf{H}^1(\Omega))^n$$

$\overset{\circ}{\mathbf{V}}$ 中的等价类记为$\overset{\circ}{\mathbf{u}},\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ 等等．定义双线性形式

$$B(\overset{\circ}{\mathbf{u}},\overset{\circ}{\mathbf{v}}) = B(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}, \mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}} \tag{10.1.44}$$

那么有

定理10.1.6 设Ω满足定理10.1.4假设，那么

$$B(\overset{\circ}{\mathbf{u}},\overset{\circ}{\mathbf{u}}) \geqslant \alpha \|\overset{\circ}{\mathbf{u}}\|_{\overset{\circ}{V}}^2, \ \alpha > 0 \quad \forall \overset{\circ}{\mathbf{u}} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}} \tag{10.1.45}$$

其中$\|\cdot\|_{\overset{\circ}{V}}$为商范数.

证 在 V 中取等价范数 (10.1.35)，并注意到 S 中的元素应变张量为零，那么式 (10.1.45) 等价于

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant \alpha \{ \inf_{\rho \in S} \|\mathbf{u} + \rho\|_{o,\Omega}^2 + \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \} \tag{10.1.46}$$

这就是说，只要我们能证明

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant c_1 \inf_{\rho \in S} \|\mathbf{u} + \rho\|_{o,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$$

就可以得到式(10.1.45).

设P为$(L^2(\Omega))^n$到S的正交投影算子，故

$$\inf_{\rho \in S} \|\mathbf{v} + \rho\|_{o,\Omega}^2 = \|\mathbf{v} - P\mathbf{v}\|_{o,\Omega}^2$$

此即我们只须证明

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant c \|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|_{o,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$$

用 $\mathbf{u} / \|\mathbf{u} - \rho \mathbf{u}\|_{o,\Omega}$ 代替 $\mathbf{u}$，则只要证明

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \geqslant c \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \ \|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|_{o,\Omega} = 1 \tag{10.1.47}$$

就可以，设式 (10.1.47) 不成立，则存在序列 $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathbf{V}$，使得

$$\|\mathbf{u}_n - P\mathbf{u}_n\|_{o,\Omega} = 1, \ \varepsilon(\mathbf{u}_n) \to 0; \ n \to \infty \text{时} \tag{10.1.48}$$

令 $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - P\mathbf{u}_n$，则 $\|\mathbf{w}_n\|_{o,\Omega} = 1$，$\|\varepsilon(\mathbf{w}_n)\|_{o,\Omega} \to 0$，$n \to \infty$ 时．这表明，$\|\mathbf{w}_n\|_1^*$（等价范数）有界，因而可以选取这个序列的子序列，仍记为 $\mathbf{w}_n$，使得 $\mathbf{w}_n$ 在 $\mathbf{V}$ 中弱收敛于 $\mathbf{w}$，并且显然有 $\varepsilon(\mathbf{w}) = 0$．因此 $\mathbf{w} \in S$．由于 $\mathbf{V}$ 在 $(\mathbf{L}^2(\Omega))^n$ 中列紧，故 $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{o,\Omega} \to 0$．另一方面，$(\mathbf{w}_n, \rho) = (\mathbf{u}_n - P\mathbf{u}_n, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in S$，即 $\mathbf{w}_n \in S^\perp$，它的极限 $\mathbf{w} \in S^\perp$，故 $\mathbf{w} \subset S^\perp \bigcap S$，从而 $\mathbf{w} = 0$ 以及 $\|\mathbf{w}_n\|_{o,\Omega} \to 0$．这与 $\|\mathbf{w}_n\|_{o,\Omega} = 1$ 相矛盾．证毕．

定理 10.1.7　设 Ω 满足定理 10.1.4 的假设，$\mathrm{meas}(\Gamma_u) = 0$，而体积力，面力满足

$$\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}dx + \int_\Gamma \mathbf{g}\mathbf{v}ds = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

这里 S 是由式 (10.1.43) 所定义的无限小刚性位移空间，那么边值问题 (10.1.20) 和 (10.1.22) 有解．在相差一个无限小刚性位移下解是唯一确定的．

这个定理是第五章抽象变分问题的结果.因为这时,

$$N(A^*, \delta^*) = N(A, \delta) = S$$

4.　**混合变分形式**

由 (10.1.28) 和 (10.1.13)，双线性形式 $B(\cdot, \cdot)$ 可以写成

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (A\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u})) = (\sigma(\mathbf{u}), A^{-1}\sigma(\mathbf{v})) \overset{\Delta}{=} a(\sigma, \sigma) \qquad (10.1.49)$$

这里，双线性形式 $\mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbf{R}$：$\forall \sigma, \tau \in \mathbf{W}$

$$a(\sigma, \tau) = (\sigma, A^{-1}\tau) \qquad (10.1.50)$$

同样不等式成立

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \alpha \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{o,\Omega}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{W} \qquad (10.1.51)$$

$$a(\sigma, \sigma) \geqslant \alpha \|\sigma\|_{o,\Omega}^2 \quad \forall \sigma \in \mathbf{W} \qquad (10.1.52)$$

而Green公式(10.1.27)可以表示为

$$(\sigma,\varepsilon(\mathbf{v}))+(\mathrm{div}\sigma,\mathbf{v})=\oint_{\Gamma}\sigma\mathbf{n}\mathbf{v}ds\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}\tag{10.1.53}$$

下面，我们建立静线性弹性力学的 Hellinger -- Reissner 变分形式.静弹性平衡方程是边值问题

$$\begin{cases}\mathrm{div}\sigma+\mathbf{f}=0 & \text{在}\Omega\text{内}\\ \mathbf{u}|_{\Gamma u}=\mathbf{u}_o & \text{在}\Gamma_u\text{上}\\ \sigma^{ij}n_j\big|_{\Gamma_f}=g^i & \text{在}\Gamma_f\text{上}\end{cases}\tag{10.1.54}$$

而本构方程是

$$\varepsilon(\mathbf{u})=\mathbf{A}^{-1}\sigma\tag{10.1.55}$$

把(10.1.54)代入(10.1.53)得

$$(\sigma,\varepsilon(\mathbf{v}))=(\mathbf{f},\mathbf{v})+\int_{\Gamma_f}\mathbf{g}\mathbf{v}ds\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{U}_{o1}\tag{10.1.56}$$

由(10.1.55)，有

$$a(\sigma,\tau)=(\tau,\varepsilon(\mathbf{u}))\quad\forall\tau\in\mathbf{W}\tag{10.1.57}$$

若记

$$b(\tau,\mathbf{u})=-\int_{\Omega}\tau\varepsilon(\mathbf{u})dx\tag{10.1.58}$$

则由式 (10.1.56), (10.1.57) 和 (10.1.58) 得到静弹性平衡方程的混合变分形式

$$\begin{cases}\text{求}(\sigma,\mathbf{u})\in\mathbf{W}\times\mathbf{U}_{o1}\text{，使得}\\ a(\sigma,\tau)+b(\tau,\mathbf{u})=0\quad\forall\tau\in\mathbf{W}\\ b(\sigma,\mathbf{v})=F(\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{U}_{o1}\end{cases}\tag{10.1.59}$$

其中 $F(\mathbf{v})=-<\mathbf{f},\mathbf{v}>-<\mathbf{g},\mathbf{v}>_{\Gamma_f}\quad\forall\mathbf{v}\in U_{o1}$. 它就是线性弹性力学中 Hellinger – Reissner 变分原理.

定理 10.1.8 设 Ω 满足定理 10.1.4 的假设. 那么 $\forall\mathbf{f}$

$\in \mathbf{U}'_{o1}$，$\mathbf{g}\in(\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_f))^n$，则混合变问题 (10.1.59) 存在唯一解 $(\sigma,\mathbf{u})$，且

$$\|\sigma\|_{o,\Omega}+\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\leqslant c(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{U}'_{o1}}+\|\mathbf{g}\|_{-1/2,\Gamma_f}) \tag{10.1.60}$$

证　由 (10.1.52) 式知，双线性形式 $a(\sigma,\tau)$ 是 $\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{R}$ 的连续的和 $\mathbf{W}$ 强制的．另一方面，双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足 BB 条件

$$\sup_{\tau\in W}\frac{|b(\tau,\mathbf{v})|}{\|\tau\|_{o,\Omega}}\geqslant\frac{\int_\Omega(A\varepsilon(\mathbf{v}),\varepsilon(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}}\geqslant\frac{c_1\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}}{\|\mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}}$$

又由(10.1.17)式，有

$$\sup_{\tau\in W}\frac{|b(\tau,\mathbf{v})|}{\|\tau\|_{o,\Omega}}\geqslant c\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{U}_{o1}$$

又由(10.1.38)，则有下述BB条件成立

$$\sup_{\tau\in W}\frac{|b(\tau,\mathbf{v})|}{\|\tau\|_{o,\Omega}}\geqslant\beta\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{U}_{01} \tag{10.1.61}$$

从而由定理 5.2.1 知 (10.1.59) 存在唯一解且 (10.1.60) 式成立．证毕．

现在考察第一边值问题

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\sigma+\mathbf{f}=0\\ \mathbf{u}|_\Gamma=0\end{cases} \tag{10.1.62}$$

引入Hilbert空间

$$\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)=\{\tau\in\mathbf{W},\ \operatorname{div}\tau\in L^2(\Omega)^3\}$$

如果把本构方程 (10.1.55) 及 (10.1.62) 式的边界条件代入 Green 公式 (10.1.28). 另外 (10.1.62) 第一式两边乘上 v 后积分，则可以得到式 (10.1.62) 的 Johson－Mercier 变分原理

$$\begin{cases} 求(\sigma,\mathbf{u})\in \mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\times \mathbf{V}_o 使得 \\ a(\sigma,\tau)+(\mathrm{div}\tau,\mathbf{u})=0 & \forall \tau\in \mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega) \\ (\mathrm{div}\sigma,\mathbf{v})=(\mathbf{f},\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v}\in \mathbf{V}_o \end{cases}$$

其中$\mathbf{V}_o=(\mathbf{H}_o^1(\Omega))^n$，那么有如下定理

定理 10.1.9 设Ω满足定理10.1.4的假设，那么$\forall \mathbf{f}\in \mathbf{V}_o'$，则变分问题(10.1.63)存在唯一解$\sigma,\mathbf{u}$，且成立

$$\|\sigma\|_{o,\Omega}+\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\leqslant c\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$$

证 首先$a(\cdot,\cdot)$是$\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{R}$的连续和$\mathbf{W}$强制双线性形式．另一方面，由(10.1.27)和(10.1.28)得

$$(\mathrm{div}\tau,\mathbf{v})+(\tau,\varepsilon(\mathbf{v}))=0 \quad \forall v\in \mathbf{V}_o$$

从而有$\forall \mathbf{v}\in \mathbf{V}_o$

$$\sup_{\tau\in W}\frac{|(\mathrm{div}\tau,\mathbf{v})|}{\|\tau\|_{o,\Omega}}=\sup_{\tau\in W}\frac{|(\tau,\varepsilon(\mathbf{v}))|}{\|\tau\|_{o,\Omega}}\geqslant\frac{|(A\varepsilon(\mathbf{v}),\varepsilon(\mathbf{v}))|}{\|A\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}}$$

$$\geqslant\frac{c_1\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}^2}{c_2^{-1}\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}}\geqslant c\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{o,\Omega}\geqslant\beta\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}.$$

此即双线性形式$(\mathrm{div}\tau,\mathbf{v})$：$\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\times \mathbf{V}_o\to\mathbf{R}$满足BB条件．故由抽象的混合变分问题解的存在性定理5.2.1．得本定理．证毕

5 **Ritz变分问题**

现在回到边值问题(10.1.20)和(10.1.22).设

$$U(\mathbf{u}^o)=\{\mathbf{u}\in\mathbf{U}=(\mathbf{H}^1(\Omega))^n,\ \ \mathbf{u}|_{\Gamma_u}=\mathbf{u}^o\}$$

则$U(\mathbf{u}^o)$是$\mathbf{U}$中的闭线性仿射流形.

设$\mathbf{f}\in\mathbf{U}'$，$\mathbf{u}^o\in(\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_u))^n$，$\mathbf{g}\in(\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_f))^n$，那么$\mathbf{v}\to$

$\int_{\Gamma_f}\mathbf{g}\mathbf{v}ds=\langle\mathbf{g},\mathbf{v}\rangle_{\Gamma_f}$可以延拓为$\mathbf{U}$上线性连续泛函，令

$$J(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v},\mathbf{v})/2 - <\mathbf{f},\mathbf{v}> - <\mathbf{g},\mathbf{v}>_{\Gamma_f} \qquad (10.1.65)$$

其中 $B(\mathbf{v},\mathbf{v})/2$ 为系统的弹性位能，$J(\mathbf{v})$ 为系统的全势能，那么 (10.1.20) 和 (10.1.22) 的 Ritz 变分问题是

求$\mathbf{u}\in U(\mathbf{u}^o)$，使得

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v}\in U(\mathbf{u}^o)} J(\mathbf{v}) \qquad (10.1.66)$$

利用定理5.1.7可以得到如下定理

定理 10.1.10 设 Ω 满足定理 10.1.4 条件，那么极小值问题 (10.1.66) 有唯一解 $\mathbf{u}$，它等价于下列变分问题：

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = <\mathbf{f},\mathbf{v}-\mathbf{u}> + <\mathbf{g},\mathbf{v}-\mathbf{u}>_{\Gamma_f} \quad \forall \mathbf{v}\in U(\mathbf{u}^o)$$

如果令

$$I(\tau) = a(\tau,\tau)/2 - \int_{\Gamma_u} \tau^{ij} n_j u_i^o \, ds \qquad (10.1.67)$$

$$W(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \{\tau\in\mathbf{W},\ \mathrm{div}\tau + \mathbf{f} = 0,\ \tau\text{在}\Omega\text{内};\ \tau^{ij}n_j = g^i,\ \text{在}\Gamma_f\text{上}\}$$

考虑极小值问题

求$\sigma\in W(\mathbf{f},\mathbf{g})$，使得

$$I(\sigma) = \inf_{\tau\in W(f,g)} I(\tau) \qquad (10.1.68)$$

由于 $W(\mathbf{f},\mathbf{g})$ 是 $\mathbf{W}$ 中线性仿射流形. 所以利用定理 5.2.1 同样有

定理 10.1.11 设 $W(\mathbf{f},\mathbf{g})$ 非空，则极小值问题 (10.1.68) 有唯一解. 并且由

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = E_{ijkl}\sigma^{kl} \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^o \end{cases}$$

所确定的解 $\mathbf{u}$ 也是极小值问题 (10.1.66) 的解.

证 实际上只要证明下列结论就够了：如果 $\mathbf{u}$ 是式 (10.1.66) 的解，那么 $\sigma^{ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})$ 就是式 (10.1.68) 的解.

也就是说 σ 满足

$$a(\sigma,\tau-\sigma)-<(\sigma-\tau)\mathbf{n},\mathbf{u}^{o}>=0 \quad \forall\tau\in W(\mathbf{f},\mathbf{g})$$

注意到$\forall(\sigma,\tau)\in W(\mathbf{f},\mathbf{g})$，有

$$a(\sigma,\tau-\sigma)=\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}(u)(\tau^{ij}-\sigma^{ij})dx=\int_{\Omega}\nabla_{i}u_{j}(\tau^{ij}-\sigma^{ij})dx$$

$$=<(\tau-\sigma)\mathbf{n},\mathbf{u}>_{\Gamma}-\int_{\Omega}\mathrm{div}(\tau-\sigma)\mathbf{u}dx$$

$$=<(\tau-\sigma)\mathbf{n},\mathbf{u}^{o}>_{\Gamma_{u}}$$

从而$\forall\tau\in W(\mathbf{f},\mathbf{g})$，有

$$a(\sigma,\tau-\sigma)-<(\tau-\sigma)\mathbf{n},\mathbf{u}^{o}>_{\Gamma_{u}}=0$$

证毕.

设 $\mathbf{u}$ 和 σ 分别为式 (10.1.66) 和 (10.1.68) 的解，那么

$$J(\mathbf{u})+I(\sigma)=0$$

所以通常称 (10.1.66) 式为极小位能原理，而 (10.1.68) 式为极小余能原理.

§ 10.2 动力弹性系统

动力Navier－Lame方程组是

$$\partial^{2}\mathbf{u}/\partial t^{2}=\mathrm{div}\sigma+\mathbf{f}$$

这里设密度 $\rho_{o}=\mathrm{constant}$，因而可以设为 1，它的初值问题可以表示为

$$\frac{\partial^{2}\mathbf{u}}{\partial t^{2}}=(\lambda+\mu)\mathrm{graddiv}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f} \qquad \text{在}\Omega\text{内}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{u}}=\mathbf{u}^{o} \qquad \text{在}\Gamma_{u}\text{上}$$

$$\sigma^{ij}n_j = g^i \qquad \text{在}\Gamma_f\text{上} \tag{10.2.1}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_o \qquad \text{在}\Gamma_f\text{上}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,0) = \mathbf{u}_1$$

利用 Green 公式 (10.1.27), 上述问题的变分形式是

$$(\mathbf{u}'',\mathbf{v}-\mathbf{u}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = (\mathbf{f},\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_f} \mathbf{g}(\mathbf{v}-\mathbf{u})ds \quad \forall \mathbf{v}\in U(\mathbf{u}^o)$$

这里 $U(\mathbf{u}^o) = \{\mathbf{v}\in(\mathbf{H}^1(\Omega))^n, \ \mathbf{v}|_{\Gamma u} = \mathbf{u}^o\}$.

这里 $U(\mathbf{u}_o) = \{\mathbf{v}\in(\mathbf{H}^1(\Omega))^n, \ \mathbf{v}|_{\Gamma u} = \mathbf{u}_o\}$.

利用迹定理，容易使边值条件齐次化．由迹定理可知存在 $\varphi \in(\mathbf{H}^1(\Omega))^n$，使得 $\varphi|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^o$，那么用 $\mathbf{u}-\varphi$ 代替 $\mathbf{u}$ 以后，并引入 Соболев 空间

$$\mathbf{V}_o = \{\mathbf{v}\in(\mathbf{H}^1(\Omega))^n, \ \mathbf{v}|_{\Gamma u} = 0\}$$

则相应的变分问题是

$$\begin{cases} (\mathbf{u}'',\mathbf{v}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = <\mathbf{F},\mathbf{v}> \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}_o \\ \mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_o, \ \mathbf{u}'(0,x) = \mathbf{u}_1 \end{cases} \tag{10.2.2}$$

其中

$$<\mathbf{F},\mathbf{v}> = (\mathbf{f},\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_f} \mathbf{g}\mathbf{v}ds + (\varphi'',\mathbf{v}) + B(\varphi,\mathbf{v}) \tag{10.2.3}$$

根据 § 10.1, 可知

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}_o \tag{10.2.4}$$

$$B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant \alpha\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}_o \quad \text{当}\Gamma\text{不是空集时} \tag{10.2.5}$$

以及 $\forall\lambda > 0$, 存在 $\alpha > 0$, 使得

$$B(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \lambda\|\mathbf{v}\|^2_{o,\Omega} \geqslant \alpha\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V} = (\mathbf{H}^1(\Omega))^n \tag{10.2.6}$$

定理10.2.1 设

$$\mathbf{F},\mathbf{F}' \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}_o') \tag{10.2.7}$$

$$\mathbf{u}_o \in \mathbf{V}_o,\ \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H} = (\mathbf{L}^2(\Omega))^n \tag{10.2.8}$$

那末变分问题(10.2.2)有唯一解$\mathbf{u}$，它满足

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}_o) \tag{10.2.9}$$

$$\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \tag{10.2.10}$$

$$\mathbf{u}'' \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}_o') \tag{10.2.11}$$

证　$\mathbf{V}_o$ 是可分的 Hilbert 空间，令 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_m,\cdots$ 使得$\forall m$，$\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_m$ 是线性独立的以及它们任意有限的线性组合在 $\mathbf{V}_o$ 中是稠密的．进而令 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_o(\mathbf{u}_o \neq 0)$ 而

$$W_m = \mathrm{span}\{\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2\cdots,\mathbf{w}_m\}$$

考察

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_m'',\mathbf{v}) + B(\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) = \ <\mathbf{F},\mathbf{v}> & \forall \mathbf{v} \in W_m \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_o,\ \mathbf{u}_m'(0) = \mathbf{u}_{1m},\ \mathbf{u}_{1m} \in W_m \end{cases} \tag{10.2.12}$$

且当 $m \to +\infty$ 时，$\|\mathbf{u}_{1m} - \mathbf{u}_1\|_{o,\Omega} \to 0$. 由于 $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_m\}$ 是线性独立的，式(10.2.12)非奇异，故(10.2.12)存在唯一解．

在(10.2.12)中，令$\mathbf{v} = \mathbf{u}_m'(t)$，则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m'(t)\|_o^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}B(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}_m(t)) = \ <\mathbf{F},\mathbf{u}_m(t)>$$

故　$\|\mathbf{u}_m'(t)\|_o^2 + B(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t))$

$$= \|\mathbf{u}_{1m}\|_o^2 + B(\mathbf{u}_o,\mathbf{u}_o) + 2\int_o^t <\mathbf{F},\mathbf{u}_m> d\sigma$$

$$= \|\mathbf{u}_{1m}\|_o^2 + B(\mathbf{u}_o,\mathbf{u}_o) + 2<\mathbf{F}(t),\mathbf{u}_m(t)> - 2<\mathbf{F}(0),\mathbf{u}_o>$$

$$= \|\mathbf{u}_{1m}\|_o^2 + B(\mathbf{u}_o,\mathbf{u}_o) + 2 < \mathbf{F}(t),\mathbf{u}_m(t) > -2 < \mathbf{F}(0),\mathbf{u}_o >$$

$$-2\int_o^t < \mathbf{F}'(\sigma),\mathbf{u}_m(\sigma) > d\sigma \qquad (10.2.13)$$

但是 $B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant \alpha\|\mathbf{v}\|_1^2 - \|\mathbf{v}\|_o^2$，$\|\mathbf{u}_m\|_o \leqslant c\|\mathbf{u}_1\|_o$，

$$2|(\mathbf{F}(t),\ \mathbf{u}_m(t))| \leqslant \alpha\|\mathbf{u}_m(t)\|_1^2/2 + c\|\mathbf{F}(t)\|_*^2.$$

则由式(10.2.13)给出

$$\|\mathbf{u}_m'(t)\|_o^2 + \frac{1}{2}\alpha\|\mathbf{u}_m(t)\|_1^2 \leqslant c(\|\mathbf{u}_1\|_o^2 + \|\mathbf{u}_o\|_1^2 + \|\mathbf{F}(0)\|_*^2$$

$$+ \|\mathbf{F}(t)\|_*^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2) + c\int_o^t \|\mathbf{F}'(\sigma)\|_* \|\mathbf{u}_m(\sigma)\| d\sigma \qquad (10.2.14)$$

又由$\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}_o + \int_o^t \mathbf{u}_m'(\sigma)d\sigma$有

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 \leqslant 2\|\mathbf{u}_o\|_o^2 + c\int_o^t \|\mathbf{u}_m'(\sigma)\|_o^2 d\sigma$$

代入式(10.2.14)，得

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_o^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_1^2 \leqslant c(\|\mathbf{u}_1\|_o^2 + \|\mathbf{u}_o\|_1^2 + \|\mathbf{F}(0)\|_*^2$$

$$+ \int_0^t \|\mathbf{F}'(\sigma)\|_*^2 d\sigma) + c\int_o^t (\|\mathbf{u}_m'(\sigma)\|_o^2 + \|\mathbf{u}_m(\sigma)\|^2)d\sigma \quad (10.2.15)$$

我们设

$$|||\ \mathbf{F}|||^2 = \int_o^t (\|\mathbf{F}\|_*^2 + \|\mathbf{F}'\|_*^2)dt \qquad (10.2.16)$$

$$\varphi_m(t) = \|\mathbf{u}_m'(t)\|_o^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_1^2 \qquad (10.2.17)$$

则(10.2.15)可表示为

$$\varphi_m(t) \leqslant c(\|\mathbf{u}_1\|_o^2 + \|\mathbf{u}_o\|_1^2 + |||\mathbf{F}|||^2) + c\int_o^t \varphi_m(\sigma)d\sigma \qquad (10.2.18)$$

根据Gronwall不等式，有

从而有下述结论

$\mathbf{u}_m$ 和 $\mathbf{u}'_m$ 分别在 $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}_o)$ 和 $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ 中有界 $(m\to\infty)$

(10.2.20)

以及存在 $\{\mathbf{u}_m\}$ 和 $\{\mathbf{u}'_m\}$ 的子序列，仍记为 $\{\mathbf{u}_m\}\{\mathbf{u}'_m\}$，满足

$$\begin{cases}\text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{V}_o)\text{中，}\{\mathbf{u}_m\}\text{弱星收敛于}\mathbf{u}\\ \text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})\text{中，}\{\mathbf{u}'_m\}\text{弱星收敛于}\mathbf{u}'\end{cases} \tag{10.2.21}$$

现在我们证明 $\mathbf{u}$ 是问题 (10.2.2) 的解．对任意有限值 μ_o，作

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{\mu_o}\varphi_j(t)\mathbf{w}_j,\ \ \varphi_j\in\mathbf{C}^1([0,T]),\ \ \varphi_j(T)=0 \tag{10.2.22}$$

$$E=\{\varphi(t):\ \varphi(t)\ \text{由式(10.2.22)所决定}\}$$

这样，$\forall m>\mu_o$，有

$$(\mathbf{u}''_m,\varphi)+B(\mathbf{u}_m,\varphi)-<\mathbf{F},\varphi>\ =0\quad\forall\varphi\in E$$

以及

$$\int_o^T\{-(\mathbf{u}'_m,\varphi')+B(\mathbf{u}_m,\varphi)-<\mathbf{F},\varphi>\}dt=(\mathbf{u}_{1m},\varphi(0)) \tag{10.2.23}$$

$\forall\varphi\in E$，式(10.2.23)可以进行极限过渡

$$\int_o^T\{-(\mathbf{u}',\varphi')+B(\mathbf{u},\varphi)-<\mathbf{F},\varphi>\}dt=(\mathbf{u}_1,\varphi(0)) \tag{10.2.24}$$

由于 E 在 $\mathbf{V}_o$ 中稠密，故 $\forall\varphi\in\mathbf{C}^1([0,T];\mathbf{V})$，$\varphi(T)=0$，(10.2.24) 成立，即在 $[0,T]$ 上的分布意义下，有

$$\mathbf{u}''+A\mathbf{u}=\mathbf{F} \tag{10.2.25}$$

其中 A 是由三重结构 $(\mathbf{V}_o,\mathbf{H},B(\cdot,\cdot))$ 所决定的形式算子．

$$A\in\pounds(\mathbf{V}_o,\mathbf{V}'_o):\ B(\mathbf{u},\mathbf{v})=(A\mathbf{u},\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}_o.$$

$$A \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_o, \mathbf{V}_o'):\ B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (A\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}_o .$$

因而 $\mathbf{u}'' = \mathbf{F} - A\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{V}_o')$.(10.2.25) 式两边与 $\varphi \in E$ 做内积，然后与 (10.2.24) 比较，得

$$(\mathbf{u}_1, \varphi(0)) = (\mathbf{u}'(0), \varphi(0)) \quad \forall \varphi \in E$$

从而 $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1$. 又由式 (10.2.21) 推出 $\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_o \to \mathbf{u}(0)$, 故有 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o$，此即 $\mathbf{u}$ 满足 (10.2.2) 式.

下面证明唯一性. 设 $\mathbf{u}$ 满足式 (10.2.2) 和 (10.2.9) − (10.2.11). 那么

$$\mathbf{u}'' + A\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}(0) = 0,\ \mathbf{u}'(0) = 0 \tag{10.2.26}$$

$\forall \varphi \in \mathbf{C}^1([0,T],\mathbf{V}_o')$, 由定理的第一部分，知存在 $\mathbf{w}$ 使得

$$\mathbf{w} \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{V}_o),\ \mathbf{w}' \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{H}),\ \mathbf{w}'' \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{V}_o') \tag{10.2.27}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}'' + A\mathbf{w} = \varphi \\ \mathbf{w}(T) = 0,\ \mathbf{w}'(T) = 0 \end{cases} \tag{10.2.28}$$

由分部积分，得

$$\int_o^T (\mathbf{u}'', \mathbf{w})\,dt = \int_o^T (\mathbf{u}, \mathbf{w}'')\,dt \tag{10.2.29}$$

式(10.2.26)两边与w作内积，利用式(10.2.29)，有

$$\int_o^T (\mathbf{u}, \mathbf{w}'' + A\mathbf{w})\,dt = 0$$

即 $\int_o^T (\mathbf{u},\varphi)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}^1([0,T],\mathbf{V}_o')$. 故$u = 0$.证毕.

§ 10.3 弹塑性问题

设 ρ、v 分别表示材料的密度和质点的运动速度，那么

质量守恒定律 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho v)=0$ (10.3.1)

动量守恒定律 $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t}=\mathrm{div}\sigma+f$ (10.3.2)

能量守恒定律 $\rho\dfrac{de}{dt}=\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$(没有热交换) (10.3.3)

其中 σ^{ij} 为应力张量，ε_{ij} 为应变张量，f 为体积力密度，e 为单位体积的内能．设 u 为质点的位移向量，则

$$v=\frac{du}{dt}.$$

材料的弹塑性行为可从由图 10.3.1 看出．在 os 阶段，材料

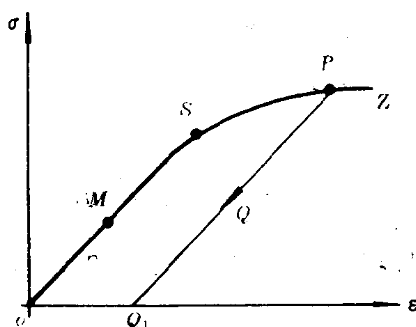


图 10.3.1

内部的应力正比于应变，经过 s 后，sp 阶段几乎平行于应变轴．在材料负载下，应变与应力关系曲线可以从 $omsp$ 看出．os 是直线，sp 是曲线．如果从 p 点让 ε 下降，则 (ε,τ) 点描绘了一条从 p 点出发的直线 pq，它几乎平行于 os．在 p 点，材料的变形

相交于q_1，在pq_1上，材料行为是可逆的，而且$pq_1 > os$.

如果sz平行于$o\varepsilon$轴，则材料是完全塑性的．当载荷在一定范围内，我们可以得到本构方程

$$d\varepsilon = A d\sigma + \bar{\lambda}$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = 0 & 当\sigma < g，或\sigma = g，d\sigma < 0 \\ \bar{\lambda} \geqslant 0 & 当\sigma = g，d\sigma = 0 \end{cases}$$

如果$\dot{\varepsilon}$表示应变对时间t的导数，那么

$$\dot{\varepsilon} = A\dot{\sigma} + \dot{\lambda} \tag{10.3.4}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & 当\sigma < g\ 或\ \sigma = g，\dot{\sigma} < 0 \\ \lambda \geqslant 0 & 当\sigma = g\ 和\ \dot{\sigma} = 0 \end{cases} \tag{10.3.5}$$

式(10.3.5)可以表示为等价的形式

$$\lambda(\tau - \sigma) \leqslant 0 \quad \forall \tau \leqslant g, \quad \lambda\dot{\sigma} = 0$$

上述情况是在一维模型中讨论的，它也可以推广到三维情况．

设$\sigma = \{\sigma_{ij}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, i,j = 1,2,3\}$为应力张量．设泛函$F(\sigma)$是连续和凸的．令

$$F(\sigma) < 0 \quad 为弹性区域 \tag{10.3.6}$$

$$F(\sigma) = 0 \quad 为塑性区域 \tag{10.3.7}$$

那么$\mathbf{R}^6$中使得$F(\sigma) \leqslant 0$的区域为闭凸集.例如

(1) Von Mises模型

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D - K^2 \tag{10.3.8}$$

这里K是常数，下标相同表示求和约定.

(2) Tresca模型

$$F(\sigma_{ij}) = \sup_{I,J,I \neq J} |\sigma_I - \sigma_J| - g \tag{10.3.9}$$

共中σ_I为$\{\sigma_{ij}\}$的特征值，g为正的常数.

显然，由式(10.3.9)定义的泛函是凸的．定义应力向量Σ_i

$=\sigma_{ij}n^j$. 这里 $\{n^j\}$ 为任一单位向量，那么 Σ 可以正交分解为沿 n 方向分量 Σ_n 和与 n 相垂直方向分量 Σ_T. 如果过渡到主轴上，利用式(10.3.9)，则 $F(\sigma)\leqslant 0$ 等价于

$$\Sigma_T \leqslant g \quad \forall n,\ |n|=1$$

映照 $\sigma\to\Sigma_T$ 对每个 n 是线性的，设 $\sigma_{ij}^{(1)}$，$\sigma_{ij}^{(2)}$ 分别为对应于 $\Sigma_T^{(1)}$，$\Sigma_T^{(2)}$ 的应力，$\alpha\in(0,1)$，那么 $\forall|\Sigma_T^{(1)}|\leqslant g$，$|\Sigma_T^{(2)}|\leqslant g$，且

$$|\alpha\Sigma_T^{(1)}+(1-\alpha)\Sigma_T^{(2)}|\leqslant\alpha|\Sigma_T^{(1)}|+(1-\alpha)|\Sigma_T^{(2)}|\leqslant g$$

所以式(10.3.9)定义的F是凸的.

对于三维情形, 式(10.3.4)的相应形式是

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}+\lambda_{ij} \tag{10.3.10}$$

$$A_{ijkl}=A_{ijkl}=A_{klij}\ \text{为弹性系数张量} \tag{10.3.11}$$

$$A_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\geqslant\alpha\sigma_{ij}\sigma^{ij}\quad \alpha=\text{const.}>0 \tag{10.3.12}$$

$A_{ijkl}\sigma^{kl}$ 是变形速度张量的弹性部分，而 λ_{ij} 是塑性变形速度，它满足

$$\lambda^{ij}(\tau_{ij}-\sigma_{ij})\leqslant 0\quad \forall\tau,\ F(\tau)\leqslant 0 \tag{10.3.13}$$

$$\lambda_{ij}\dot{\sigma}^{ij}=0 \tag{10.3.14}$$

如果σ_{ij}关于t是可微的, 那么在式(10.3.13)中取

$$\tau_{ij}=\sigma_{ij}(t+\Delta t)\text{或}\tau_{ij}=\sigma_{ij}(t-\Delta t)$$

则有(注意指标可上升和下降)

$$\lambda_{ij}\dot{\sigma}^{ij}(t)\leqslant 0\ \text{或}\ \lambda^{ij}\dot{\sigma}_{ij}(t)\geqslant 0$$

因此, 完全塑性弹性的本构方程是

$$\begin{cases} F(\sigma) \leqslant 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij}(\tau^{ij} - \sigma^{ij}) \leqslant 0 \quad \forall \tau,\ F(\tau) \leqslant 0 \end{cases} \tag{10.3.15}$$

现在我们给出另一种本构方程，即粘弹塑性本构方程．为此设

$$K = \{\sigma \in \mathbf{R}^6:\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ F(\sigma_{ij}) \leqslant 0\} \tag{10.3.16}$$

其中 F 为凸泛函．设 $\sigma \to P_K(\sigma)$ 为 $\mathbf{R}^6$ 在 K 上的正交投影算子．则本构方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) = A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij} = 0, \quad 如果 F(\sigma) \leqslant 0 \\ \lambda_{ij} = (\sigma_{ij} - (P_K\sigma)_{ij}) / 2\mu,\ 如果 F(\sigma) \geqslant 0 \end{cases} \tag{10.3.17}$$

这里粘性系数μ为正常数.如果$\dot{\sigma} = 0$, 那么

$$\sigma_{ij} = (P_K\sigma)_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) \tag{10.3.18}$$

它很像Navier－Stokes方程.

当F由式(10.3.8)给出(即Von Mises模型), 那么

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) = A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij} = 0, \quad 若 F(\sigma) < 0 \\ \lambda_{ij} = (\sigma_{II}^{1/2} - k)\sigma_{ij}^{D} / (2\mu\sigma_{II}^{1/2}) \end{cases} \tag{10.3.19}$$

其中σ_{ij}^{D}表示应力张量的偏差子

$$\sigma_{II} = \sigma_{ij}^{D}\sigma^{Dij} / 2 \tag{10.3.20}$$

令

$$f_\mu(\tau) = (\tau_{ij} - (P_k\tau)^{ij})(\tau_{ij} - (P_k\tau)_{ij}) / 4\mu \tag{10.3.21}$$

那么式(10.3.17)等价于

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}(\dot{\mathrm{u}}) = A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + \lambda_{ij} \\ f_{\mu}(\tau) - f_{\mu}(\sigma) \geqslant \lambda_{ij}(\tau^{ij} - \sigma^{ij}) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}^6\end{cases} \tag{10.3.22}$$

设 u_i 为位移向量，σ_{ij} 为介质内部的应力张量，那么弹塑性的动力学问题是：本构方程为 (10.3.22). 运动方程为

求u和σ_{ij}，使得

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma^{ij} + f^i \qquad \text{在}\Omega \times [0,T]\text{内} \tag{10.3.23}$$

$$\begin{cases} u^i\big|_{\Gamma_u} = U^i & \text{在}\Gamma_u \times [0,T]\text{上} \\ \sigma^{ij} n_j\big|_{\Gamma_f} = S^i & \text{在}\Gamma_f \times [0,T]\text{上}\end{cases} \tag{10.3.24}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o, \ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = u_1, \ \sigma(0) = \sigma_o \tag{10.3.25}$$

其中$\Omega \subset \mathbf{R}^3$是一开集，$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_f$，$\Gamma_u \bigcap \Gamma_f$ 是空集.

似稳情况是，本构方程为式 (10.3.22)，而平衡方程为

$$\mathrm{div}\sigma + f = 0 \tag{10.3.26}$$

以及边界条件(10.3.24)，初值条件是

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o, \ \sigma(0) = \sigma_o$$

设 $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$，$\mathbf{u}(t) = \displaystyle\int_o^t \mathbf{v}(s)ds + \mathbf{u}_o$. 为了使边界条件齐次化.

设 σ^o 和 v^o 满足

$$\begin{cases} \sigma^o_{ij} n^j \big| = s_i, \ \sigma^o(0) = \sigma_o & (10.3.27) \\ v(0) = u_i \quad \text{在}\Gamma_u \times [0,T]\text{上} & (10.3.28) \\ v(0) = u_1 & (10.3.29)\end{cases}$$

令 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}^o$，$\sigma' = \sigma - \sigma^o$，那么由式 (10.3.22) 和 (10.3.23) 可以得到

$$
\begin{cases} A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + (f_\mu(\sigma))_{ij} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v}'^i - \nabla_j \sigma^{ij} = f^i \end{cases} \tag{10.3.30}
$$

从而 $\mathbf{v}'$，σ' 满足

$$
A_{ijkl}\dot{\sigma}'^{kl} + (f_\mu(\sigma' + \sigma^o))_{ij} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}') = g_{ij} \tag{10.3.31}
$$

$$
\mathbf{v}'^i - \nabla_{,j}\sigma'^{ij} = h_i \tag{10.3.32}
$$

$$
g_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^o) - A_{ijkl}\sigma^{okl} \tag{10.3.33}
$$

$$
h_i = f_i - (v_i^o)' + {}_i\nabla^j \sigma_{ij}^o
$$

而它的边界条件和初始条件变为齐次，如果略去上标“′”和“0”，则

$$
\begin{cases} A_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl} + (f'_\mu(\sigma + \sigma^o))_{ij} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = g_{ij} \\ \dot{\mathbf{v}}_i - \nabla^j \sigma_{ij} = f_i \end{cases} \tag{10.3.34}
$$

$$
\sigma_{ij} n^j \big|_{\Gamma_f} = 0, \quad v_i \big|_{\Gamma_u} = 0 \tag{10.3.35}
$$

$$
\sigma(0) = 0, \ \mathbf{v}(0) = 0 \tag{10.3.36}
$$

引入双线性形式

$$
A(\sigma,\tau) = \int_\Omega A_{ijkl}\sigma^{kl}\tau^{ij} dx \tag{10.3.37}
$$

和Соболев空间

$$
\begin{cases} \mathbf{K} = \{\tau = (\tau_{ij}); \ \tau_{ij} = \tau_{ji}, \ \tau_{ij} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \\ \mathbf{H} = \{\mathbf{v} = (v_i): \ v_i \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \end{cases} \tag{10.3.38}
$$

相应的内积是

$$(\sigma,\tau)=\int_\Omega \sigma_{ij}\tau^{ij}dx,\ (\mathbf{v},\mathbf{w})=\int_\Omega u_i w^i dx$$

又引入

$$\begin{cases}\Theta=\{\tau\in \mathbf{K}:\ \mathrm{div}\tau\in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \ \tau_{ij}n^i\big|_{\Gamma_f}=0\}\\ \mathbf{V}=\{\mathbf{v}\in \mathbf{H}:\ \mathrm{div}\mathbf{v}\in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \ v_i\big|_{\Gamma_u}=0\}\end{cases}\tag{10.3.39}$$

那么成立Green公式

$$(\varepsilon(\mathbf{v}),\tau)+(\mathbf{v},\mathrm{div}\tau)=0\quad \forall \mathbf{v}\in \mathbf{V},\tau\in \mathbf{H}\tag{10.3.40}$$

从而初边值问题(10.3.34).(10.3.35)的正则解$\sigma,\mathbf{v}$满足

$$\begin{cases}A(\dot\sigma,\tau)+(f'_\mu(\sigma+\sigma^o),\tau)+(\mathbf{v},\mathrm{div}\tau)=(\mathbf{g},\tau)\quad \forall \tau\in \mathbf{H}\\ (\mathbf{v}',\mathbf{w})+(\sigma,\varepsilon(\mathbf{w}))=(\mathbf{h},\mathbf{w})\quad \forall \mathbf{w}\in \mathbf{V}\end{cases}\tag{10.3.41}$$

反之，若问题(10.3.41)有正则解，则同样(10.3.34)成立且

$$\int_\Gamma v_i\tau^{ij}n_j ds=0,\quad \int_\Gamma \sigma_{ij}n^j w^i ds=0$$

即

$$\int_{\Gamma_u} v^i\tau_{ij}n^j ds=0,\quad \int_{\Gamma_f}(\sigma_{ij}n^j)w^i ds=0$$

此即式(10.3.35).

$$\begin{cases}A(\dot\sigma,\tau)+(f'_\mu(\sigma+\sigma^o),\tau)+(\mathbf{v},\mathrm{div}\tau)=(\mathbf{g},\tau)\quad \forall \tau\in \Theta\\ (\sigma,\varepsilon(\mathbf{w}))=(\mathbf{h},\mathbf{w})\quad \forall \mathbf{w}\in \mathbf{V}\\ \sigma(0)=0\end{cases}\tag{10.3.42}$$

定理10.3.1　设

$$\mathbf{g},\mathbf{g}'\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{K})\tag{10.3.43}$$

$$\mathbf{h},\mathbf{h}'\in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})\tag{10.3.44}$$

σ^o与t无关

那么存在唯一的一对$(\sigma,\mathbf{v})$，使得

$$\sigma,\dot{\sigma}\in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathrm{K}) \tag{10.3.46}$$

$$\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}}\in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathrm{H}) \tag{10.3.47}$$

$$\mathrm{div}\sigma\in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{L}^{2}(\Omega)) \tag{10.3.48}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}\in \mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{L}^{2}(\Omega)) \tag{10.3.49}$$

并且满足式(10.3.41)和(10.3.36).

证 先证唯一性，设 $(\sigma,\mathbf{v})$, $(\sigma_*,\mathbf{v}_*)$ 为对应的两个解．令 $\hat{\sigma}=\sigma-\sigma_*$, $\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_*$. 对应的方程相减之后得

$$A(\hat{\sigma}',\tau)+(\hat{\mathbf{v}}',\mathbf{w})+(\mathbf{f}_{\mu}'(\sigma+\sigma_o)-\mathbf{f}_{\mu}'(\sigma_*+\sigma_o),\tau)$$
$$+(\hat{\mathbf{v}},\mathrm{div}\tau)+(\hat{\sigma},\varepsilon(\mathbf{w}))=0 \tag{10.3.50}$$

取 $\tau=\hat{\sigma}$, $\mathbf{w}=\hat{\mathbf{v}}$, 应用 Green 公式 (10.3.40) 和 $\sigma\to\mathbf{f}_{\mu}'(\sigma+\sigma_o)$ 是单调的．有

$$A(\hat{\sigma}',\hat{\sigma})+(\hat{\mathbf{v}}',\hat{\mathbf{v}})\leqslant 0 \tag{10.3.51}$$

$$\hat{\sigma}(0)=0,\ \hat{\mathbf{v}}(0)=0$$

由此得 $\hat{\sigma}=0,\ \hat{\mathbf{v}}=0.$

设

$$[\sigma,\tau]=(\mathrm{div}\sigma,\mathrm{div}\tau) \tag{10.3.52}$$

$$((\mathbf{v},\mathbf{w}))=\int_{\Omega}\mathrm{grad}\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{w}dx \tag{10.3.53}$$

设 $\eta>0$ 为任一参数，考察正则性问题

$$\begin{cases}A(\sigma',\tau)+(\mathbf{f}_{\mu}'(\sigma+\sigma^{o}),\tau)+\eta[\sigma,\tau]+(\mathbf{v},\mathrm{div}\tau)=(\mathbf{g},\tau)\\(\mathbf{v}',\mathbf{w})+\eta((\mathbf{v},\mathbf{w}))+(\sigma,\varepsilon(\mathbf{w}))=(\mathbf{h},\mathbf{w})\end{cases} \tag{10.3.54}$$

$$\sigma(0)=0,\ \mathbf{v}(0)=0 \tag{10.3.55}$$

在式(10.3.54)中，取 $\tau=\sigma+\sigma^{o}$, $\mathbf{w}=\mathbf{v}$, 注意到

$$(f'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o}),\ \sigma+\sigma^{o})\geqslant 0,$$

$$(\mathbf{v},\mathrm{div}\sigma) + (\sigma,\varepsilon(\mathbf{v})) = 0$$

可以得到

$$A(\sigma',\sigma+\sigma^{o}) + \eta[\sigma,\sigma+\sigma^{o}] + (v',\mathbf{v}) + \eta((\mathbf{v},\mathbf{v}))$$
$$\leqslant (\mathbf{g},\sigma+\sigma^{o}) + (\mathbf{h},\mathbf{v}) \tag{10.3.56}$$

和第九章中证明方法一样，由于σ^{o}与t无关，容易从上式得

$$\|\sigma\|_{L^{\infty}(0,T;\,K)} < +\infty \quad \eta\to 0 \tag{10.3.57}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{L^{\infty}(0,T;\,H)} < +\infty \quad \eta\to 0 \tag{10.3.58}$$

$$\eta^{1/2}\|\sigma\|_{L^{2}(0,T;\,H)} < +\infty \quad \eta\to 0 \tag{10.3.59}$$

$$\eta^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{L^{2}(0,T;\,V)} < +\infty,\ \eta\to 0 \tag{10.3.60}$$

在式(10.3.54)中令$t=0$, 利用式(10.3.55)得

$$\begin{cases} A(\sigma'(0),\tau) = (\mathbf{g}(0) - \mathbf{f}'_{\mu}(\sigma^{o}),\tau) \\ (\mathbf{v}'(0),\mathbf{w}) = (\mathbf{h}(0),\mathbf{w}) \end{cases} \tag{10.3.61}$$

从而

$$\|\sigma'(0)\|_{K} < +\infty,\ \|\mathbf{v}'(0)\|_{H} < +\infty,\ 当\eta\to 0 \tag{10.3.62}$$

对式(10.3.54)关于t再微分一次, 可以得到

$$\begin{cases} A(\sigma'',\tau) + ((\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o}))',\tau) + \eta[\sigma',\tau] + (\mathbf{v}',\mathrm{div}\tau) = (\mathbf{g}',\tau) \\ (\mathbf{v}'',\mathbf{w}) + \eta((\mathbf{v}',\mathbf{w})) + (\sigma',\varepsilon(\mathbf{w})) = (\mathbf{h}',\mathbf{w}) \end{cases} \tag{10.3.63}$$

取$\tau=\sigma'$, $\mathbf{w}=\mathbf{v}'$, 相加以后得

$$A(\sigma'',\sigma') + \eta[\sigma',\sigma'] + (\mathbf{v}'',\mathbf{v}') + \eta((\mathbf{v}',\mathbf{v}')) + ((\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o}))',\sigma') \tag{10.3.64}$$

因为

$$((\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o}))',\sigma^{1}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^{2}}(\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma(t+\Delta t)+\sigma^{o})$$

$$-\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma(t)+\sigma^{o}),\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t))\geqslant 0 \tag{10.3.65}$$

所以

$$A(\sigma'',\sigma')+\eta[\sigma',\sigma']+(\mathbf{v}'',\mathbf{v}')+\eta((\mathbf{v}',\mathbf{v}'))$$

$$\leqslant(g',\mathbf{v}')+(\mathbf{h}',\mathbf{v}') \tag{10.3.66}$$

利用式(10.3.62)，由式(10.3.66)可得

$$\|\sigma'\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{K})}<+\infty,\quad \eta\to 0 \tag{10.3.67}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{H})}<+\infty,\quad \eta\to 0 \tag{10.3.68}$$

$$\eta^{1/2}\|\sigma'\|_{\mathbf{L}^{2}(0,T;\ \mathbf{H})}<+\infty,\quad \eta\to 0 \tag{10.3.69}$$

$$\eta^{1/2}\|\mathbf{v}'\|_{\mathbf{L}^{2}(0,T;\ \mathbf{V})}<+\infty,\quad \eta\to 0 \tag{10.3.70}$$

如此，令$\eta\to 0$，由以上估计推知

$$\|\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o})\|_{\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{K})}<+\infty,\quad \eta\to 0 \tag{10.3.71}$$

同样，可以选出σ_{η},v_{η}的子序列，使得当$\eta\to 0$时，有

$\sigma_{\eta},\sigma'_{\eta}$分别在$\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{K})$中弱星收敛于$\sigma,\sigma'$ (10.3.72)

$\mathbf{v}_{\eta},\mathbf{v}'_{\eta}$分别在$\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{H})$中弱星收敛于$\mathbf{v},\mathbf{v}'$ (10.3.73)

$\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma_{\eta}+\sigma^{o})$在$\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\ \mathbf{K})$中弱星收敛于$\chi$ (10.3.74)

于是我们可以在式(10.3.54)中进行极限过渡，得

$$\begin{cases}A(\sigma',\tau)+(\chi,\tau)+(v,\mathrm{div}\,\tau)=(\mathbf{g},\tau)\\(\mathbf{v}',\mathbf{w})+(\sigma,\varepsilon(\mathbf{w}))=(\mathbf{h},\mathbf{w})\end{cases} \tag{10.3.75}$$

同样由单调算子性质，容易证明$\chi=\mathbf{f}'_{\mu}(\sigma+\sigma^{o})$，由此得到解的存在性．证毕．

对于似稳情形，有类似的结论．

定理 10.3.2　除了定理 10.3.1 的假设外，设Γ_{u}具有正测度，$\mathbf{h}(0)=0$，那么存在唯一的一对函数$(\sigma,\mathbf{v})$，使得

$\sigma \in L^{\infty}(0,T;H)$ ， $\sigma' \in L^{\infty}(0,T;K)$, $v \in L^{\infty}(0,T;V)$
并且(σ,v)满足式(10.3.42).

证明从略.

§ 10.4 Maxwell方程组

Maxwell 方程组是电磁现象中的基本方程，设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为开集，可以是有界域，也可以是外部区域，$\partial\Omega = \Gamma$. 设 q 为 Ω 中电磁密度，J 为电流密度，G 为外界流入 Ω 之电流密度 .$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ 为介质之介电常数，$\mu = \{\mu_{ij}\}$ 为介质磁导率，$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$, $\hat{\mu} = \mu^{-1}$ 分别为 ε, μ 之逆矩阵，σ 为介质电导率 .

ε, μ 是 Ω 上正有界可测函数，它们满足

$$\left.\begin{array}{l} \exists \varepsilon_1 > 0,\quad \forall \xi \in \mathbf{R}^3,\ \forall x \in \Omega,\ \xi^i \varepsilon_{ij} \xi^j \geqslant \varepsilon_1 |\xi|^2 \\ \exists \mu_{1>},\quad \forall \xi \in \mathbf{R}^3,\quad \forall x \in \Omega,\quad \xi^i \mu_{ij} \varepsilon^j \geqslant \mu_1 |\xi|^2 \end{array}\right\} \tag{10.4.1}$$

其中下标相同者表示求和, $|\xi|$为Euclead范数

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2$$

对于各向同性均匀介质，尤其是外部问题，常常假定存在 $r_e > 0$, $\varepsilon_o > 0$, $\mu_o > 0$, 使得 $B_\varepsilon \subset \Omega$($B_e$ 为以原点为中心，ε 为半径之球)

$$\forall x \in B_\varepsilon,\ \varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_o \delta_{ij},\ \mu_{ij}(x) = \mu_o \delta_{ij} \tag{10.4.2}$$

那么, Maxwell方程组是

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} - \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{G} \tag{10.4.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{10.4.4}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = q \tag{10.4.5}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{10.4.6}$$

显然，(10.4.6) 是 (10.4.4) 的结果．只要初始时 $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$，而式 (10.4.5) 可看作是电荷密度的定义．

本构方程是

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{10.4.7}$$

Ohm定律

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{10.4.8}$$

向量 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ 为电场强度，$\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$ 为电感应强度，$\mathbf{H} = (H_1, H_2 H_3)$ 为磁场强度，$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ 为磁感应强度．本构方程 (10.4.7) 反映了它们之间的关系．

通过不同介质之交界面，则 $\mathbf{D}$ 沿法向方向是间断的，$\mathbf{E}$ 沿切向方向是连续的，$\mathbf{H}$ 沿切向方向是间断的，$\mathbf{B}$ 沿法向方向是连续的．设 Σ 为不同介质之交界面，$\mathbf{n}$ 为单位法线向量，J_s，g_s 分别为 Σ 上电流密度和电荷密度，则

$$(\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = q_s,\ (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在}\Sigma\text{上} \tag{10.4.9}$$

$$(\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = 0,\ (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在}\Sigma\text{上} \tag{10.4.10}$$

边界条件可以是全反射条件

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{D} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在}\Gamma\text{上} \tag{10.4.11}$$

或

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0.\ \mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在}\Gamma\text{上} \tag{10.4.12}$$

如此，本质上，归结为求电感应强度和磁感应强度，使得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D} - \mathrm{rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}) = \mathbf{G}_1 & \text{在}\Omega\text{内} \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2 & \text{在}\Omega\text{内} \end{cases} \tag{10.4.13}$$

$$\mathbf{D}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{D}_o(x),\quad \mathbf{B}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{B}_o(x) \tag{10.4.14}$$

这里G_1，G_2为已知，满足

$$\mathrm{div} G_2 = 0, \quad G_2 \cdot n = 0 \tag{10.4.15}$$

引入Hilbert空间(参看§4.6)

$$H(\mathrm{rot},\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{rot} v \in L^2(\Omega)^3\}$$

$$\|v\|^2_{H(\mathrm{rot},\Omega)} = \|v\|^2_o + \|\mathrm{rot} v\|^2_o$$

$$H_o(\mathrm{rot},\Omega) = \{v \in H(\mathrm{rot},\Omega), \quad n \times v|_\Gamma = 0\}$$

$$H(\mathrm{div},\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3, \ \mathrm{div} v \in L^2(\Omega)\}$$

$$\|v\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)} = \|v\|^2_o + \|\mathrm{div} v\|^2_o$$

那么，我们知道在$\overline{\Omega}$上一阶连续可导并且在$\overline{\Omega}$有紧支集的函数空间$C^1_o(\Omega)^3$在$H(\mathrm{rot},\Omega)$内稠密，在$H(\mathrm{div},\Omega)$内也稠密，并且$u \to n \times u|_\Gamma$可以延拓为$H(\mathrm{rot},\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)^3$线性连续算子; $u \to u \cdot n|_\Gamma$可以延拓为$H(\mathrm{div},\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)^3$线性连续算子，定义Hilbert空间

$$H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3, \ \mathrm{rot} v \in L^2(\Omega)^3, \ \mathrm{div} v \in L^2(\Omega), \quad n \cdot v|_\Gamma = 0\}$$

$$\|v\|^2_{H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega)} = \|v\|^2_o + \|\mathrm{rot} v\|^2_o + \|\mathrm{div} v\|^2_o$$

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^3, \ \mathrm{rot}(\tilde{\mu} v) \in L^2(\Omega)^3, \ \mathrm{div} v = 0, \quad n \cdot v|_\Gamma = 0\}$$

$$\|v\|^2_H = \|v\|^2_o + \|\mathrm{rot}(\tilde{\mu} v)\|^2_o$$

那么有(参看§4.6)

引理 10.4.1 向量空间$\{\varphi \in C^1(\overline{\Omega})^3 : \ n \cdot \varphi|_\Gamma = 0\}$在$H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega)$中稠密．

定理10.4.1 $H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega) = H^1(\Omega)^3$

证 由于引理 10.4.1，只须证明范数 $\|\cdot\|_{H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega)}$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价就可以．而

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3$$

是显然的，故我们还要证明 $\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{H(\mathrm{rot},\mathrm{div},\Omega)}$．而本质上，只须证

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\varphi dx \leqslant c\int_\Omega (|\mathrm{div}\varphi|^2 + |\mathrm{rot}\varphi|^2 + |\varphi|^2)dx$$

就够了．为此注意，$\forall \varphi \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})^3$，有

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\varphi dx = \int_\Omega (|\mathrm{div}\varphi|^2 + |\mathrm{rot}\varphi|^2)dx$$

$$+ \oint_\Gamma \mathbf{n} \cdot \varphi\mathrm{div}\varphi + (\varphi\mathrm{grad})\varphi \cdot \mathbf{n}ds$$

如果 $\varphi \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$．则面积分项只剩下

$$-\oint_\Gamma (\varphi\mathrm{grad})\varphi \cdot \mathbf{n}ds = -\oint_\Gamma (\varphi\mathrm{grad})(\varphi \cdot \mathbf{n})ds$$

$$+ \oint_\Gamma (\varphi\mathrm{grad})\mathbf{n} \cdot \varphi ds$$

这里 $x \to \mathbf{n}(x)$ 连续延拓到 Γ 的邻域内，由于 $\varphi \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$，故 $(\varphi\mathrm{grad})(\mathbf{n} \cdot \varphi)|_\Gamma = 0$，

故

$$-\oint_\Gamma (\varphi\mathrm{grad})\varphi \cdot \mathbf{n}ds = \oint_\Gamma (\varphi\mathrm{grad})\mathbf{n} \cdot \varphi ds$$

从而

$$\int_\Omega |\varphi\mathrm{grad}\varphi|^2 dx = \int_\Omega (|\mathrm{div}\varphi|^2 + |\mathrm{rot}\varphi|^2)dx + \oint_\Omega (\varphi\mathrm{grad})\mathbf{n} \cdot \varphi ds$$

所以

$$|\varphi|_1^2 = \int_\Omega (|\text{div}\varphi|^2 + |\text{rot}\varphi|^2)dx \quad \forall\varphi\in \mathbf{H}_o^1(\Omega)^3 \tag{10.4.16}$$

注意到

$$|\oint_\Gamma (\varphi \text{grad})\mathbf{n}\cdot\varphi ds| \leqslant c\oint_\Gamma |\varphi|^2 ds \tag{10.4.17}$$

另外，$\forall\psi\in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$，$\forall\varepsilon>0$存在$c(\varepsilon)>0$，使得

$$\int_\Gamma \psi^2 ds \leqslant \varepsilon\int_\Omega |\text{grad}\psi|^2 dx + c(\varepsilon)\int_\Omega \psi^2 dx \tag{10.4.18}$$

由(10.4.17)，(10.4.18)则

$$|\int_\Gamma (\varphi \text{grad})\mathbf{n}\cdot\varphi ds| \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\text{grad}\varphi|^2 dx + c\int_\Omega |\varphi|^2 dx$$

从而得

$$\int_\Omega |\text{grad}\varphi|^2 dx \leqslant 2\int_\Omega [|\text{rot}\varphi|^2 + |\text{div}\varphi|^2]dx + \int_\Omega |\varphi|^2 dx \tag{10.4.19}$$

证毕

定理 10.4.2 $\forall \mathbf{v}\in\mathbf{H}$，令 $\mathbf{v}_i$ 为 $\mathbf{v}$ 在 $\Omega_i\subset\Omega$ 上的限制，μ 在 Ω_i 上为常数，那么

$$\mathbf{v}_i\in\mathbf{H}^1(\Omega_i)^3,\ \|\mathbf{v}_i\|_{1,\Omega_i} \leqslant c\|\mathbf{v}\|_o \tag{10.4.20}$$

证明请参看[25]

再引入Hilbert空间H

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \times \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \tag{10.4.21}$$

定义H的内积：$\forall\Phi=(\varphi,\psi)\in\mathbf{H}$，$\Phi^* = (\varphi_*,\psi_*)\in\mathbf{H}$

$$(\Phi,\Phi^*)_\mathbf{H} = (\hat{\varepsilon}\varphi,\varphi_*) + (\hat{\mu}\psi,\varphi_*) \tag{10.4.22}$$

由于式(10.4.1)，那么(10.4.22)等价于

$$(\varphi,\varphi_*)+(\varphi,\psi_*)$$

定义线性算子$A\in\mathcal{L}(D(A),H)$:

$$D(A)=\{\Phi:\ \Phi=(\varphi,\psi)\in H,\ \mathrm{rot}(\hat\varepsilon\varphi)\in L^2(\Omega)^3,$$
$$\mathrm{rot}(\hat\mu\psi)\in L^2(\Omega)^3,\ \ n\times\varphi|_\Gamma=0\} \tag{10.4.23}$$

$$\forall\Phi_j\in D(A),\qquad A\Phi=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{rot}\\ \mathrm{rot} & 0\end{bmatrix}M\Phi$$
$$=[-\mathrm{rot}(\hat\mu\psi),\ \mathrm{rot}(\hat\varepsilon\varphi)]$$

这里

$$M=\begin{bmatrix}\hat\varepsilon & 0\\ 0 & \hat\mu\end{bmatrix}$$

引理10.4.2 $D(A)$在H中稠密，A是闭的，且

$$A^*=-A,\ D(A^*)=D(A) \tag{10.4.24}$$

证 记$\Pi D(\Omega_i)$是$D(\Omega)$中的元素Φ在Ω_i上限制$\Phi^i\in D(\Omega_i)^6$，因而$(\Pi D(\Omega_i))^6$在H中稠密，并且$(\Pi D(\Omega_i))^6\subset D(A)$. 所以$D(A)$在H中稠密.

现在证明A是闭的，设$\Phi_j\in D(A)$, $\Phi_j=(\varphi_j,\psi_j)$在H中收敛于$\Phi=(\varphi,\psi)$, $A\Phi_j$在H中收敛于ψ，从而

$$\text{在}L^2(\Omega)^3\text{中}\quad \varphi_j\to\varphi,\ \psi_j\to\psi$$

并且$\mathrm{rot}(\hat\mu\psi_j)$, $\mathrm{rot}(\hat\varepsilon\varphi_j)$. 在$L^2(\Omega)^3$中收敛. 但由于$\mathrm{rot}(\hat\mu\psi_j)\to\mathrm{rot}(\hat\mu\psi)$以及$\mathrm{rot}(\hat\varepsilon\psi_j)\to\mathrm{rot}(\hat\varepsilon\varphi)$在$D'(\Omega)^3$中成立，因而

$$\mathrm{rot}(\hat\varepsilon\varphi)\in L^2(\Omega)^3,\ \mathrm{rot}(\hat\mu\psi)\in L^2(\Omega)^3$$

进而，设φ_j在Ω_1上的限制φ_j', $\varphi_j'\to\varphi'$在$H(\mathrm{rot},\Omega_1)$中成立，从而$n\times\varphi_j'\big|_\Gamma\to n\times\varphi'\big|_\Gamma$在$H^{-1/2}(\Gamma^3)$中成立. 所以$n\times\varphi'\big|_\Gamma$

$=0$，就得到 $\Phi\in D(\mathrm{A})$.

我们也可以这样描述 $D(\mathrm{A})$. 设 $\Phi=(\varphi,\psi)$, $\Phi^i=(\varphi^i,\psi^i)$ 为 $\Phi|_{\Omega_i}$，那么 $\mathrm{rot}\varphi^i$; $\mathrm{rot}\psi^i\in\mathrm{L}^2(\Omega_i)^3$. 另外设 Σ_{ij} 为 Ω_i 和 Ω_j 之交界面，那么在 Σ_{ij} 上成立 $\hat{\mu}_i\mathrm{n}\times\psi^i=\hat{\mu}_j\mathrm{n}\times\psi^j, \hat{\varepsilon}_i\mathrm{n}\times\varphi^i=\hat{\varepsilon}_j\times\varphi^j, \mathrm{n}\times\varphi^i|_\Gamma=0$. 相反，若 Φ 满足上述性质，则 $\Phi\in D(\mathrm{A})$.

设 $\Phi_*\in D(\mathrm{A}^*)$，即 $\Phi_*\in\mathrm{H}$ 使得 $\Phi\to(\mathrm{A}\Phi,\Phi_*)$ 在 $D(\mathrm{A})$ 上按 H 拓扑是连续的，特别 $\Phi\to(\mathrm{A}\Phi,\Phi_*)$ 在 $(\Pi\mathrm{D}(\Omega_i))^6$ 上按 H 拓朴是连续的. 另一方面，如果 $\Phi\in(\Pi\mathrm{D}(\Omega_i))^6$，我们有

$$(\mathrm{A}\Phi,\Phi_*)=-\sum_i(\hat{\mu}_i\psi^i_*,\mathrm{rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i_*))_{\Omega_i}+\sum(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i,\mathrm{rot}(\hat{\mu}_i\psi^i_*))_{\Omega_i} \tag{10.4.25}$$

从而推出

$$\mathrm{rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i_*)\in\mathrm{L}^2(\Omega_i)^3,\ \mathrm{rot}(\hat{\mu}_i\psi^i_*)\in\mathrm{L}^2(\Omega_i)^3 \tag{10.4.26}$$

由于 $\hat{\varepsilon},\hat{\mu}$ 分别为常数，故

$$\mathrm{rot}\varphi^i_*\in\mathrm{L}^2(\Omega_i)^3,\ \mathrm{rot}\psi^i_*\in\mathrm{L}^2(\Omega)^3 \tag{10.4.27}$$

设 $\Phi\in D(\mathrm{A})$, $\Phi^i\in\mathrm{C}^1_k(\overline{\Omega}_i)^6$，注意连接条件

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\Phi,\Phi_*)&=-\sum_i(\mathrm{rot}(\hat{\mu}_i\psi^i),\ \hat{\varepsilon}_i\varphi^i_*)_{\Omega_i}+\sum_i(\mathrm{rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i),\hat{\mu}_i\psi^i_*)_{\Omega_i}\\&=-\int_{\Sigma_{ij}}(\mathrm{n}\times\psi^I)\varphi^i_*\hat{\mu}_i\hat{\varepsilon}_i d\Sigma_{ij}\\&\quad+\int_{\Sigma_{ij}}(\mathrm{n}\times\varphi^i)\psi^i_*\hat{\varepsilon}_i\hat{\mu}_i d\Sigma_{ij}\end{aligned}$$

$$-\int_{\Gamma}(\mathbf{n}\times\psi^{i})\varphi^{i}_{*}\hat{\varepsilon}_{i}\hat{\mu}_{i}d\Gamma-(\hat{\mu}\varphi,\mathrm{rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_{*}))$$

$$+(\hat{\varepsilon}\varphi,\mathrm{rot}(\hat{\mu}\psi_{*})) \tag{10.4.28}$$

由 (10.4.27), (10.4.28) 中的体积分对 Φ 是连续的，因而对面积分也是连续的.

$$\begin{cases}\int_{\Sigma_{ij}}((\mathbf{n}\times\psi^{i})\psi^{i}_{*}\hat{\mu}_{i}\hat{\varepsilon}_{i}-(\mathbf{n}\times\psi^{j})\varphi^{j}_{*}\hat{\varepsilon}_{j}\hat{\mu}_{j})d\Sigma_{ij}\\ \int_{\Sigma_{ij}}((\mathbf{n}\times\varphi^{i})\psi^{i}_{*}\hat{\varepsilon}_{i}\hat{\mu}_{i}-(\mathbf{n}\times\varphi^{j})\psi^{j}_{*}\hat{\varepsilon}_{j}\hat{\mu}_{j})d\Sigma_{ij}\\ \int_{\Gamma}(\mathbf{n}\times\psi^{i})\varphi^{i}_{*}\hat{\varepsilon}_{i}\hat{\mu}_{i}d\Gamma\end{cases} \tag{10.4.29}$$

按H拓扑是连续的，

(10.4.29)中第一个积分

$$-\int_{\Sigma_{ij}}\{\hat{\varepsilon}_{j}\mathbf{n}\times\varphi^{i}_{*}-\varepsilon_{i}\ \mathbf{n}\times\varphi^{j}_{*}\}\hat{\mu}_{j}\psi^{j}d\Sigma_{ij}$$

它在H中连续当且仅当在Σ_{ij}上成立

$$\hat{\varepsilon}_{i}\mathbf{n}\times\varphi^{i}_{*}=\hat{\varepsilon}_{j}\mathbf{n}\times\varphi^{j}_{*}$$

同样，(10.4.29)中第二个积分导致在Σ_{ij}上成立

$$\hat{\mu}_{i}\mathbf{n}\times\psi^{i}_{*}=\hat{\mu}_{j}\mathbf{n}\times\psi^{j}_{*}$$

第三个积分导致 $\mathbf{n}\times\varphi^{\prime}_{*}\big|_{\Gamma}=0$.

因而$\Phi_{*}\in D(\mathrm{A})$和$\mathrm{A}\Phi_{*}=-\mathrm{A}\Phi$.相反；如果$\Phi\in D(\mathrm{A})$

$$(\mathrm{A}\Phi,\psi)_{\mathrm{H}}=-(\Phi,\mathrm{A}\psi)_{\mathrm{H}}$$

那么$\psi\in D(\mathrm{A})$.于是引理得证.证毕.

设

$$N\Phi=\{\sigma\hat{\varepsilon}\varphi,0\}\quad\Phi=(\varphi,\psi) \tag{10.4.30}$$

那么$N\in\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{H})$，设$\mathbf{U}=\{\mathbf{D},\mathbf{B}\}$，则 Maxwell 方程可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{U}}{dt}+N\mathbf{U}+\mathrm{A}\mathbf{U}=\mathbf{G}, & \mathbf{G}=(\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2) \quad (10.4.31)\\ \mathbf{n}\times\mathbf{D}=0 & \text{在}\Gamma\text{上} \quad (10.4.32)\\ \mathbf{B}(0)=\mathbf{B}_o,\ \mathbf{D}(0)=\mathbf{D}_o & \text{在}\Omega\text{上} \quad (10.4.33)\end{cases}$$

对应的弱形式是

$$\text{求}\mathbf{U}\in\mathbf{L}^{\infty}(0,T;\mathbf{H}) \tag{10.4.34}$$

$$\int_o^T[(-\mathbf{U},\frac{\partial\Phi}{\partial t})_{\mathbf{H}}-(\mathbf{U},A\Phi)_{\mathbf{H}}+(N\mathbf{U},\Phi)_{\mathbf{H}}]dt$$

$$=\int_o^T(\mathbf{G},\Phi)_{\mathbf{H}}dt+(\mathbf{U}_o,\Phi(0))_{\mathbf{H}} \tag{10.4.35}$$

其中检验函数Φ满足

$$\Phi\in\mathbf{L}^2(0,T;D(\mathrm{A})),\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}),\ \Phi(T)=0 \tag{10.4.36}$$

$$\mathbf{G}=(\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2)\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}),\ \mathbf{U}_o=\{\mathbf{D}_o,\mathbf{B}_o\}\in\mathbf{H}\text{给定} \tag{10.4.37}$$

那么

定理 10.4.3　问题(10.4.31)－(10.4.33)的弱解唯一存在．

证　先证存在性，显然$D(\mathrm{A})$是可分的，设Φ_1，Φ_2，$\cdots,\Phi_m,\cdots$是$D(\mathrm{A})$的基函数．所以$\{\Phi_i\}$是线性独立的，$\Sigma\xi_j\Phi_j$在$D(\mathrm{A})$中稠密．令$\mathbf{W}_m=\mathrm{Span}\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m\}$，而$\mathbf{U}_m(t)\in\mathbf{W}_m$，则(10.4.35)的 Galerkin 逼近问题是

$$(\mathbf{U}_m'(t),\Phi_j)_{\mathbf{H}}+(\mathrm{A}\mathbf{U}_m(t),\Phi_j)_{\mathbf{H}}+(NU_m(t),\Phi_j)_{\mathbf{H}}$$

$$=(\mathbf{G}(t),\Phi_j)_{\mathbf{H}} \tag{10.4.38}$$

$$\mathbf{U}_m(0)=\mathbf{U}_{om},\ \in\mathbf{W}_m,\ \|\mathbf{U}_{om}-\mathbf{U}_o\|_{\mathbf{H}}\to 0,\ m\to+\infty \tag{10.4.39}$$

由常微分方程理论可知，(10.4.37)－(10.4.38)在$[0,T]$上有唯一解，令

$$\mathbf{U}_n(t)=\sum_{j=1}^{m}k_{mj}(t)\Phi_j$$

在式(10.4.38)两边乘k_{mj}之后相加，并利用

$$(\mathrm{A}\mathbf{U}_m(t),\mathrm{AFH}\mathbf{U}_m(t))_{\mathbf{H}}=0$$

可以推出

$$(\mathbf{U}_m'(t),\mathbf{U}_m(t))_{\mathbf{H}}+(N\mathbf{U}_m(t),\mathbf{U}_m(t))_{\mathbf{H}}=(\mathbf{G}(t),\mathbf{U}_m(t))_{\mathbf{H}} \quad (10.4.40)$$

由于$N\in\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{H})$，所以

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{U}_m(t)\|_{\mathbf{H}}^2\leqslant C\|\mathbf{U}_m(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|\mathbf{G}(t)\|_{\mathbf{H}}\|\mathbf{U}_m(t)\|_{\mathbf{H}} \quad (10.4.41)$$

由于$\|\mathbf{U}_{om}\|_{\mathbf{H}}\leqslant C$，从而

$$\|\mathbf{U}_m(t)\|_{\mathbf{H}}^2\leqslant C_1+C_2\int_o^t\|\mathbf{U}_m(\sigma)\|_{\mathbf{H}}^2d\sigma \quad (10.4.42)$$

由Gronwall引理得

$$\|\mathbf{U}_m(t)\|_{\mathbf{H}}\leqslant C\quad(与m无关的常数) \quad (10.4.43)$$

由此知，存在$\mathbf{U}_m$之子序列$\mathbf{U}_k$使得

$$\mathbf{U}_m\to\mathbf{U}在\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})中弱星收敛 \quad (10.4.44)$$

设

$$\xi_j\in\mathbf{C}^1([0,T]),\ \xi_j(T)=0,\ \sum_{j=2}^{m_o}\xi_j\Phi_j=\psi \quad (10.4.45)$$

在式 (10.4.38) 中置 $m=k$，并且两边乘 ξ_j，$j\leqslant M_o\leqslant k$，按 j 求和，分部积分后，得

$$\int_o^T[-(\mathbf{U}_k,\frac{\partial\psi}{\partial t})_{\mathbf{H}}-(\mathbf{U}_k,\mathrm{A}^*\psi)_{\mathbf{H}}+(N\mathbf{U}_k,\psi)_{\mathbf{H}}]dt$$

$$=\int_o^T(\mathbf{G},\psi)_{\mathbf{H}}dt+(\mathbf{U}_{ok},\psi(o))_{\mathbf{H}} \quad (10.4.46)$$

由于式 (10.4.44) 和式 (10.4.39)，式对 (10.4.46) 两边可以进行极

限过渡，得到 U 满足式 (10.4.34),(10.4.35)，其中 $\Phi=\psi$ 由 (10.4.45) 决定的．至于对满足 (10.4.36) 的任一个函数 Φ，可以选择由 (10.4.45) 定义的 ψ_i 使得当 $i\to\infty$ 时，有

$$\|\psi_i-\Phi\|_{L^2(0,T,D(A))}\to 0,\ \|\psi_i'-\Phi'\|_{L^2(0,T;\ H)}\to 0$$

因而 (10.4.35) 对满足 (10.4.36) 的任一函数都成立．

现在证明唯一性，设 U 是 (10.4.35) 的解，其中 $G=0$，$U_o=0$，令 $\hat{U}$ 是 U 的延拓，使 $t<0$ 也有意义，在 (10.4.35) 中取 $\Phi=\zeta\psi$，ζ 是 $D((-\infty,T))$ 中的函数在 $[0,T]$ 上的限制，从而

$$\frac{d}{dt}(\hat{U},\psi)_H-(\hat{U},A\psi)_H+(N\hat{U},\psi)_H=0 \qquad (10.4.47)$$

在广义函数意义下成立．

设 $\tilde{U}$ 为 $\hat{U}$ 对于 $t>T$ 时之零延拓，我们得到在 $D'(R_t)$ 意义下成立．

$$\frac{d}{dt}(\tilde{U},\psi)_H-(\tilde{U},A\psi)_H+(N\tilde{U},\psi)_H=c\delta(t\tau) \qquad (10.4.48)$$

设 $\rho\in D(R_t)$，支集在 $[0,\varepsilon]$ 内．对 (10.4.48) 和 ρ 作卷积得

$$(\frac{d}{dt}(\tilde{U}*\rho),\psi)_H-(\tilde{U}*\rho,A\psi)_H+(N\tilde{U}*\rho,\psi)_H=c\rho(t-\tau) \qquad (10.4.49)$$

由于对于 $t\leqslant T$，$\rho(t-T)=0$．故

$$(\frac{d}{dt}(\tilde{U}*\rho),\psi)_H-(\tilde{U}*\rho,A\psi)_H+(N\tilde{U}*\rho,\psi)_H=0,\ t\leqslant T \qquad (10.4.50)$$

从上式推出，$\psi\to(\tilde{u}*\rho,A\psi)_H$ 在 $D(A)$ 上按 H 拓扑是连续的．因而 $\tilde{U}*\rho(t)\in D(A)$，这时我们可以在 (10.4.50) 中取 $\psi=\tilde{U}*\rho(t)$，利用 (10.4.24)，取 $w(t)=\tilde{U}*\rho(t)$ 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}}^2+(N\mathbf{w}(t),\mathbf{w}(t))_{\mathbf{H}}=0 \quad \forall t\leqslant T$$

$$\mathbf{w}=0 \quad t\leqslant 0$$

从而$\mathbf{w}=0$，因而

$$\tilde{\mathbf{U}}*\rho=0 \quad 在t\leqslant T内 \quad \forall\rho$$

所以$U=0$.证毕

引理10.4.3　设$f\in\mathbf{H}$，那么$\forall\lambda>0$，问题

$$(\mathsf{A}+\lambda)\mathbf{u}=\mathbf{f}$$

存在唯一解$\mathbf{U}\in D(\mathsf{A})$并且

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}}\leqslant\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}} \tag{10.4.51}$$

证　应用Galerkin方法，设$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m,\cdots$为$D(\mathsf{A})$的基函数，$\mathbf{U}_m\in\mathrm{Span}\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m\}$满足

$$((\mathsf{A}+\lambda)\mathbf{U}_m,\Phi_j)_{\mathbf{H}}=(\mathbf{f},\Phi_j)_{\mathbf{H}},\ 1\leqslant j\leqslant m \tag{10.4.52}$$

它有唯一解，设$\mathbf{U}_m=\sum_{j=1}^{m}\xi_j\Phi_j$，那么对(10.4.52)两边乘$\xi_j$后求和，并利用$(\mathsf{A}\mathbf{U}_m,\mathbf{U}_m)_{\mathbf{H}}=0$得

$$\lambda\|\mathbf{U}_m\|_{\mathbf{H}}^2=(\mathbf{f},\mathbf{U}_m)_{\mathbf{H}}$$

从而

$$\|\mathbf{U}_m\|_{\mathbf{H}}\leqslant\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}}$$

故可以选取子序列$\mathbf{U}_\mu$，使得$\mathbf{U}_\mu\to\mathbf{U}_*$在$\mathbf{H}$中弱收敛.

另一方面，由反对称性

$$\lambda(\mathbf{U}_\mu,\Phi_j)_{\mathbf{H}}-(\mathbf{U}_\mu,\mathsf{A}\Phi_j)_{\mathbf{H}}=(\mathbf{f},\Phi_j)_{\mathbf{H}}$$

求极限后得

$$\lambda(\mathbf{U}_*,\Phi_j)_{\mathbf{H}}-(\mathbf{U}_*,\mathsf{A}\Phi_j)_{\mathbf{H}}=(\mathbf{f},\Phi_j)_{\mathbf{H}}$$

由于Φ_j任意性，故

$$\lambda(\mathbf{U}_*,\Phi)_{\mathrm{H}}-(\mathbf{U}_*,\mathrm{A}\Phi)_{\mathrm{H}}=(\mathbf{f},\Phi)\quad\forall\Phi\in D(\mathrm{A})\tag{10.4.53}$$

从这里可以推出 $\Phi\rightarrow(\mathbf{U}_*,\mathrm{A}\Phi)_{\mathrm{H}}$ 在 $D(\mathrm{A})$ 上按 $\mathbf{H}$ 拓扑是连续的，因而 $\mathbf{U}_*\in D(\mathrm{A})$ 故有

$$((\mathrm{A}+\lambda)\mathbf{U}_*,\Phi)_{\mathrm{H}}=(\mathbf{f},\Phi)_{\mathrm{H}}\quad\forall\Phi\in D(\mathrm{A})$$

这就证明了 $\mathbf{U}_*$ 是 (6.4.50) 的解，取 $\Phi=\mathbf{U}_*$ 后，利用 $(\mathrm{A}\mathbf{U}_*,\mathbf{U}_*)_{\mathrm{H}}=0$ 便可以得到

$$\lambda\|\mathbf{U}_*\|_{\mathrm{H}}^2=(\mathbf{f},\mathbf{U}_*)$$

从这里可以得到(10.4.51)、以及解的唯一性.

利用引理10.4.3可以证明

引理 10.4.4 设 $\Phi^j\in\mathbf{L}^2(0,T;D(\mathrm{A}^j))$，$(\Phi^j)'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$，$\Phi^j(T)=0$. 而 $\Phi^j\rightarrow\Phi$ 在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$ 中收敛，$(\Phi^j)\rightarrow\Phi^1$ 在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$ 中收敛. 那么 $A^j\Phi^j\rightarrow\mathrm{A}\Phi$ 在 $\mathbf{L}^2(0,T;\mathrm{H})$ 中收敛. 其中 A^j 是介电常数为 ε^j 和磁导率为 μ^j 时所对应的算子.

现在我们来讨论在真空中 Maxwell 方程 Cauchy 问题. 这时介电常数和磁导率为常数. $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_o\delta_{ij}$，$\mu_{ij}=\mu_o\delta_{ij}$，并且 $q=0$，$J=0$，$\mathbf{G}=0$，那么 (10.4.31) − (10.4.33) 对应的 Cauchy 问题是

$$\mathbf{U}'+iA_o\mathbf{U}=0,\quad\mathbf{U}(0)=\mathbf{U}^o\tag{10.4.54}$$

这里算子 A_o 是自共轭的线性算子:

$$A_o=-iM\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{rot}\\ \mathrm{rot} & 0\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}\varepsilon_o^{-1}id & 0\\ 0 & \mu_o id\end{bmatrix}$$

而 id 记为3 × 3的单位矩阵.利用Fourier变换,并记

$$(\hat{A}_o\hat{\mathrm{U}})(p)=M\begin{bmatrix}0 & -px\\ px & 0\end{bmatrix}\hat{\mathrm{U}}(p),\quad p\in R^3$$

由于Fourier变换是H到H上的同构，所以(10.4.54)等价于

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{U}) + i\hat{A}_o\hat{U} = 0 \qquad \hat{U}(0) = \hat{U}^o \tag{10.4.55}$$

设 $P_o(\lambda)$ 为 A_o 之对应的谱族，$\hat{P}_o(\lambda)$ 为相应 Fourier 变换，由于 $pxpx = pp' - |p|^2$，于是

$$\varepsilon_o\mu_o\hat{A}_o^2(p) = |p|^2 id - \begin{bmatrix} pp' & 0 \\ 0 & pp' \end{bmatrix}$$

或者

$$\hat{A}_o(\hat{A}_o^2 - \frac{|\cdot|^2}{\varepsilon_o u_o} id) = 0 \tag{10.4.56}$$

于是我们得到特征值 $\lambda_o = 0$, $\lambda_{\pm 1}(p) = \pm |p| / \sqrt{\varepsilon_o\mu_o}$. 直接计算可知它们均是二重的. 对应的线性独立的特征向量分别是

$$(\lambda_o):\ V_{0,1}(p) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o}\,|p|}\begin{bmatrix} p \\ o \end{bmatrix},\quad V_{o,2}(p) = \frac{1}{\sqrt{\mu_o}\,|p|}\begin{bmatrix} o \\ p \end{bmatrix} \tag{10.4.57}$$

$$(\lambda_{\pm 1}):\ V_{\pm 1,j}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu_o\varepsilon_o}}\begin{bmatrix} \pm\sqrt{\mu_o}\, a_j(p) \\ \sqrt{\varepsilon_o}\, p_o x a_j(p) \end{bmatrix}, \qquad j = 1,2 \tag{10.4.58}$$

$$a_2(p) = a_1(p) x p_o, \qquad p' a_1(p) = 0, \qquad |a_1(p)| = 1$$

记 Q_o, Q_+, Q_- 分别为本征子空间，于是

$$Q_o(p) = \begin{bmatrix} p_o p'_o & 0 \\ 0 & p_o p'_o \end{bmatrix} \tag{10.4.59}$$

$$Q_{\pm}(p)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -p_o x p_o x & \mp\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}p_o x \\ \pm\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}p_o x & -p_o x p_o x \end{bmatrix} \tag{10.4.60}$$

容易验证

$$\begin{aligned} &Q_{-}(p)=Q_{+}(-p),\\ &\hat{A}_o(p)=[Q_{+}(p)-Q_{-}(p)]|p|/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\\ &\hat{A}_o^2=[Q_{+}(p)+Q_{-}(p)]|p|^2/\varepsilon_o\mu_o\\ &\hat{A}_o^3(p)=\hat{A}_o(p)|p|^2/\varepsilon_o\mu_o\\ &Q_{\pm}(p)\hat{A}_o(p)=\hat{A}_o(p)Q_{\pm}(p)\\ &\qquad=\pm Q_{\pm}(p)|p|/\sqrt{\varepsilon_o u_o}\\ &Q_o(p)\hat{A}_o(p)=\hat{A}_o(p)Q_o(p)=0 \end{aligned} \tag{10.4.61}$$

由此. 对任一固定的$p\in\mathbf{R}^3$，有

$$\hat{p}_o(\lambda,p)=H(\lambda+\frac{|p|}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}})Q_{-}(p)+H(\lambda)Q_o(p)$$
$$+H(\lambda-\frac{|p|}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}})Q_{+}(p)$$

其中$H(\cdot)$是Heaviside函数

$$H(s)=\begin{cases}1 & s\geqslant 0\\ 0 & s<0\end{cases}$$

令v为任一向量，$q_o\in S^2$，那么

$$\hat{\mathbf{U}}_{\lambda}(p,q_o)=Q_{+}(q_o)v\delta(p-\lambda\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\,q_o)$$

或

$$\mathbf{U}_\lambda(x,q_o) = Q_+(q_o)v\exp(i\lambda\sqrt{\varepsilon_o u_o}\,xq_o)/(2\pi)^{3/2}$$

为广义本征向量.定义

$$\hat{P}_o(\lambda) = H(\lambda + \frac{|\cdot|}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}})Q_- + H(\lambda)Q_o$$

$$+ H(\lambda - \frac{|\cdot|}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}})Q_+ \tag{10.4.62}$$

则$\hat{P}_o(\lambda)$是$\hat{A}_o$之谱族， 由 (10.4.62) 可以得到 A_o 之谱族为

$$P_o(x) = F^*\hat{P}_o(\lambda)F = H(\lambda)\Pi_o + \Pi(\lambda)$$

其中

$$\Pi_o = F^* Q_o F$$

$$(\Pi(\lambda)\mathbf{U})(x) = (\frac{1}{2\pi})^{3/2}\int_{|p|>-\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\lambda}\exp(ixp)(Q_-\hat{\mathbf{U}})(p)dp$$

$$+ (\frac{1}{2\pi})^{3/2}\int_{|p|<\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\lambda}\exp(ixp)(Q_+\hat{\mathbf{U}})(p)dp$$

现在我们来推导$A_o - \lambda$之基本解:

$$(A_o - \lambda)G_\lambda = \delta id$$

或

$$(\hat{A}_o - \lambda)\hat{G}_\lambda = \frac{id}{(2\pi)^{3/2}}$$

从而$\forall\lambda\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$，有

$$\hat{G}_\lambda = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\hat{P}_o(\mu)}{\mu-\lambda}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{-Q_-}{|\cdot|/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}+\lambda} - \frac{Q_o}{\lambda} + \frac{Q_+}{|\cdot|/\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}-\lambda}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{-Q_-}{|\cdot|+\lambda\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}+\frac{Q_+}{|\cdot|-\lambda\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}+\frac{Q_++Q_-}{\lambda\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}\right)$$

$$-\frac{id}{(2\pi)^{3/2}\lambda}$$

$$=\frac{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}{(2\pi)^{3/2}(|\cdot|^2-\lambda^2\varepsilon_o\mu_o)}(|\cdot|(Q_+-Q_-)$$

$$+\frac{|\cdot|^2}{\lambda\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}(Q_++Q_-))-\frac{id}{(2\pi)^{3/2}\lambda}$$

$$=\frac{\varepsilon_o\mu_o}{(2\pi)^{3/2}}(\hat{A}_o+\frac{1}{\lambda}\hat{A}_o^2)\frac{1}{|\cdot|^2-\lambda^2\varepsilon_o\mu_o}-\frac{id}{(2\pi)^{3/2}\lambda}$$

令

$$g_\lambda(x)=\begin{cases}\gamma_\lambda^+(x) & \mathrm{Im}\lambda>0\\ \gamma_\lambda^-(x) & \mathrm{Im}\lambda<0\end{cases}$$

其中 $\gamma_\lambda^\pm(x)=\frac{1}{4\pi|x|}\exp(\pm i\lambda\sqrt{\varepsilon_o u_o}|x|)$

$\gamma_\lambda^\pm(x)$是Helmholtz方程基本解. 于是

$$\hat{g}_\lambda(p)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}(p^2-\varepsilon_o\mu_o\lambda^2)} \tag{10.4.63}$$

故

$$\hat{G}_\lambda=\varepsilon_o\mu_o(\hat{A}_o+\frac{1}{\lambda}\hat{A}_o^2)\hat{g}_\lambda-\frac{\hat{\delta}}{\lambda}id$$

或

$$G_\lambda=\varepsilon_o\mu_o(A_o+\frac{1}{\lambda}A_o^2)g_\lambda-\frac{\delta}{\lambda}id$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \text{grad div}/\lambda & i\mu_o \text{rot} \\ -i\varepsilon_o \text{rot} & \text{grad div}/\lambda \end{bmatrix} + \lambda\varepsilon_o\mu_o id\right] g_\lambda \tag{10.4.64}$$

它的渐近行为

$$G_\lambda(x) = \pm\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\,\hat{A}_o(x_o)G_\lambda(x) + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$$= \pm[Q_+(x_o) - Q_-(x_o)]G_\lambda(x) + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{10.4.65}$$

如此

$$(Q_o G_\lambda)(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{10.4.66}$$

或

$$x_o' G_{\lambda,j}(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \qquad j = 1,2$$

$$(Q_- G_\lambda)(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \qquad \text{Im}\lambda > 0 \tag{10.4.67}$$

$$(Q_+ G_\lambda)(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \qquad \text{Im}\lambda < 0$$

因此外辐射

$$[\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\,\hat{A}_o(x_o) - id]\text{U}(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{10.4.68}$$

或

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,x_o \times U_1(x) - U_2(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{10.4.69}$$

而内辐射

$$[\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}\,\hat{A}_o(x_o) + id]\text{U}(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \tag{10.4.70}$$

或

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}x_o\times U_1(x)+U_2(x)=o(\frac{1}{|x|^2}) \qquad (10.4.71)$$

则(10.4.54)的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(t)&=\exp(-iA_o t)\mathbf{U}^o=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\lambda t)dP_o(\lambda)\mathbf{U}^o\\&=\Pi_o\mathbf{U}^o+\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\lambda t)d\Pi(\lambda)\mathbf{U}^o\\&:=\mathbf{U}_o+\mathbf{U}_1(t)\end{aligned}$$

这里U_o与t无关.对应的Fourier变换为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(t)&=\exp(-i\hat{A}_o t)\hat{\mathbf{U}}^o=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\lambda t)\alpha\hat{P}_o(\lambda)\hat{\mathbf{U}}^o\\&=Q_o\hat{\mathbf{U}}^o+(\exp(i|\cdot|\tau)Q_-+\exp(-i|\cdot|\tau)Q_+)\hat{\mathbf{U}}^o\\&:=\hat{\mathbf{U}}_o+\hat{\mathbf{U}}_1(t)\end{aligned}$$

这里 $\tau:=t/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}$，且

$$\hat{\mathbf{U}}_o(p)=\begin{bmatrix}p^o p_o' & 0\\ 0 & p_o p_o'\end{bmatrix}\hat{\mathbf{U}}^o(p)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_1(t,p)=\begin{bmatrix}-p_o p_o\cos(\tau|p|) & i\sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}\,p_o\sin(\tau|p|)\\ i\sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}\,p_o\sin(\tau|p|) & -p_o p_o\cos(\tau|p|)\end{bmatrix}\hat{\mathbf{U}}^o(p)$$

设 $S(t,x)$是Maxwell方程组

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+M\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{rot}\\ \mathrm{rot} & 0\end{bmatrix}\right]S(t,x)=\delta(t)\delta(x)id$$

的基本解，那么可以得到

$$S_o(x) = -\text{grad div}\frac{1}{4\pi|x|}id$$

$$S_1(t,x) = \begin{bmatrix} \text{rot rot} & -\sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}\,\text{rot}\frac{\partial}{\partial t} \\ \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}\,\text{rot}\frac{\partial}{\partial t} & \text{rot rot} \end{bmatrix}\frac{H(|x|-\tau)}{4\pi|x|}id$$

§ 10.5 磁流体动力学

这一节，我们将研究粘性不可压缩磁流体动力学方程组(MHD)，证明对应的解存在唯一性以及讨论解的渐近行为.

设流体充满区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n = 2,3$, 流体宏观状态可以用如下物理量所描述：$\rho = \rho(x,t)$ 流体密度，$p = p(x,t)$ 流体压强，$\mathbf{u} = (u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ u_3(x,t))$ 在时刻 t 地点 x 流体粒子之速度，$\mathbf{B} = (B_1(x,t),\ B_2(x,t),\ B_3(x,t))$ 在时间 t 地点 x 之磁感应强度. 我们假设 $t=0$ 时刻流体是均匀的，$\rho(x,0) = \rho_o = \text{const}$,. 由不可压缩性推出 $\rho(x,t) = \rho_o \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \geqslant 0$, 那么无量纲 MHD 方程 [28] 是

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\text{grad})\mathbf{u} - \lambda\Delta\mathbf{u} + \text{grad}p + s\,\text{grad}(\frac{1}{2}\mathbf{B}^2) - s(\mathbf{B}\cdot\text{grad})\mathbf{B} = \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\text{grad})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\text{grad})\mathbf{u} + \lambda_m\text{rot}(\text{rot}\mathbf{B}) = 0$$

$$\text{div}\mathbf{u} = 0,\ \text{div}\mathbf{B} = 0 \tag{10.5.1}$$

其中 $\lambda = Re^{-1}$, $\lambda_m = R_m^{-1}$, $Re = L_* u_* / v$ 为流动 Reynolds 数，$\lambda_m = R_m^{-1}$, $R_m = L_* u_* \sigma\mu$ 为磁 Reynolds 数，L_*, T_*, u_*, B_* 分别为参考长度、参考温度、参考速度和参考磁感

应强度，σ 为流体电导率，μ 为磁导率，设它们为常数，而 $s = M^2 / ReR_m = \lambda\lambda_m M^2 = B_*^2 / \mu\rho_* u_*^2$，$M$ 为 Hartman 数，为简单起见，设 $\rho(x,t) = \rho_o = 1$.

当 Ω 是有界区域，则方程 (10.5.1) 附加如下边界条件和初始条件

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_o(x),\ \mathbf{B}(x,0) = \mathbf{B}_o(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{10.5.2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 \quad 在\Gamma上,\ \Gamma = \partial\Omega为边界(无滑动) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0,\ \mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0 \quad 在\Gamma上(理想导体界面) \end{cases} \tag{10.5.3}$$

其中$\mathbf{n}$为Γ之单位外法向向量.

有时也考虑周期性边界条件

$$\mathbf{u}(x + L\mathbf{e}_i, t) = \mathbf{u}(x,t),\ \mathbf{B}(x + L\mathbf{e}_i, t) = \mathbf{B}(x,t) \tag{10.5.4}$$

其中L为周期，$\mathbf{e}_i$，$i = 1,2,\cdots,n$为空间$\mathbf{R}^n$正交基.

当$n = 2$，定义算子rot和rot为

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \forall \mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathrm{rot}\Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}) \quad \forall 任一数性函数\Phi$$

对应于三维的向量微分公式

$$\mathrm{rot\ rot}\mathbf{u} = \mathrm{grad\ div}\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} \tag{10.5.5}$$

对应于二维的公式

$$\mathrm{rot\ rot}\mathbf{u} = \mathrm{grad\ div}\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} \tag{10.5.6}$$

二维情形意味着流动区域是柱体 $\Omega \times \mathbf{R}$，$\Omega \subset \mathbf{R}^2$，所有的物理量与 x_3 无关，而向量 $\mathbf{u},\mathbf{B}$ 是平行于平面 ox_1x_2.

对 MHD，要分别取 N－S 方程的基本空间和 Maxwell 方程组的基本空间来做为自己的基本空间，如果分别使用下标 f 和 m 表示相应于 N－S 方程和 Maxwell 方程的话，那么

$\Theta_f=\{v\in D(\Omega)^n,\ \mathrm{div}v=0\}$，$V_f=\Theta_f$在$H^1(\Omega)^n$中的闭包.

$V_f=\{v\in H_o^1(\Omega)^n,\ \mathrm{div}v=0\}$，$H_f=\Theta_f$在$L^2(\Omega)^n$中的闭包.

$H_f=\{v\in L^2(\Omega)^n,\ \mathrm{div}v=0,\ \ v\cdot n|_\Gamma=0\}$

$\Theta_m=\{c\in D(\Omega)^n,\ \mathrm{div}c=0,\ \ c\cdot n|_\Gamma=0\}$

$V_m=\Theta_m$在$H^1(\Omega)^n$中的闭包

$=\{C\in H^1(\Omega)^n,\ \mathrm{div}C=0,\ \ C\cdot n|_\Gamma=0\}$

$H_m=\Theta_m$在$L^2(\Omega)^n$中的闭包

而V_f'是V_f的对偶空间

$$V_f'=\{v\in H^{-1}(\Omega)^n,\ \mathrm{div}\,v=0\}$$

对V_f装备内积和范数

$$((u,v))_f=(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}v),\ \ \|\cdot\|_f^2=((\cdot,\cdot))_f$$

而V_f'之范数记为$\|\cdot\|_x$，而V_m装备内积和范数

$$((u,v))_m=(\mathrm{rot}u,\mathrm{rot}v),\ \ \|u\|_m^2=((u,u))_m$$

引入基本空间

$V=V_f\times V_m$，$H=H_f\times H_m$，V'为V之对偶空间.

$V\subset H=H'\subset V'$嵌入是连续和稠密的.

设$\Phi=(u,B)\in H$，$\Psi=(v,C)\in H$，那么H之内积为

$$(\Phi,\Psi)=(u,v)+(B,C),\ |\Phi|^2=(\Phi,\Phi)$$

$$[\Phi,\Psi]=(u,v)+s(B,C),\ [\Phi]^2=[\Phi,\Phi]$$

而V装备之内积和范数为

$$((\Phi,\Psi))=\lambda((u,v))_f+\lambda_m((B,C))_m$$

$$[[\Phi,\overline{\Psi}]] = \lambda((\mathbf{u},\mathbf{v}))_f + s\lambda_m((\mathbf{B},\mathbf{C}))_m$$

$$\|\Phi\|^2 = ((\Phi,\Phi))^2,\ [[\Phi]]^2 = [[\Phi,\Phi]]$$

定义线性连续算子 $\mathrm{A}_f \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_f, \mathbf{V}_f')$，$\mathrm{A}_m \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_m')$ 和 $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$:

$$<\mathrm{A}_f\mathbf{u},\mathbf{v}> = ((\mathbf{u},\mathbf{v}))_f \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}_f$$

$$<\mathrm{A}_m\mathbf{B},\mathbf{C}> = ((\mathbf{B},\mathbf{C}))_m \quad \forall \mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbf{V}_m$$

$$<\Phi,\Psi> = ((\Phi,\Psi)) \quad \forall \Phi,\Psi \in \mathbf{V}$$

我们同样可以把 $\mathrm{A}_f, \mathrm{A}_m, \mathrm{A}$ 视为 $\mathbf{H}_f, \mathbf{H}_m, \mathbf{H}$ 中的无界线性算子，它们的定义域为

$$D(\mathrm{A}_f) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_f,\ \mathrm{A}_f\mathbf{u} \in \mathbf{H}_f\}$$

$$D(\mathrm{A}_m) = \{\mathbf{B} \in \mathbf{V}_m,\ \mathrm{A}_m\mathbf{B} \in \mathbf{H}_m\}$$

$$D(\mathrm{A}) = D(\mathrm{A}_f) \times D(\mathrm{A}_m)$$

由第九章可知，如果 $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_f$ 是 $\mathrm{A}_f\mathbf{u} = \mathbf{f} \in \mathbf{V}_f'$ 的解，那么存在 $p \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 使得 $\mathbf{u}, p$ 是 Stokes 问题的解

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,p = \mathbf{f} & \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 & \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathbf{u}|_\Gamma = 0 & \end{cases} \tag{10.5.7}$$

并且有如下正则性质：如果 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l(\Omega)^n$，$l \geqslant 0$，那么 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{2+l}(\Omega)^n$；$p \in \mathbf{H}^{1+l}(\Omega)$，并且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\|\mathbf{u}\|_{l+2,\Omega} + \|p\|_{H^{l+1}(\Omega)/R} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{l,\Omega} \tag{10.5.8}$$

同样如果 $\mathbf{B} \in \mathbf{V}_m$ 是 $\mathrm{A}_m\mathbf{B} = \mathbf{f} \in \mathbf{H}_m$ 的解，那么

引理10.5.1　设 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_m$，那么下列条件是等价的

(1) $\mathbf{B} \in \mathbf{V}_m$，满足 $\mathrm{A}_m\mathbf{B} = \mathbf{f}$

(2) $\mathbf{B}\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$，满足

$$\begin{cases}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{B})=\mathbf{f} & 在\Omega内\\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0 & 在\Omega内\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{n}|_\Gamma=0\end{cases}\tag{10.59}$$

证 $\forall\mathbf{C}\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$，$\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0$.设$\varphi$是下列问题的解

$$\Delta\varphi=\operatorname{div}\mathbf{C}\quad 在\Omega内,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma=0$$

由椭圆边值问题正则性定理，则 $\varphi\in\mathbf{H}^2(\Omega)$，所以$\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}-\operatorname{grad}\varphi\in\mathbf{V}_m$，于是有

$$\langle A_m\mathbf{B},\hat{\mathbf{C}}\rangle=(\operatorname{rot}\mathbf{B},\operatorname{rot}\mathbf{C})\quad(\because \operatorname{rot}\cdot\operatorname{grad}\varphi=0)$$

$$(\mathbf{f},\hat{\mathbf{C}})=(\mathbf{f},\mathbf{C})\quad(\because\mathbf{f}\in\mathbf{H}_m)$$

故

$$(\operatorname{rot}\mathbf{B},\operatorname{rot}\mathbf{C})=(\mathbf{f},\mathbf{C})\quad\forall\mathbf{C}\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n,\quad \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0$$

利用

$$\int_\Omega\operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}dx=\int_\Omega\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{C}dx+\int_\Omega(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\mathbf{n}ds\tag{10.5.10}$$

于是可以得到式(10.5.9)，证毕.

利用 (10.5.6)，如果 $\mathbf{B}\in\mathbf{H}^1(\Omega)^n$ 是 (10.5.9) 的解，那么 $\mathbf{B}$ 也满足

$$\begin{cases}-\Delta\mathbf{B}=\mathbf{f} & 在\Omega内\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{n}|_\Gamma=0\end{cases}\tag{10.5.11}$$

同样有：如果 $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^l(\Omega)^n$，$l>0$，那么 $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^{l+2}(\Omega)^n$，且存在 $c>0$ 使得

$$\|\mathbf{B}\|_{l+2,\Omega}\leqslant c\|\mathbf{f}\|_{l,\Omega}\tag{10.5.12}$$

所以，$D(A_m)=\mathbf{H}^2(\Omega)^n\cap\mathbf{V}_m$，以及$D(A)=\mathbf{H}^2(\Omega)^n\cap\mathbf{V}$.

定义三线性形式$b(\cdot;\cdot,\cdot)$

$$b(\Phi_1;\Phi_2,\Phi_3)=a_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)-sa_1(\mathbf{B}_1;\mathbf{B}_2,\mathbf{u}_3)$$
$$+a_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3)-a_1(\mathbf{B}_1;\mathbf{u}_2,\mathbf{B}_3),\forall\Phi_i\in\mathbf{V}\quad(10.5.13)$$

以及双线性算子$B(\cdot,\cdot)$: $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$使得

$$\langle B(\Phi_1,\Phi_2),\Phi_3\rangle=b(\Phi_1;\Phi_2,\Phi_3)\quad\forall\Phi_i\in\mathbf{V}\quad(10.5.14)$$

由第九章(引理9.3.1)不难验证

$$|b(\Phi_1;\Phi_2,\Phi_3)|\leqslant c\max(1,s)\|\Phi_1\|_{s_1}\|\Phi_2\|_{s_2+1}\|\Phi_3\|_{s_3}$$
$$\forall\Phi_1\in\mathbf{H}^{s_1}(\Omega)^{2n},\ \Phi_2\in\mathbf{H}^{s_2+1}(\Omega)^{2n},\ \Phi_3\in\mathbf{H}^{s_3}(\Omega)^n\quad(10.5.15)$$

利用这个性质以及$A\Phi=\mathbf{f}$解的正则性，则可以得到和第九章相似的结果

$$|b(\Phi_1;\Phi_2,\Phi_3)|\leqslant c|\Phi_1|^{1/2}\|\Phi_1\|^{1/2}\|\Phi_2\|^{1/2}|A\Phi_2|^{1/2}|\Phi_3|$$
$$\forall\Phi_1\in\mathbf{V},\ \Phi_2\in D(A),\ \Phi_3\in\mathbf{H},\quad n=2\quad(10.5.16)$$

$$|b(\Phi_1;\Phi_2,\Phi_3)|\leqslant c\|\Phi_1\|\|\Phi_2\|^{1/2}\|A\Phi_2\|^{1/2}|\Phi_3|$$
$$\forall\Phi_1\in\mathbf{V},\ \Phi_2\in D(A),\ \Phi_3\in\mathbf{H},\quad n=3\quad(10.5.17)$$

设$\mathbf{M}$为一个6×6的对角元矩阵

$$\mathbf{M}=(m_{ij})_{i,j=1,6},$$
$$m_{ii}=1,\ 1\leqslant i\leqslant3,\ m_{ii}=s,\ 4\leqslant i\leqslant6\quad(10.5.18)$$

那么

$$b(\Phi_1;\Phi_2,M\Phi_2)=a_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2)+sa_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)$$
$$-s(a_1(\mathbf{B}_1;\mathbf{B}_2,\mathbf{u}_2)+a_1(\mathbf{B}_1;\mathbf{u}_2,\mathbf{B}_2))$$

由$a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$的性质，得

$$\begin{cases} b(\Phi_1;\ \Phi_2, M\Phi_2) = 0 \quad \forall\Phi_1,\ \Phi_2 \in \mathbf{V} \\ \mathbf{b}(\Phi_1;\ \Phi_2, M\Phi_3) = -b(\Phi_1;\ \Phi_3, M\Phi_2),\ \forall\Phi_i \in \mathbf{V} \end{cases} \tag{10.5.19}$$

如果利用检验函数 $\mathbf{v}\in \mathbf{H}_f$ 乘 (10.5.1) 第一式两边，并利用 Stokes 公式得

$$(\frac{d\mathbf{u}}{dt},\mathbf{v}) + \lambda((\mathbf{u},\mathbf{v}))_f + a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) - sa_1(\mathbf{B};\mathbf{B},\mathbf{v}) = (\mathbf{f},\mathbf{v})$$

用检验函数 $\mathbf{c}\in\Theta_m$ 乘 (10.5.1) 第二式并利用 (10.5.10)，得

$$(\frac{d\mathbf{B}}{dt},\mathbf{c}) + \lambda_m((\mathbf{B},\mathbf{c}))_m + a_1(\mathbf{u};\mathbf{B},\mathbf{c}) - a_1(\mathbf{B};\mathbf{u},\mathbf{c}) = 0$$

因而(10.5.1) − (10.5.3)的弱问题是

$$\forall\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}_f'),\ \Phi_o = (\mathbf{u}_o,\mathbf{B}_o)\in\mathbf{H},$$

$$\begin{cases} \text{求}\Phi = (\mathbf{u},\mathbf{B})\in\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})\text{使得} \\ (\frac{d\Phi}{dt},\psi) + ((\Phi,\psi)) + b(\Phi;\ \Phi,\psi) = <\mathbf{F},\psi> \\ \qquad\qquad \forall\psi = (\mathbf{v},\mathbf{c})\in\mathbf{V} \\ \Phi(0) = \Phi_o \end{cases} \tag{10.5.20}$$

其中 $\mathbf{F} = (\mathbf{f},0)$

(10.5.20) 的解称为问题 (10.5.1) − (10.5.3) 的弱解，如果 $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$，$\Phi_o\in\mathbf{V}$，那么 (10.5.20) 满足 $\Phi\in\mathbf{L}^2(0,T;D(\mathrm{A}))\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})$ 的解 Φ 称为问题 (10.5.1) − (10.5.3) 的强解 .

对应于MHD的发展方程可以表示为

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} + \mathrm{A}\Phi + B(\Phi,\Phi) = \mathbf{F} \\ \Phi(0) = \Phi_o \end{cases} \tag{10.5.21}$$

为了说明 (10.5.20) 的解也是问题 (10.5.1) − (10.5.3) 的解，

要利用

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{B},\mathbf{c})-a_1(\mathbf{B};\mathbf{u},\mathbf{c})$$

$$=\int_\Omega \mathrm{rot}(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{c}dx=\int_\Omega(\mathbf{B}\times\mathbf{u})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{c}dx \quad (10.5.22)$$

这个公式在今后也是很有用的

下面，我们来证明(10.5.21)解的存在唯一，为此先作解的先验估计，在(10.5.20)中令$\psi=\mathbf{M}\Phi$，利用(10.5.19)得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\mathbf{u}|^2+s|\mathbf{B}|^2)+\lambda\|\mathbf{u}\|_f^2+s\lambda_m\|\mathbf{B}\|_m^2=(\mathbf{f},\mathbf{u}) \quad (10.5.23)$$

积分后得到能量方程

$$|\mathbf{u}(t)|^2+s|\mathbf{B}(t)|^2+2\lambda\int_o^t\|\mathbf{u}\|_f^2ds+2s\lambda_m\int_o^t\|\mathbf{B}\|_m^2ds$$

$$=|\mathbf{u}_o|^2+s|\mathbf{B}_o|^2+2\int_o^t(\mathbf{f},\mathbf{u})ds \quad (10.5.24)$$

运用第九章中同样的手法，得

$$\int_o^T\|\mathbf{u}\|_f^2ds\leqslant Rek_1,\ \int_o^T\|\mathbf{B}\|_m^2ds\leqslant\frac{R_m}{2s}k_1 \quad (10.5.25)$$

$$\sup_{t\in[0,T]}(|\mathbf{u}|^2+s|\mathbf{B}|^2)\leqslant k_1 \quad (10.5.26)$$

其中

$$k_1=|\mathbf{u}_o|^2+s|\mathbf{B}_o|^2+Re\int_o^T\|\mathbf{f}\|_*^2dt \quad (10.5.27)$$

注意到

$$|\mathbf{u}|\leqslant c_1\|\mathbf{u}\|_f,\ \forall\mathbf{u}\in\mathbf{V}_f,\ |\mathbf{B}|\leqslant C_2\|\mathbf{B}\|_m\quad\forall\mathbf{B}\in\mathbf{V}_m$$

那么由(10.5.24)，若设$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^\infty(0,\infty,\mathbf{V}_f')$，则得

$$\frac{d}{dt}(|\mathbf{u}|^2+s|\mathbf{B}|^2)+\min(\lambda c_1^{-2},2\lambda_m c_2^{-2})(|\mathbf{u}|^2+s|\mathbf{B}|)\leqslant\lambda^{-1}\|\mathbf{f}\|_*^2$$

$$(10.5.28)$$

由Gronwall引理得

$$\sup_{t\in(0,\infty)}(|\mathbf{u}(t)|^2+s|\mathbf{B}(t)|^2)\leqslant k_2 \tag{10.5.29}$$

其中

$$k_2=|\mathbf{u}_o|^2+s|\mathbf{B}_o|^2+\max(Re^2C_1^2,ReR_mC_2^2)\sup_{t\in(0,\infty)}\|\mathbf{f}(t)\|_*^2 \tag{10.5.30}$$

如果在(10.5.20)中取$\psi=\mathrm{A}\Phi$，那么

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2=(\mathbf{f},\mathrm{A}_f\Phi)-b(\Phi;\Phi,\mathrm{A}\Phi) \tag{10.5.31}$$

(1) 当$n=2$时，则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2\leqslant|\mathbf{f}|\cdot|\mathrm{A}\Phi|+c|\Phi|^{1/2}\|\Phi\|\cdot|\mathrm{A}\Phi|^{3/2}$$

利用Young不等式，则有

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2\leqslant 2|\mathbf{f}|^2+c|\Phi|^2\|\Phi\|^4 \tag{10.5.32}$$

因而，利用(10.5.26)得

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2\leqslant 2|\mathbf{f}|^2+ck_1\|\Phi\|^4 \tag{10.5.33}$$

由(10.5.25)知

$$\int_o^T\|\Phi(t)\|^2dt\leqslant ck_1 \tag{10.5.34}$$

联合 (10.5,33), (10.5.34)，利用 Gronwall 引理同样可以得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Phi(t)\|^2\leqslant k_2 \tag{10.5.35}$$

再一次利用(10.5.33)，则

$$\int_o^T|\mathrm{A}\Phi|^2dt\leqslant k_3 \tag{10.5.36}$$

(2) $n=3$，这时有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2\leqslant|\mathbf{f}|\cdot|\mathrm{A}\Phi|+c\|\Phi\|^{3/2}\cdot|\mathrm{A}\Phi|^{3/2}$$

利用Young不等式

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2+|\mathrm{A}\Phi|^2\leqslant 2|\mathbf{f}|^2+c\|\Phi\|^6 \tag{10.5.37}$$

由于我们不能估计 $\mathbf{L}^4(0,T;\mathbf{V})$ 中的界，利用第九章中 $n=3$ 时同样的技巧，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T_*]}\|\Phi\|^2\leqslant 2(1+\|\Phi_o\|^2) \tag{10.5.38}$$

$$\int_o^{T_*}|\mathrm{A}\Phi(t)|^2dt\leqslant k_4 \tag{10.5.39}$$

其中 T_*，k_4 是二个适当的数，且 $T_*=k_5(1+\|\Phi_o\|^2)^{-2}$.

有了以上的先验估计，则有下列存在唯一性定理.

定理 10.5.1 设 $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}_f')$，$\Phi_o=(\mathbf{u}_o,\mathbf{B}_o)\in\mathbf{H}$，那么问题 (10.5.21) 存在一个弱解 $\Phi\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$，进而

（1） 当 $n=2$，解是唯一的，且 $\Phi\in\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H})$，$\Phi'\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$；

(2) 当 $n=3$，至多存在一个解满足 $\Phi\in\mathbf{L}^4(0,T;\mathbf{V})$.

定理10.5.2 设$\mathbf{f}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$，$\Phi_o\in\mathbf{V}$.

（1） $n=2$，那么式 (10.5.21) 的解满足 $\Phi\in\mathbf{L}^2(0,T;D(\mathrm{A}))\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})$；

(2) $n=3$，存在 $T_*>0$(依赖于 Ω，f，$\|\Phi_o\|$)，在 $[0,T_*)$ 上，(10.5.21) 存在唯一解 $\Phi\in\mathbf{L}^2(0,T^*;D(\mathrm{A}))\cap\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})$.

证 这里，只证明定理 10.5.1. 这些手法，在第九章均可以找到，设 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_N$ 为 A 在 H 中的本征函数，且

$$W_N = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_N\}$$

P_N为$\mathrm{H} \to W_N$上的正交投影算子. 考察Galerkin的逼近

$$\frac{d\Phi_N}{dt} + A\Phi_N + P_N B(\Phi_N, \Phi_N) = P_N \mathbf{F}, \Phi_N(0) = P_N \Phi_o \quad (10.5.40)$$

它在 $[0, T_N]$ 上存在唯一解，$T_N > 0$，下面的估计说明 T_N 可以是任意的，$T_N = T$.

运用前面同样的方法可以得到 $\Phi_N \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$. 由在 $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ 中有界，$\|P_N\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}',\mathbf{V}')} \leqslant 1$，可以得到$\frac{d\Phi_N}{dt} \in \mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{V}')$. 由紧性定理，知存在一个子序列 Φ_μ 使得

$$\Phi_\mu \to \Phi \begin{cases} \text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{V})\text{弱收敛} \\ \text{在}\mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{H})\text{弱星收敛} \\ \text{在}\mathbf{L}^2(0,T;\ \mathbf{H})\text{强收敛} \end{cases}$$

故对 (10.5.40) 可以进行极限过渡，得到 Φ 是 (10.5.21) 的解，应用第九章中同样技巧可以证明 $\Phi \in \mathbf{L}^4(0,T;\mathbf{V})$ $(n = 3)$.

和 Naviev－Stokes 方程一样，它的解具有 Squeezins 性质，即设 $(\mathbf{f}, \Phi_o)$ 和 $(\mathbf{f}', \psi_o)$ 的对应的解为 Φ, ψ，若

$$\|\Phi_o\| \leqslant R,\ \|\psi_o\| \leqslant R,\ \mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \mathbf{L}^\infty(0,\infty;\mathbf{H}_f)$$

那么存在常数 β_1，β_2 它们只依赖于 Ω，T；s，λ_f，λ_m，和 $\|\mathbf{f}\|_\infty$，$\|\mathbf{f}'\|_\infty$，使得当 $x_N \geqslant \beta_1$ 要么成立

$$|\Phi(t) - \psi(t)| \leqslant 2^{1/2} |P_N(\Phi(t) - \psi(t))|$$

或者

$$|\Phi(t) - \psi(t)| \leqslant \exp(-\beta_2 \lambda_{N+1}^{1/2}) |\Phi_o - \psi_o|$$

由这个性质可以证明式(10.5.21)的泛函不变集具有有限的 Hausdorff 维数.

在 § 9.10 中所讨论的解的渐近性质，对 MHD 方程也同样成立.

§ 10.6 热动力学方程组

在这一节我们讨论由热力驱动的流动，它在大气环流等研究中具有重要地位.这个方程组耦合 Navier-Stokes 方程和能量方程，由 Boussinesq 逼近而得到的.

设 e_i，$i=1,2,3$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的正交单位基向量.流动区域是：$0<x_n<h$，$x_n=0$，$x_n=h$ 分别为下底和上底，在下底流体温度为 T_o，上底为 T_1 且 $T_1<T_o$ 为常数.$\mathbf{u}=(u_i, i=1,2,\cdots,n)$ 为流体速度，P 为压力，T 为流体温度，那么耦合方程组为

$$\begin{cases}\rho_o(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\mathrm{grad})\mathbf{u})-\rho_o\nu\Delta\mathbf{u}+\mathrm{grad}\,p=\rho_o g(1+\alpha(T_1-T_o)) \\ \rho_o C_v(\dfrac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\mathrm{grad})T)-\rho_o c_v k\Delta T=0,\ \mathrm{div}\mathbf{u}=0\end{cases}$$

这里 $g=-ge_n$ 为重量，$\rho_o>0$ 为密度，α 为流体体积膨胀系数，c_v 为定容比热，k 为热传导系数，ν 为动力粘性系数.

上述两组方程分别除以 ρ_o 和 $\rho_o c_v$，且以 p 代替 p/ρ_o+gx_n，则可以得到

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\mathrm{grad})\mathbf{u}-\nu\Delta\mathbf{u}+\mathrm{grad}\,p=g\alpha(T_1-T),\ \mathrm{div}\mathbf{u}=0 \qquad (10.6.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\mathrm{grad})T-k\Delta T=0 \qquad (10.6.2)$$

边界条件

$$\mathbf{u}=0,\ x_n=0,\ x_n=h \tag{10.6.3}$$

$$T=T_o,\ x_n=0,\ T=T_1,\ x_n=h \tag{10.6.4}$$

在 $x_i(i=1,\cdots,n-1)$ 方向，满足周期分别为 l 和 L 的边界条件．

无量纲化，即

$$x=hx',\ l=hl',\ L=hL',$$

$$t=(h/g\alpha(T_o-T_1))^{1/2}t',\ T=(T_o-T_1)T',$$

$$p=hg\alpha(T_o-T_1)p',\ \mathbf{u}=(hg\alpha(T_o-T_1))^{1/2}\mathbf{u}',$$

$$\nu'=\nu(h^3g\alpha(T_o-T_1))^{-1/2},$$

$$k'=k(h^3g\alpha(T_o-T_1))^{-1/2}=\sqrt{\frac{k}{\nu}}\left(\frac{k\nu}{h^3g\alpha(T_o-T_1)}\right)^{1/2}.$$

再引入Grashof(Gr)数，Prandtl(Pr)数，Rayleigh(Ra)数，

$$Gr=(\nu')^{-2},\ pr=\nu'/k',\ Ra=(\nu'k')^{-1} \tag{10.6.5}$$

代入(10.6.1)－(10.6.4)，再去掉“′”，得到

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u}-\lambda\Delta\mathbf{u}+\mathrm{grad}p=e_n(T-T_1),\ \lambda=Re^{-1} \tag{10.6.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})T-k\Delta T=0 \tag{10.6.7}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0 \tag{10.6.8}$$

$$\mathbf{u}=0,\ x_n=0\text{和}x_n=1 \tag{10.6.9}$$

$$T=T_o,\ \text{在}x_n=0,\ T=T_1=T_o-1,\ \text{在}x_n=1 \tag{10.6.10}$$

再令 $\theta=T-T_o-x_n(T_1-T_o)=T-T_o+x_n$及

$$P-(x_n+x_n^2/2)(T_o-T_1)=p-(x_n+x_n^2/2)$$

代替P，那么我们得到Benard问题方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\mathrm{grad})\mathbf{u} - \lambda\Delta\mathbf{u} + \mathrm{grad}P = e_n\theta \tag{10.6.11}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\mathrm{grad})\theta - \mathbf{u}_n - k\Delta\theta = 0 \tag{10.6.12}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \tag{10.6.13}$$

$$\theta = 0 \quad 在 x_n = 0,\ x_n = 1 \tag{10.6.14}$$

$$u = 0 \quad x_n = 0,\ x_n = 1 \tag{10.6.15}$$

引入基本空间；$\Omega = (0,l) \times (0,1)$ 或 $\Omega = (0,l) \times (0,L) \times (0,1)$, Hilbert 空间

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o \times \mathbf{V}_1,\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_o \times \mathbf{H}_1$$

$\mathbf{V}_1 = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)^n,\ \mathbf{u}|_{x_n=0} = 0$ 在其它方向满足周期性条件$\}$

$$\mathbf{V}_o = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1^n,\ \mathrm{div}\mathbf{v} = 0\}$$

对$\mathbf{V}_1$装备内积和范数

$$((\mathbf{u},\mathbf{v})) = \int_\Omega \mathrm{grad}\mathbf{u} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{v}dx,\ \|\mathbf{u}\|^2 = ((\mathbf{u},\mathbf{u})).$$

而$\mathbf{V}_o$装备着$\mathbf{V}_1$之乘积范数和乘积内积

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{L}^2(\Omega)$$

$\mathbf{H}_o = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n,\ \mathrm{div}\mathbf{v} = 0,$

$v_n\big|_{x_n=0} = 0,\quad v_n\big|_{x_n=1} = 0,\ v_i,\ i = 1,\cdots,n-1$ 满足周期性边界条件$\}$.

设 $D(A) = D(A_o) \times D(A_1)$, $D(A_o) = \mathbf{V}_o \cap \mathrm{H}^2(\Omega)^n$, $D(A_1) = \mathbf{V}_1 \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. 算子 A_i 定义如下

$$(A_i\mathbf{u},\mathbf{v}) = ((\mathbf{u},\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in D(A_i),\ i = 0,1$$

A_i是自共轭和正定的，A_i^{-1}是$\mathbf{H}_i$中紧算子.

定义双线性算子 $B_o(\cdot,\cdot)$: $D(A_o)\times D(A_o)\to\mathbf{H}_o$，和$B_1(\cdot,\cdot)$:$D(A_o)\times D(A_1)\to\mathbf{H}_1$ 为

$$(B_o(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w})=a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})\quad\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in D(A_o)$$

$$(B_1(\mathbf{u},\varphi),\psi)=a_1(\mathbf{u};\varphi,\psi),$$

$$\forall\mathbf{u}\in D(A_o),\qquad\forall\Phi,\psi\in D(A_1)$$

于是 Benard 问题可以表示为如下形式的发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+\lambda A_o\mathbf{u}+B_o(\mathbf{u},\mathbf{u})-e_n\theta=0\\ \dfrac{d\theta}{dt}+kA_1\theta+B_1(\mathbf{u},\theta)-\mathbf{u}_n=0\end{cases}$$

引入变量$\varphi=\{\mathbf{u},\theta\}$，则Benard系统可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}+A\varphi+(\varphi,\varphi)+R\varphi=0\\ \varphi(0)=\varphi_o=\{\mathbf{u}_o,\theta_o\}\end{cases}\tag{10.6.16}$$

其中$A\varphi=\{\lambda A_o\mathbf{u},kA_1\theta\}$，$R\varphi=\{-e_n\theta,\ -\mathbf{u}_n\}$，

$$B(\varphi,\varphi^*)=\{B_o(\mathbf{u},\mathbf{u}^*),\ B_1(\mathbf{u},\theta^*)\}$$

显然，双线性算子和第九章中所定义的双线性算子是有相同的性质，因此，第九章的结果可以运用到式(10.6.16)，于是如果$n=2$，则$\forall\varphi_o\in\mathbf{H}$，或(10.6.16)有唯一解

$$\varphi\in\mathbf{C}([0,\tau],\mathbf{H})\cap\mathbf{L}^2(0,\tau;\mathbf{V})\quad\forall\tau>0,\ \varphi\in\mathbf{C}((0,\infty),\ D(A))$$

并且可以定义半群算子 $S(t)$: $\varphi(0)\to\varphi(t)$

$$S(t+s)=S(t)S(s)\quad\forall s,t>0$$

如果$n=3$，$\forall\Phi_o\in\mathbf{V}$ 存在 $\tau_1(M)$:$\|\varphi_o\|\leqslant M$ 使得式(10.6.16)存在唯一解 $\varphi\in\mathbf{C}((0,\tau_1),\ D(\mathbf{A}))$

而半群算子 $S(t)$ 是将球 $\{v\in V:\|v\|\leqslant m\}$ 映照到 V，只要 $s+t\leqslant\tau_1(m)$,则 $S(t)$ 也具有半群性质．

引理10.6.1　设$\varphi=(\mathbf{u},\theta)$是Benard问题的解，而

$$-1\leqslant\theta_o(x)\leqslant 1\quad \text{a.e. } x\in\Omega \tag{10.6.17}$$

那么

$$-1\leqslant\theta(x,t)\leqslant 1\quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \text{a.e. } t \tag{10.6.18}$$

如果 $\varphi=(\mathbf{u},0)$ 对所有的 $t>0$ 都有意义，而 (10.6.17) 不成立，那么

$$\theta(x,t)=\tilde{\theta}(x,t)+\hat{\theta}(x,t) \tag{10.6.19}$$

$-1\leqslant\tilde{\theta}(x,t)\leqslant 1,\ \hat{\theta}(x,t)\to 0$　当$t\to+\infty$在$\mathbf{H}_1$中成立．　(10.6.20)

证　由式(10.6.17)有

$$T_1\leqslant T(x,0)\leqslant T_o\quad \text{a.e. } x\in\Omega.$$

我们要证明$T_1\leqslant\tau(x,t)\leqslant T_o$　$\forall$a.e. $x\in\Omega$, a.e. t. 设

$$(T-T_o)_+=\begin{cases}T-T_o & T\geqslant T_o\\ 0 & T\leqslant T_o\end{cases}$$

$(T-T_o)_+=0,\ x_n=0,\ x_n=1$　且$(T-T_o)_+\in\mathbf{L}^2(0,\tau;\mathbf{H}^1(\Omega))$，用$(T-T_o)_+$乘式(10.6.2)两边，并且积分使得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(T-T_o)_+|^2+k\|(T-T_o)_+\|^2=0$$

由Poincare不等式得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(T-T_o)_+|^2+k|(T-T_o)_+|^2\leqslant 0 \tag{10.6.21}$$

所以 $|(T-T_o)_+|$ 是 t 的递减函数，而 $t=0$ 时它是零，所以 $t>0$ 它也都是零，即 $\tau(\cdot,t)\leqslant T_o$　$\forall t\geqslant 0$. 同样可以证明 $(T-T_o)_-$ 情形．所以式 (10.6.18) 得证．

如果(10.6.17)没有被假设，则由(10.6.21)得

$$|(T-T_o)_+(t)| \leqslant |(T-T_o)_+(0)|\exp(-kt)$$

同样有

$$|(T-T_o)_-(t)| \leqslant |(T-T_o)_-(0)|\exp(-kt)$$

设 $T=\tilde{T}+\hat{T}$，$\hat{T}=(T-T_o)_+-(T-T_o)_-$，从而有 $T_1 \leqslant \tilde{T} \leqslant T_o$ 以及 $\hat{T}(t)\to 0$ 在 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 中成立，只要 $t\to+\infty$.

$$|\hat{T}(\cdot,t)| \leqslant \{|(T-T_o)_+(0)|+|(T-T_1)_-(0)|\}\exp(-kt)$$

证毕.

利用引理10.6.1，则

$$\begin{aligned}|\theta(t)| &\leqslant |\tilde{\theta}|+|\hat{\theta}| \\ &\leqslant |\Omega|^{1/2}+\{|(\theta-1)_+(0)|+|(\theta+1)_-(0)|\}\exp(-kt)\end{aligned}$$

所以

$$|\theta|_\infty \leqslant |\Omega|^{1/2}+|(\theta-1)_+(0)|+|(\theta+1)_-(0)| \qquad (10.6.22)$$

$$\limsup_{t\to\infty}|\theta(t)| \leqslant |\Omega|^{1/2} \qquad (10.6.23)$$

这里$|\Omega|$是Ω之体积.

又由于

$$(B_o(\varphi,\psi),\psi)=0 \quad \forall\varphi,\psi\in\mathbf{V}_o \qquad (10.6.24)$$

$$(B_1(\varphi,\theta),\theta)=0 \quad \forall\varphi\in\mathbf{V}_o,\ \forall\theta\in\mathbf{V}_1 \qquad (10.6.25)$$

于是有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2+\lambda\|\mathbf{u}\|^2-(\theta,u_n)=0 \qquad (10.6.26)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2+k\|\theta\|^2-(\theta,u_n)=0 \qquad (10.6.27)$$

从而

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 + \lambda\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{|\theta|^2}{2\lambda}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{|\theta|^2}{2\lambda} \text{(Poincare不等式)}$$

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 + \lambda\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda}|\theta|^2$$

$$|\mathbf{u}(t)| \leqslant |u_o|^2\exp(-\lambda t) + \frac{1}{\lambda^2}|\theta|_\infty^2(1-\exp(-\lambda t))$$

由(10.6.22)，则

$$\limsup_{t\to\infty}|\mathbf{u}(t)|^2 \leqslant \lambda^{-2}|\Omega| \tag{10.6.28}$$

另一方面，积分后又可得

$$\begin{cases} |\mathbf{u}(t)|^2 + \lambda\int_o^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 ds \leqslant |\mathbf{u}_o|^2 + \lambda^{-1}\int_o^t |\theta(s)|^2 ds \\ \frac{\lambda}{t}\int_o^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 ds \leqslant \frac{1}{\lambda t}|u_o|^2 + \frac{1}{\lambda t}\int_o^t |\theta(s)|^2 ds \\ \limsup_{t\to\infty}\frac{\lambda}{t}\int_o^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 ds \leqslant \lambda^{-1}|\Omega| \end{cases} \tag{10.6.29}$$

对于θ，同样有

$$\frac{d}{dt}|\theta|^2 + 2k\|\theta\|^2 \leqslant 2|\theta'||u|$$

$$\frac{2k}{t}\int_o^t \|\theta(s)\|^2 ds \leqslant \frac{1}{t}|\theta(0)|^2 + \frac{2}{t}\int_o^t |\theta(s)|\|u(s)\| ds$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_o^t \|\theta(s)\|^2 ds$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\{\lim_{t\to\infty}\sup|\theta(t)|\}\{\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_o^t \|u(s)\|^2 ds\}^{1/2}.$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{k}{t}\int_{o}^{t} \|\theta(s)\|^2 ds \leqslant \frac{1}{\lambda}|\Omega| \tag{10.6.30}$$

定理 10.6.1 对于 $n=2$, 在 V 中, 在半群 $S(t)$ 存在一个有界吸收集 Σ. 对任何 V 中有界集 D, 存在 $t(D)>0$ 使得

$$S(t)D\subset\Sigma \quad \forall t\geqslant t(D)$$

证 设 $D\subset\{(\mathbf{u},\theta)\in\mathbf{V},\ \|u\|\leqslant M,\ \|\theta\|\leqslant M_1\}\ \forall\varepsilon>0$,
由引理 10.6.1 和式 (10.6.28) 得

$$|\theta(t)|\leqslant|\Omega|^{1/2}+\varepsilon, \quad |\mathbf{u}(t)|\leqslant\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon$$

从Benard方程不难得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2+\lambda|A_o\mathbf{u}|^2&=(\theta,\mathbf{u}_n)-(B_o(\mathbf{u},\mathbf{u}),\ A_o\mathbf{u})\\&\leqslant|\theta||\mathbf{u}|+|B_o(\mathbf{u},\mathbf{u})||A_o\mathbf{u}|\\&\leqslant|\theta||\mathbf{u}|+c|\mathbf{u}|^{1/2}\|\mathbf{u}\||A_o\mathbf{u}|^{3/2}\\&\leqslant|\theta||\mathbf{u}|+\frac{\lambda}{2}|A_o\mathbf{u}|^2+\frac{c}{\lambda^3}|\mathbf{u}|^2\|\mathbf{u}\|^4\end{aligned}$$

所以, 对于$t\geqslant t_o$, 有

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2+\lambda|A_o\mathbf{u}|^2\leqslant2|\theta||\mathbf{u}|+\frac{c}{\lambda^3}|\mathbf{u}|^2\|\mathbf{u}\|^4$$

$$\leqslant2(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)(\frac{|\Omega|^{1/2}}{\lambda}+\varepsilon)+\frac{c}{\lambda^3}(\frac{|\Omega|^{1/2}}{\lambda}+\varepsilon)^2\|\mathbf{u}\|^4,\ t\geqslant t_o$$

对(10.6.26)在$(t,t+1)$上积分得

$$|\mathbf{u}(t+1)|^2+2\lambda\int_t^{t+1}\|\mathbf{u}(s)\|^2ds$$

$$\leqslant|\mathbf{u}(t)|^2+2\int_t^{t+1}|\theta(s)||\mathbf{u}(s)|ds$$

只要$t\geqslant t_o$

$$\int_t^{t+1} \|\mathbf{u}\|^2 ds \leqslant \frac{1}{2\lambda}(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)^2+\lambda^{-1}(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)$$

应用一致Gronwall引理，便可得到

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leqslant (a_2(\varepsilon)+a_3(\varepsilon))\exp(a_1(\varepsilon))$$

其中

$$a_2 = 2(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\lambda}(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)^2+\lambda^{-1}(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)$$

$$a_1 = 2c\lambda^{-3}(\lambda^{-1}|\Omega|^{1/2}+\varepsilon)a_3$$

因而，$\forall t \geqslant 1+t_o$，我们可以选择$\Sigma=\Sigma_o\times\Sigma_1$使得

$$\Sigma_o=\{\varphi\in \mathbf{V}_o, \|\varphi\| \leqslant \sqrt{a_2+a_3}\exp(\frac{1}{2}a_1)\}$$

类似地可以推选Σ_1，这就是吸收集.

对于吸引子的存在性，可以用第九章中关于N－S方程相似方法来证明.而且同样可以证明，吸引子的Housdorff维数是有限的[11].

附录 A 非线性泛函分析中的若干问题

本附录中，我们将简要介绍非线性泛函分析中若干问题，如泛函极值、位势型算子、单调算子等.它们在研究非线性边值问题中有非常重要的应用.

§A.1 非线性算子

众所周知，如映射 $T\in L(X,Y)$，这里 X,Y 是 Banach 空间，是指算子 T 满足 $\forall u,v\in X$，$\alpha,\beta\in K$(数域)，有 $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$. 如 T 不满足上述等式，则称它为非线性算子.

我们沿用泛函分析中熟知的强收敛、弱收敛以及弱星收敛的概念和记号 S→，→(弱)，→(弱星)来讨论算子的连续性.

定义 A.1.1 算子 T: X→Y 称为在点 $u_o\in X$ 处连续，是指如果对于 X 中每一个收敛的序列 $u_n\to u_o$，有 $T(u_n)$ 在 Y 中收敛于 $T(u_o)$. 如果 T 在集合 Ω 内每一点是连续的，则称 T 在 Ω 上是连续的.

定义 A.1.2 设 T 是由 X 到 Y 的一个算子.

(1) T 在 $u_o\in X$ 处强连续，如果对每一个在 X 内弱收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，都有 $T(u_n)$ 在 Y 中强收敛于 $T(u_o)$.

(2) T 在 $u_o\in X$ 处弱连续，如果对每一个在 X 内弱收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，有 $T(u_n)$ 在 Y 中弱收敛于 $T(u_o)$.

因为按范数收敛意味着弱收敛也成立，从而强连续算子 T 必然是连续的，也是弱连续的.

对于 X 上的泛函，强连续和弱连续是一致的. 事实上，此

时 $\mathbf{Y}=\mathbf{R}$. 对于实数，强收敛和弱收敛是一致的. 按通常的习惯. 我们定义泛函 f: $\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 在 $u_o\in\mathbf{X}$ 处弱连续，如果对每一个在 $\mathbf{X}$ 中弱收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，都有在 $\mathbf{R}$ 中，$f(u_n)\to f(u_o)$. 注意对泛函而言，弱连续的概念比连续的概念更强.

定义 A.1.3 设算子 T: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$($\mathbf{X}$ 的对偶空间). 若 $\forall\{u_n\}\subset\mathbf{X}$, u_n 收敛于 u, 都有 $T(u_n)$ 弱收敛于 $T(u)$, 则称算子 T 在 u 处次连续，或称为 D－连续 (Demicontinuous). 另外. $\forall t_n>0$, $t_n\to 0$, 那么，对任一 $v\in\mathbf{X}$, 都有 $T(u+t_nv)$ 弱收敛 $T(u)$, 则称 T 在 u 处半连续，或 H－连续 (Hemi-continuous).

算子 T 在 $\mathbf{X}$ 中处处次连续，或处处半连续，则称 T 在 $\mathbf{X}$ 上次连续或半连续.

由定义可知，次连续必是半连续.

定理 A.1.1 设线性算子 L: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$. 如果 L 是次连续的，那么 L 也是连续的.

证 只需证明 L 在零处连续即可. 若不然，则存在一个序列 $\{u_n\}, u_n\to 0$. 但 $\|Lu_n\|_{\mathbf{X}'}\geqslant\varepsilon(\varepsilon>0)$, 令 $t_n=\|u_n\|_{\mathbf{X}}^{-1/2}$ ($u_n\neq 0$), $v_n=t_nu_n$, 则 $v_n\to 0$, 但是

$$\|Lv_n\|_{\mathbf{X}'}=t_n\|Lu_n\|_{\mathbf{X}'}\geqslant\varepsilon t_n\to\infty$$

这与 L 是次连续的相矛盾. 证毕.

由泛函分析知，Banach 空间 $\mathbf{X}$ 是自反的充要条件是 $\mathbf{X}$ 中任一有界集必是弱列紧集. 因此，自反 Banach 空间非线性算子是我们首先关心的.

定理 A.1.2 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间，T: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 是强连续的，则 T 也是紧算子.

定理 A.1.2 的逆一般是不成立的. 例如定义在 Hillert 空

间 H 上的泛函 $f(u):=\|u\|$ 是紧的，但是存在一个序列 $\{e_n\}$，例如 H 的正交基，在 H 中 $e_n\to 0$，又对每一个 n，$\|e_n\|=1$. 从而 f 不是强连续的.

但是，对于线性算子，定理 A.1.2 的逆是成立的. 其证明要用到下述引理.

引理 A.1.1 设 L: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 是线性有界算子，则 L 是弱连续的. 即如果在 $\mathbf{X}$ 中，$u_n\to u_o$（弱），则在 $\mathbf{Y}$ 中 $Lu_n\to Lu_o$（弱）.

证 设 v^* 是 $\mathbf{Y}'$ 中任意元素，考虑

$$l(u):=\langle Lu,v^*\rangle \qquad \forall u\in\mathbf{X}$$

因为 L 是线性的，所以 l 是 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，而且 l 是有界的；

$$\left|\langle Lu,v^*\rangle\right|\leqslant\|Lu\|_{\mathbf{Y}}\|v^*\|_{\mathbf{Y}'}\leqslant\|L\|\|u\|_{\mathbf{X}}\|v^*\|_{\mathbf{Y}'}$$

从而存在一个 $u^*\in\mathbf{X}'$ 使得

$$\langle Lu,u^*\rangle=\langle u,u^*\rangle \qquad \forall u\in\mathbf{X}$$

则如果在 $\mathbf{X}$ 中 $u_n\to u_o$（弱），有 $\langle u_n-u_o,u^*\rangle\to 0$，$\forall u^*\in\mathbf{X}'$ 以及 $\langle L(u_n-u_o),\ v^*\rangle\to 0$. 由 $v^*\in\mathbf{Y}'$ 的任意性，有 $Lu_n\to Lu_o$（弱）. 证毕.

定理 A.1.3 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间，$\mathbf{Y}$ 是 Banach 空间. 如果 L: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 是线性紧算子，则 L 是强连续的、即 L 把弱收敛 序列映为强收敛序列.

证 设 $\{u_n\}\subset\mathbf{X}$，$u_n\to u_o$（弱），我们要证明 $Lu_n\to Lu_o$. 如不然，存在 $\{u_{n'}\}\subset\{u_n\}$，使得

$$\|Lu_n-Lu_o\|_{\mathbf{Y}}>\varepsilon,\ \text{对某个}\varepsilon \tag{A.1.1}$$

对序列 $\{u_{n'}\}$，仍有 $u_{n'} \to u_o$（弱），因而在 X 中 $\{u_{n'}\}$ 有界．又 L 是紧算子，因此存在 $\{u_{n''}\} \subset \{u_{n'}\}$，使得在 Y 中 $Lu_{n''} \to v_o \in \mathrm{Y}$．另一方面，根据线性紧算子是有界的以及引理 A.1.1，由 $u_{n''} \to u_o$（弱）得在 Y 中 $Lu_{n''} \to Lu_o$（弱）．又弱极限是唯一的，故在 Y 中有 $v_o = Lu_o$ 以及 $Lu_{n''} \to Lu_o$，这与 (A.1.1) 矛盾．从而在 Y 中有 $Lu_n \to Lu_o$．证毕．

和连续函数的 Weierstrass 定理一样，对于弱连续泛函也有广义的 Weierstrass 定理．

定理 A.1.4 设 X 是自反的 Banach 空间，$K \subset \mathrm{X}$ 是有界的弱闭集（即相对于弱收敛是闭的）．如果泛函 f 在 K 上弱连续，那么 f 在 K 上有界而且达到它的上确界和下确界．

证 首先证明 f 在 K 上下有界．若不然，即存在序列 $\{u_n\} \subset K$，使得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = -\infty$．因为 K 是有界的，故 $\{u_n\}$ 是一致有界的，从而可选出一个在 X 中弱收敛的子序列 $\{u_{n'}\}$，其弱极限为 u_o．因为 K 是弱闭的，$u_o \in K$．由 f 的弱连续知 $f(u_o) = \lim\limits_{n' \to \infty} f(u_{n'})$．但这是不可能的，因为 $\lim\limits_{n' \to \infty} f(u_{n'}) = -\infty$．从而 f 在 K 上下有界．类似可以证明 f 在 K 上有界．

现在设 $\alpha := \inf\limits_{k} f(u)$．由定义知 $f(u) \geqslant \alpha$，$\forall u \in \mathrm{X}$ 以及存在序列 $\{u_n\} \subset K$，使得 $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n)$．与前面讨论一样，可以选出一子序列 $\{u_{n'}\} \subset K$ 弱收敛于 $u_o \in K$，而且 $\lim\limits_{n' \to \infty} f(u_{n'}) = \alpha$．另一方面 f 的弱连续性有 $\lim\limits_{n' \to \infty} f(u_{n'}) = f(u_o) = \alpha$．从而 $f(u_o) = \alpha$ 以及 $f(u) \geqslant \alpha, \forall u \in K$．即 $f(u_o) = \min\limits_{u \in k} f(u)$．类似地可以证明存在 u_1

$\in K$，使得 $f(u_1)=\max_{u\in K} f(u)$. 证毕.

§A.2 泛函下半连续和上半连续

前面我们解决了弱紧区域上弱连续泛函的有界性. 然而在许多应用中所遇到的泛函不是弱连续的. 尽管如此, 这些泛函可能是单边有界, 即上有界或下有界. 这就引出了一个在变分计算中经常遇到的半连续的概念.

定义 A.2.1 泛函 f: $\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 称为在点的 $u_o\in\mathbf{X}$ 处下半连续，如果对 $\mathbf{X}$ 中每个收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，有

$$f(u_o)\leqslant \lim_{n\to\infty}\inf f(u_n) \tag{A.2.1}$$

f 称为在 $u_o\in\mathbf{X}$ 处弱下半连续 ($w.l.s.c$)，如果对 $\mathbf{X}$ 中每一个弱收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，有 (A.2.1) 式成立. 相应地，f 称为在 $u_o\in\mathbf{X}$ 处上半连续，如果对 $\mathbf{X}$ 中每一个收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，有

$$f(u_o)\geqslant \lim_{n\to\infty}\sup f(u_n\} \tag{A.2.2}$$

f 称为在 $u_o\in\mathbf{X}$ 处弱上半连续 ($w.u.s.c$)，如果对 $\mathbf{X}$ 中每一个弱收敛于 u_o 的序列 $\{u_n\}$，有 (A.2.2) 式成立.

容易看出，如果 f 在 u_o 处弱连续，则在 u_o 处 f 是弱下半连续和弱上半连续，反之亦然.

例 1 设 $\mathbf{H}$ 是一个 Hilbert 空间，定义泛函

$$f(u)=\|u\|^2 \qquad \forall u\in\mathbf{H}$$

则 f 不是弱连续的. 但在每一个点 $u_o\in\mathbf{H}$ 上，f 是弱下半连续的. 事实上，设在 $\mathbf{H}$ 中 $u_n\to u_o$(弱)，则当 $n\to\infty$ 时，$(u_n,u_o)\to(u_o,u_o)$. 从而由

$$0 \leqslant (u_n - u_o, u_n - u_o) = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u_o) + \|u_o\|^2$$

得出 $\|u_n\|^2 \geqslant 2(u_n, u_o) - \|u_o\|^2$，这表明 $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \geqslant \|u_o\|^2$

例 2 设 $B(u,v)$ 是 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 的连续双线性泛函，而且是正定的，即 $B(u,u)\geqslant 0$, $\forall u\in\mathbf{X}$. 设

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - g(u) \qquad \forall u\in\mathbf{X}$$

其中 $g(u)$ 是 $\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 的线性有界泛函．则 $J(u)$ 在 $\mathbf{X}$ 上也是弱下半连续的．

下面我们将给出弱下半连续泛函与广义 Weierstrass 定理相类似的结论．首先由泛函分析知：

引理 A.2.1 设集合 K 是闭的和凸的，则 K 是弱闭的．

定义 A.2.2 泛函 f: $K\to\mathbf{R}$ 在 u 点具有增长性质，如果存在 $\alpha>0$，使得 $\forall v\in K$, $\|u-v\|>\alpha$ 时，有 $f(v)>f(u)$.

定理 A.2.1 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间，$K\subset\mathbf{X}$ 是闭和凸的，f: $K\to\mathbf{R}$ 在 K 上弱下半连续．如果

(1)K有界的，或

(2) f在K的某个点u上具有增长性质.

则存在 $u_o\in\mathbf{K}$ 使得，$f(u_o)\leqslant f(u)$ $\forall u\in K$，即 f 在 K 上达到极小值．

证 (1) 首先 f 是下有界的，如不然；则存在 $\{u_n\}\subset K$，满足 $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = -\infty$；又 $\{u_n\}$ 是一致有界的，从而存在子序列 $\{u_{n'}\}$，具有 $u_{n'}\to u_o$（弱），又由引理 A.2.1 知 $u_o\in K$. 因为 f 在 K 上是弱下半连续，则有 $f(u_o)\leqslant \liminf(u_n)$，而这与 $f(u_{n'})\to -\infty$ 是矛盾的．其次，在 K 上 f 达到极小值．事实上，设 $\alpha = \inf_k f(u)$, $\{u_n\}\subset K$ 使得 $f(u_n)\to\alpha$. 则 $\{u_n\}$ 中包含一

列$\{u_{n'}\}$，使得$u_{n'}\to u_o$(弱)$\in K$，而且$f(u_{n'})\to\alpha$. 又f是弱下半连续，从而有$f(u_o)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}f(u_{n'})=\lim f(u_{n'})=\alpha$. 而由$\alpha$的定义有$f(u_o)\geqslant\alpha$，故$f(u_o)=\alpha$.

(2) 设f在$v_o\in K$具有增长性质. 令

$$B=\{u\in\mathbf{X}:\ \|u-v_o\|\leqslant\alpha\}$$

则在有界闭凸集$B\bigcap K$上，由(1)知，f在$B\bigcap K$上达到极小值，又由$\inf\{f(u),u\in K\}=\inf\{f(u),u\in K\bigcap B\}$，故$f$在$K$上达到极小值. 证毕.

§A.3 微分算子

定义 A.3.1 设$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是实Banach空间. 算子$F:\ K\subset\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$称为在点$u\in K$处(线性)Gateaux可微，如果存在线性有界算子$T(u):\ \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$，使得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u+th)-F(u)}{t}=T(u)h\qquad\forall h\in\mathbf{X}\qquad\text{(A.3.1)}$$

成立，这里$t\in\mathbf{R}$，极限过程在$\mathbf{Y}$的范数下收敛.

算子$T(u)\in\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$称为$F$在点$u\in\mathbf{X}$处的Gateaux微分并记为$DF(u)$，则$DF(u)\in\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

$\forall h\in\mathbf{X}$，$DF(u)h\in\mathbf{Y}$称为F在点u处h方向上的Gateaux微分. 如果f在K上每点处Gateaux可微，则F在子集$K\subset\mathbf{X}$上Gateaux可微. 此时映射$u\to DF(u)$称为F在K上的Gateaux导数，且记为DF，从而$DF:\ K\to\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

定义 A.3.2 算子$F:K\subset\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$称为在$u\in K$处Frechet可微，如果存在线性有界算子$T(u):\ \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$，使得

$$F(u+h)-F(u)=T(u)h+w(u;h)\quad\forall h\in\mathbf{X}\qquad\text{(A.3.2)}$$

成立，这里 $w(u;\cdot)$: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 满足

$$\lim_{\|h\|_{\mathbf{X}}\to 0}\frac{\|w(u;h)\|_{\mathbf{Y}}}{\|h\|_{\mathbf{X}}}=0 \tag{A.3.3}$$

算子 $T(u)$ 称为 F 在点 $u\in K$ 处 Frechet 导数，并记为 $dF(u)$. 由定义有 $dF(u)\in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, 如果 f 在 K 上每一点 Frechet 可微，则称 F 在 $\mathbf{X}$ 的子集 K 上 Frechet 可微 . 此时映射 $u\to dF(u)$ 称为 F 在 K 上的 Frechet 导数，记为 $dF\in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

特别地，如果泛函 f: $\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ 在 $K\subset\mathbf{X}$ 上 Gateaux 可微，则 f 在 $u\in K$ 处的导数 $Df(u)$, 是 $\mathbf{X}$ 上的的有界线性泛函，从而 $\forall u\in K$, $Df(u)\in\mathbf{X}'$, 即 Df: $K\to\mathbf{X}'$. 相应地 $\forall h\in\mathbf{X}$, 根据 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}'$ 之间的对偶映射，有

$$Df(u)h=\langle h,\mathrm{Grad}f(u)\rangle \tag{A.3.4}$$

这里 $\mathrm{Grad}f(u)$ 称之为 f 在点 u 处的梯度算子 .$\mathrm{Grad}f(\cdot)$ 称为 f 的梯度算子，而 f 称为 $\mathrm{Grad}f$ 的位势泛函 . 尤其是，如果 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 是 Hilbert 空间，根据 Riesz 表现定理，存在唯一的元素 $w\in\mathbf{X}$ 使得 $\langle h,\mathrm{Grad}f(u)\rangle=(w,h)$. 那么 w 称为 f 在 u 点的梯度，同样记为 $w=\mathrm{Grad}f(u)$.

例 3　设 $Tu=\Delta u-u^2$, 其中 Δ 为 Laplace 算子，令 $\mathbf{X}=\mathbf{C}^2(\Omega)$, $\mathbf{Y}=\mathbf{C}^0(\Omega)$, 取最大模，则由 (A.3.2) 有

$$T(u+h)-T(u)=\Delta h-2uh-h^2$$

$w(u,h)=-h^2$ 以及 $\|w(u,h)\|_{\mathbf{Y}}=\sup|h|^2\leqslant\|h\|_{\mathbf{X}}^2$, 故 $\mathrm{dT(u)}=\Delta-2\mathrm{u}$.

例 4　设 F: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是具有一阶连续偏导数的 n 元函数，则

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[F(x+\tau h)-F(x)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i=DF(x)h$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$. 显然 $DF(x)$ 是 x 的连续函数.

建立算子的微分以后，可以把微分学中的基本定理推广到 Banach 空间. 如连续可微函数的中值定理，对于由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的可微算子一般是不成立的. 但是我们将要证明，对于 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，这个定理是成立的. 对于由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的算子，可以得到这个定理的某种变形.

定理 A.3.1 设 $K\subset\mathbf{X}$ 为凸集 (即 $\forall u,v\in K$, $t\in(0,1)$, 有 $tu+(1-t)v\in K$), f: $K\to\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上泛函，且如果 f 在 K 上是 Gateaux 可微，则存在 $\tau\in(0,1)$, 使得

$$f(u)-f(v)=Df(\tau u+(1-\tau)v)(u-v) \tag{A.3.5}$$

证 定义 $\varphi(t):=f(tu+(1-t)v)$, 则 $\varphi:[0,1]\to R$ 且 $\varphi(0)=f(v)$, $\varphi(1)=f(u)$. 考察 φ 在 $t\in(0,1)$ 处导数：

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)}{\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(tu+(1-t)v+\varepsilon(u,v))-f(tu+(1-t)v)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

因为在 $tu+(1-t)v\in K$ 处 f 是 Gateaux 可微的，最后一个极限存在且等于 $Df(tu+(1-t)v)(u-v)$, 从而 $\varphi'(t)=Df(tu+(1-t)v)(u-v)$. 对 φ, 由古典的中值定理知道，存在 $\tau\in(0,1)$, 使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 由此即得本定理的结果. 证毕.

如前所述. 这个定理对由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的任意算子一般是不成立的. 为了得到相应的结论，我们进行必要的修改. 设 $K\subset\mathbf{X}$ 为凸集，算子 $F:K\to\mathbf{Y}$ 是 $G-$ 可微的. 对于任意 $v^*\in\mathbf{Y}'$, $f(u)=\langle F(u),v^*\rangle$ 定义了 K 上的一个泛函，同时 f 是 $G-$ 可微而且

$$Df(u)h=\langle DF(u)h,v^*\rangle \qquad \forall h\in\mathbf{X}$$

由 (A.3.5) 式，$\forall u,v\in K$, 存在 $\tau\in(0,1)$, 使得

$$\langle F(v)-F(u),v^{*}\rangle=\langle DF(\tau u+(1-\tau)v)(v-u),v^{*}\rangle \quad (A.3.6)$$

这里 τ 与 v^{*} 有关.

定理 A.3.2 设 F 是由凸集 $K\subset X$ 到 Y 的算子. 如果 F 在 K 上 G - 可微且 DF 在 K 上一致有界，即存在 $M>0$，使得 $\|DF(u)\|\leqslant M$，$\forall u\in K$. 则 F 在 K 上满足 Lipschitz 条件，即

$$\|F(u)-F(v)\|_{Y}\leqslant M\|u-v\|_{Z} \qquad \forall u,v\in K$$

证 由泛函分析知，对于给定 $v\in Y$，存在 $v_{o}^{*}\in Y'$，使得 $\langle v,v_{o}^{*}\rangle=\|v\|$ 以及 $\|v_{o}^{*}\|=1$. 故由 (A.3.6) 有

$$\langle F(v)-F(u),v_{o}^{*}\rangle=\|F(v)-F(u)\|_{Y}$$

以及

$$\left|\langle DF(\tau_{o}v+(1-\tau_{o})u)(v-u),v_{o}^{*}\rangle\right|$$
$$\leqslant\|DF(\tau_{o}v+(1-\tau_{o})u)(v-u)\|_{Y}$$

从而

$$\|F(v)-F(u)\|_{Y}\leqslant\|DF(\tau_{o}v+(1-\tau_{o})u)(v-u)\|_{Y}$$
$$\leqslant\|DF(\tau_{o}v+(1-\tau_{o})u)\|\|v-u\|_{X}$$

证毕.

现在我们证明 G - 导数和 F - 导数之间的关系.

定理 A.3.3 如果算子 T 在 $u\in K$ 的邻域内 Gateaux 可微并且 $DT(u)$ 在 u 处连续，则 T 在 u 处 Frechet 可微且 $dT(u)=DT(u)$. 即连续的 G 导数是 F 导数.

证 设 $T{:}K\subset X$ 在 $u\in K$ 的邻域内 Gateaux 可微. $\forall h\in K$，且 $\|h\|_{X}$ 充分小，根据 (A.3.6) 有

$$\langle T(u+h)-T(u),v^{*}\rangle=\langle DT(u+\tau h)h,v^{*}\rangle$$

这里 $v^{*}\in Y$ 是任意的以及 $\tau\in(0,1)$ 依赖于 v^{*}. 考虑表达式 $w(u;h)$:

$= T(u+h) - T(u) - DT(u)h$，则

$$\langle w(u;h), v^* \rangle = \langle (DT(u+\tau h) - DT(u))h, v^* \rangle$$

则存在元素v_o^*使得$\langle w(u;h), v_o^* \rangle = \|w(u;h)\|_Y$以及

$$\left|\langle [DT(u+\tau_o h) - DT(u)]h, v_o^* \rangle\right|$$
$$\leqslant \|[DT(u+\tau_o h) - DT(u)]h\|_Y$$
$$\|w(u;h)\|_Y \leqslant \|DT(u+\tau_o h) - DT(u)\| \, \|h\|_X$$

又由 DT 在 u 处连续的假设，有

$$\|DT(u+\tau_o h) - DT(u)\| \to 0 \qquad \forall \|h\|_X \to 0$$

由此得出 T 在 u 处 Frechet 可微且 $dT(u) = DT(u)$. 证毕.

由定义可知如果 T 在 $u \in K$ 处 Frechet 可导，则 T 在 u 处 Gateaux 可导而且 $DT(u) = dT(u)$. 定理 A.3.3 说明，如 T 在 u 处 G 可导且 DT 连续才能保证 F 可导.

§A.4　位势型算子

在 §A.3 中，我们已经知道 **X** 上定义的 **Gateaux** 可微泛函的梯度是由 **X** 到 **X′** 的算子，即

$$\langle Df(u), h \rangle = \langle \text{Grad} f(u), h \rangle$$

如果 $f(u)$ 在 u 处 Frechet 可微，则相应的梯度算子记为 $\text{grad} f(u)$，则有

$$\langle df(u), h \rangle = \langle \text{grad} f(u), h \rangle$$

例 5　设 H 为 Hilbert 空间，$f(u) = \|u\|_H^2$，则 $\text{Grad} f(u) = 2u$. 由于$\text{Grad} f(u)$关于u是连续的.故$\text{Grad} f(u) = \text{grad} f(u)$.

尤其当 $H = L^2(\Omega)$，则 $\langle \text{grad} f(u), v \rangle = 2(u, v)_{L^2(\Omega)}$.

所以$|\langle \text{grad} f(u), v \rangle| \leqslant 2\|u\|_{o,2,\Omega} \|v\|_{o,2,\Omega}$. 把 $\text{grad} f(u)$ 视作 $H_0^1(\Omega)$

$\to H^{-1}(\Omega)$ 的线性连续算子时，由 Riesz 表现定理，有

$$\langle \text{grad} f(u), v\rangle = 2(u,v)_{L^2(\Omega)} = (Tu,v)_{H^1(\Omega)} \quad \forall v\in H_o^1(\Omega)$$

定义 A.4.1 设 $u_o \in \mathbf{X}$，使 $\text{Grad} f(u_o) = 0$，称 u_o 为泛函 f 的驻点.

定义 A.4.2 算子 $T: \mathbf{X}\to \mathbf{X}'$ 称为 $K\subset \mathbf{X}$ 上的位势（或梯度）算子，如果存在 Gateaux 可微泛函 $f: K\subset \mathbf{X}\to R$，使得 $\text{Grad} f(u) = T(u)$，$\forall u\in K$，泛函 f 称为算子 T 在 K 上的位势. 如果 f 是 Frechet 可微，使得 $\text{grad} f(u) = T(u)$，则 T 称为强位势算子，f 是 T 的强位势.

我们经常谈到算子 T 的位势 f，但是容易看到，给定位势算子 T 的位势不是唯一确定的，事实上如果 $\text{Grad} f(u) = T(u)$，则 $\text{Grad}(f(u) + c) = T(u)$，$\forall c\in \mathbf{R}$.

但是以后可以看到，除去任意常数，f 是由位势算子唯一确定的.

通常，确定什么样的算子是位势型的以及它的结构不是一件容易的事. 下面给出这方面问题的有关论述.

定理 A.4.1 设算子 $T: \mathbf{X}\to \mathbf{X}'$ 在球 $B = \{u: \|u - u_o\| \leq r\}$ 上 Gateaux 可微且导数为 DT，且设 $\forall u\in B$，$\forall h,v\in \mathbf{X}$ 泛函 $\langle DT(u)h,v\rangle$ 是连续的，则 T 在 B 上是位势算子的充分与必要条件是 $\forall u\in B$，双线性泛函 $\langle DT(u)h,v\rangle$ 是对称的. 即

$$\langle DT(u)h,\ v\rangle = \langle DT(u)v,\ h\rangle \quad \forall v,h\in \mathbf{X} \tag{A.4.1}$$

进而，如果 (A.4.1) 成立，除去一个任意常数外，T 在 B 上的位势由下式确定：

$$f(u) = f(u_o) + \int_0^1 \langle T(u_o + t(u - u_o)), u - u_o\rangle dt \qquad \forall u,u_o\in B \tag{A.4.2}$$

证明可参看[26].

定理 A.4.1 完全解决了可微算子的位势性态的问题．但在许多问题中条件 (A.4.1) 是难以检验的．此时，可以写出 (A.4.2) 然后在 B 上直接验证 $\mathrm{Grad} f(x)=T(x)$. 如果给定的算子不满足定理的条件，即 T 是不可微的，我们同样可以使用后一种方法，在这种情况下，可以给出更一般的条件，对任意算子至少从形式上解决了位势形态的问题．

定理 A.4.2. 算子 $T: \mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ 是 $\mathbf{X}$ 上的位势算子的充分必要条件是

$$\int_0^1\langle T(tu),u\rangle dt-\int_0^1\langle T(tv),v\rangle dt$$
$$=\int_0^1\langle T(v+t(u-v)),u-v\rangle dt \qquad \text{(A.4.3)}$$

如果 (A.4.3) 式成立，T 的位势仍由 (A.4.2) 给出．

证　设T满足(A.4.3)且f由(A.4.2)给出.

$$f(u+\varepsilon h)-f(u)=\varepsilon\int_0^1\langle T(u+t\varepsilon h),h\rangle dt.$$

令$\varepsilon\to 0$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[f(u+\varepsilon h)-f(u)]=\langle T(u),h\rangle=\langle \mathrm{Grad} f(u),h\rangle.$$

即 $T(u)=\mathrm{Grad} f(u)$.

反之，如 T 是位势算子，f 是其位势，则

$$\frac{d}{dt}f(u+tv)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[f(u+(t+\varepsilon)v)-f(u+tv)]$$
$$=\langle T(u+tv),v\rangle.$$

从零到1对t积分，得

$$f(u+v)-f(u)=\int_0^1\langle T(u+tv),v\rangle dt.$$

用 u_0 代替 u，用 $u-u_0$ 代替 v，则得 (A.4.2) 式，以及 (A.4.3) 式. 证毕.

例 6. 设 A 是定义在 Hilbert 空间 H 上线性微分算子. 令 $Tu=Au-f$. 不难验证 $\langle DT(u)v,h\rangle=\langle Av,h\rangle$.

由定理 A.4.1 知，T 为位势算子的充要条件是

$$\langle Au,h\rangle=\langle Ah,u\rangle$$

这正是微分算子 A 自共轭条件. 由 (A.4.2)，令 $u_0=0$，$J(0)=0$，得

$$J(u)=\int_0^1\langle DT(tu),u\rangle dt=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle-\langle f,u\rangle$$

它就是 T 的位势，它正是自共轭算子的能量泛函.

例7 考察非线性微分方程.

$$\begin{cases}2u\Delta u+|\mathrm{grad}u|^2=f & \text{在}\Omega\text{内}\\ u|_\Gamma=0 & \Gamma=\partial\Omega\end{cases}$$

令 $T(u)=2u\Delta u+|\mathrm{grad}u|^2-f$，则

$$\begin{aligned}&\langle DT(u)v,h\rangle-\langle DT(u)h,v\rangle\\&=-2\int_\Omega[hu\Delta v-uv\Delta h+h(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}v)\\&\quad-v(\mathrm{grad}u,\mathrm{grad}h)]dxdy\end{aligned}$$

由于 $v|_\Gamma=h|_\Gamma=0$，故

$$\int_\Omega hu\Delta v dxdy=-\int_\Omega v\mathrm{grad}(hu)dxdy$$

对于 $\int_\Omega uv\Delta h dxdy$ 有类似的公式. 故

$$\langle DT(u)v,h\rangle=\langle DT(u)h,v\rangle.$$

所以 T 是位势算子，对应的位势是

$$J(u)=\int_{\Omega}(u|\Delta u|^2+fu)dxdy$$

§ A.5 Немыцкий算子

在这一节中，我们将讨论一类重要的位势算子，即 Немыцкий 算子．在处理非线性积分方程以及非线性边值问题中，这类算子是经常遇到的．

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的区域，不必是有界的，$t\in\mathbf{R}$. 函数 $g(x,t)$: $\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 称为满足 Caratheodory 条件，如果：

(1) $g(x,t)$关于t是连续的, $a.e.\forall x\in\Omega$;

(2) 对于每个 t, $g(x,t)$ 是 x(在 Ω 上)的可测函数．

设 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 是两个函数空间，$\forall u\in\mathbf{X}$, $u\to g(\cdot,u)\in\mathbf{Y}$ 确定了一个 $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 的映射：$G(u)(x)=g(x,u),\forall x\in\Omega$, $u\in\mathbf{X}$, 我们称 G 为 Немыцкий 算子．

定理 A.5.1　设 g: $\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足假设 (1), (2), $p,q\in[1,\infty)$. 则由 $G(u)(x)=g(x,u(x))$ 定义的 Немыцкий 算子具有：

(1) 如果 G: $\mathbf{L}^p(\Omega)\to\mathbf{L}^q(\Omega)$. 则 G: $\mathbf{L}^p(\Omega)\to\mathbf{L}^q(\Omega)$ 是连续和有界的，且存在一个函数 $a(x)\in\mathbf{L}^q(\Omega)$ 以及常数 $b\geqslant 0$, 使得

$$|g(x,t)|\leqslant a(x)+b|t|^r,\ r=p/q \tag{A.5.1}$$

(2) 如果 g 满足 (A.5.1), 则 G 是 $\mathbf{L}^p(\Omega)\to\mathbf{L}^q(\Omega)$ 的映照，并且是连续和有界的．

(3) 如果 G 是 $\mathbf{L}^p(\Omega),p\in[1,\infty),\to\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ 的映照，则存在常数 M, 使

$$|g(x,t)|\leqslant M,\ \forall t\in R,\ a.e.\forall x\in\Omega$$

这个定理的证明见 [26]

因为 $L^p(\Omega), p>1$，的对偶空间是 $L^q(\Omega)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，能够成为位势算子的 Немыцкий 算子也正是把 $L^p(\Omega)$ 映到 $L^q(\Omega)$ 的映照，这里 $q=p/(p-1)$，由 (A.5.1) 可知相应的 $g(x,t)$ 满足

$$|g(x,t)| \leqslant a(x)+b|t|^{\sigma}, \quad \sigma=p-1$$

这里 $a(x) \in L^q(\Omega)$ 以及 $b \geqslant 0$ 是常数．

我们将要证明，任何一个由 $L^p(\Omega)$ 到 $L^q(\Omega)$ 的 Немыцкий 算子的确是一个位势算子．可从位势 J 的 (A.4.2) 式出发，然后证明 J 是 Frechet 可微且对于 $u \in L^p(\Omega)$，有 $\operatorname{grad} J(u)=G(u)$.

定理 A.5.2 设 Немыцкий 算子 $G: L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则 G 是一个强位势算子，它的位势是

$$J(u)=J(0)+\int_{\Omega} dx \int_{0}^{u(x)} g(x,t) dt \tag{A.5.2}$$

并且 $J(u)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是连续的．

证 由定理 A.4.1 的公式 (A.4.2) 给出

$$J(u)=J(0)+\int_{0}^{1}\langle G(tu), u\rangle dt \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

这里 $\langle\ ,\ \rangle$ 是 $L^p(\Omega)$ 和 $L^q(\Omega)$ 之间的对偶积，($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)，即 $\langle u, w\rangle=\int_{\Omega} u(x) w(x) dx \quad \forall u \in L^p(\Omega)$，$w \in L^q(\Omega)$. 从而根据 Fubini 定理，交换积分次序，得

$$J(u)=J(0)+\int_{0}^{1} dt \int_{\Omega} u(x) G(tu)(x) dx$$

$$= J(0) + \int_0^1 dt \int_\Omega u(x) g(x, tu(x)) dx$$

$$= J(0) + \int_\Omega dx \int_0^1 u(x) g(x, tu(x)) dt$$

$$= J(0) + \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x, z) dz$$

此即(A.5.2)式.

为了证明 J 是 Frechet 可微且 $\mathrm{grad} J = G$, 考虑表达式

$$R(u,v) = J(u+v) - J(u) - \langle v, G(u) \rangle$$

$$= J(u+v) - J(u) - \int_\Omega v(x) g(x, u(x)) dx$$

注意(A.5.2), 此式可表示为

$$R(u,v) = \int_\Omega dx \left\{ \int_u^{u+v} g(x,z) dz - g(x, u(x)) v(x) \right\}$$

$$= \int_\Omega dx \left\{ \int_0^1 [g(x, u+tv) - g(x,u)] dt \right\} v(x)$$

根据中值定理 A.3.1, 存在一个 $\tau \in (0,1)$, 使得

$$R(u,v) = \int_\Omega dx [g(x, u+\tau v) - g(x,u)] v(x)$$

$$= \int_\Omega dx [G(u+\tau v)(x) - G(u)(x)] v(x)$$

$$= \langle v, G(u+\tau v) - G(u) \rangle$$

由 Hoelder 不等式, 有 $|R(u,v)| \leqslant \|v\|_{p,\Omega} \|G(u+\tau v) - G(u)\|_{q,\Omega}$.

又 G 是由 $L^p(\Omega)$ 到 $L^q(\Omega)$ 的连续映射, 故当 $\|v\|_{p,\Omega} \to 0$ 时, 有 $\|G(u+\tau v) - G(u)\|_{q,\Omega} \to 0$.

从而 $R(u,v) = \mathrm{O}(\|v\|_{p,(\Omega)})$, 这表明由 (A.5.2) 给出的 J 是 Frechet 可微, 且 $\mathrm{grad} J = G$. 证毕.

§ A.6 单调算子和凸泛函

泛函的凸性和它的梯度算子的单调性有密切联系，利用这种关系可以建立一类单调算子的变分原理.

定义 A.6.1 设 $K\subset \mathbf{X}$ 是非空子集，算子 $T: K\to \mathbf{X}'$，如果满足

$$\langle T(u)-T(v),u-v\rangle \geqslant 0,\quad \forall u,v\in K \tag{A,6.1}$$

则称 T 为 K 上的单调算子．如果

$$\langle T(u)-T(v),u-v\rangle = 0 \Rightarrow u=v,$$

则称 T 为严格单调算子．如果存在一个正函数 $\alpha(t)$，满足当 $t\to +\infty$ 时，$\alpha(t)\to +\infty$，且

$$\langle T(u)-T(v),u-v\rangle \geqslant \alpha(\|u-v)\|)\|u-v\| \quad \forall u,v\in K \tag{A.6.2}$$

则称 T 是强单调算子，其中 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{X}$ 的范数．如果成立

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|} = +\infty \tag{A.6.3}$$

则称算子是强制的.

注意，由定义易知，强单调算子一定是强制的．另外，这里引出的单调算子，强制的概念与前面几章中所引出的概念是一致的，只不过前面的是这里的一些特殊情况而已．

定义 A.6.2 设泛函 $f: K\to \mathbf{R}$ 满足 $\forall t\in[0,1]$,

$$f(tu+(1-t)v)\leqslant tf(u)+(1-t)f(v) \quad \forall u,v\in \mathrm{K}$$

则称 f 在 K 上是凸的；如果当 $u\neq v$ 时，上式成立严格不等号，则称 f 在 K 上是严格凸的．

定理 A.6.1 设 $K\subset \mathbf{X}$ 是一个凸集，$f: K\to \mathbf{R}$ 在 K 上 Gateaux 可微，则下列结论是等价的：

(1) f是凸的(或严格凸的);

(2) Grad$f$ 在 K 上是单调的 (或严格单调的);

(3) $\forall u,v\in K$，成立

$$\langle \mathrm{Grad} f(u), v-u \rangle \leqslant f(v)-f(u) \tag{A.6.4}$$

〈或当 $u \neq v$ 时，仅仅成立不等号〉.

证 (1)→(3)：因为 $\forall t \in [0,1]$，有 $f(u+t(v-u)) \leqslant f(u) + t(f(v)-f(u))$，所以

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(u+t(v-u))-f(u)}{t} \leqslant f(v)-f(u)$$

由 (A.3.1) 和 (A.3.4) 立即得到 (A.6.4) 式.

(3)→(2)是显然的.

(2)→(1)：$\forall u,v \in K$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，有

$$\begin{aligned} & tf(u)+(1-t)f(v)-f(tu+(1-t)v) \\ &= -t\{f(u+(1-t)(v-u))-f(u)\} \\ &\quad -(1-t)\{f(v+t(u-v))-f(v)\} \end{aligned} \tag{A.6.5}$$

利用中值定理，有

$$\begin{aligned} & f(u+(1-t)(v-u))-f(u) \\ &= (1-t)\langle \mathrm{Grad} f(u+\tau(1-t)(v-u)), v-u \rangle \end{aligned} \tag{A.6.6}$$

$$f(v+t(u-v))-f(v) = t\langle \mathrm{Grad} f(v+\sigma t(u-v)), u-v \rangle \tag{A.6.7}$$

其中$0<\tau<1$，$0<\sigma<1$.令

$$u_1 = u+\tau(1-t)(v-u);\quad v_1 = v+\sigma t(u-v) \tag{A.6.8}$$

则 $v_1 - u_1 = t_1(v-u)$，其中 $t_1 = 1-\sigma t-\tau(1-t) > 1-t-(1-t) > 0$. 以 (A.6.6)(A.6.8) 代入 (A.6.5)，并注意到 $\mathrm{Grad} f$ 的单调性，有

$$\begin{aligned} & tf(u)+(1-t)f(v)-f(tu+(1-t)v) \\ &= t(1-t)\langle \mathrm{Grad} f(v_1)-\mathrm{Grad} f(u_1), v-u \rangle \\ &= \frac{t(1-t)}{t_1}\langle \mathrm{Grad} f(v_1)-\mathrm{Grad} f(u_1), v_1-u_1 \rangle \geqslant 0 \end{aligned}$$

从而 f 是凸的（严格凸证法类似）. 证毕.

定理 A.6.2 设泛函 f 定义在凸集 K 上，则

(1) 如 f 是 Gateaux 可微和凸，则 f 是弱下半连续；

(2) 如 Grad$f$ 是单调的，则 f 是弱下半连续。

证 (1) 设 $u_n \to u \in K$（弱），则有

$\langle \mathrm{Grad} f(u), u_n \rangle \to \langle \mathrm{Grad} f(u), u \rangle$.由(A.6.4)有

$$\liminf_{n\to\infty}(f(u_n) - f(u)) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{Grad} f(u), u_n - u \rangle = 0$$

故 f 是弱下半连续.

(2) 设 Grad$f$ 是单调的，令 $u_n \to u$（弱），则由中值定理知，存在 $0 < \tau_o < 1 (n = 1,2,\cdots)$，使得

$$\begin{aligned}
f(u_n) &= f(u_n) - f(u_o) + f(u_o) \\
&= \langle \mathrm{Grad} f(u_o + \tau_n (u_n - u_o)), u_n - u_o \rangle + f(u_o) \\
&= \frac{1}{\tau_n} \langle \mathrm{Grad} f(u_o + \tau_n (u_n - u_o)) \\
&\quad - \mathrm{Grad} f(u_o), \tau_n (u_n - u_o) \rangle \\
&\quad + \langle \mathrm{Grad} f(u_o), u_n - u_o \rangle + f(u_o) \\
&\geqslant \langle \mathrm{Grad} f(u_o), u_n - u_o \rangle + f(u_o).
\end{aligned}$$

两边取下极限，即得

$$\liminf_{n\to\infty} f(u_n) \geqslant f(u_o)$$

此即 f 是弱下半连续.证毕.

定理 A.6.3 设 f 是凸集 K 上的 Gateaux 可微泛函，并且 f 也是凸的，则函数

$$\varphi'(t) = \langle \mathrm{Grad} f(u + t(v - u)), v - u \rangle \quad \forall u, v \in K$$

是 t 的单调连续函数.

证 令 $\varphi(t) = f(u + t(v - u)) = f(tv + (1 - t)u)$. $\forall t \in [0,1]$. 因为 f 在 K 是凸的且 G- 可微，则有 $\varphi'(t) = \langle \mathrm{Grad} f(u + t(v - u)), (v - u) \rangle$，而且由定理 A.6.1 知 Grad$f$ 单调. 从而 $0 \leqslant s$

$<t\leqslant 1$，有

$$(\varphi'(t)-\varphi'(s))(t-s)=(\mathrm{Grad}f(u+t(v-u))$$
$$-\mathrm{Grad}f(u+s(v-u)),(t-s)(v-u))\geqslant 0$$

因此$\varphi'(t)$是单调的.

引理 A.6.1 设定义在K上的泛函f是Gateaux可微和凸的，且其梯度算子是强制的，即

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle \mathrm{Grad}f(u),u\rangle}{\|u\|}=+\infty \qquad \forall u\in K$$

则f在K上处处具有增长性质.

证 设零点$\theta\in K$，$\forall u\in K$，由中值定理有

$$f(u)-f(0)=\int_0^1\langle \mathrm{Grad}f(tu),u\rangle dt$$

$$=\int_0^1\langle \mathrm{Grad}f(tu)-\mathrm{Grad}f(0),u\rangle dt+\langle \mathrm{Grad}f(0),u\rangle$$

由定理A.6.1，有

$$f(u)-f(0)\geqslant\int_{1/2}^1\langle \mathrm{Grad}f(tu)-\mathrm{Grad}f(0),u\rangle dt$$
$$+\langle \mathrm{Grad}f(0),u\rangle$$

再由中值定理，知存在$S\in[\frac{1}{2},1]$，使得

$$f(u)-f(0)\geqslant\frac{1}{2}\{\langle \mathrm{Grad}f(su),u\rangle+\langle \mathrm{Grad}f(0),u\rangle\}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|u\|\left\{\frac{\langle \mathrm{Grad}f(su),su\rangle}{\|su\|}-\|\mathrm{Grad}f(0)\|_{X'}\right\}.$$

又$\|su\|\geqslant\frac{1}{2}\|u\|$ 故由Grad(f)的强制性，得$\lim\limits_{\|u\|\to\infty}f(u)=\infty$.

证毕.

§A.7 泛函的极值问题

定义 A.7.1 设 K 是实 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 中开集，泛函 $f: K \to \mathbf{R}$, $u_o \in K$. 如存在 u_o 的邻域 $U(u_o,\delta)=\{u:\|u-u_o\|<\delta\}$，使得当 $u \in U(u_o,\delta)$ 时，有

$$f(u) \geqslant f(u_o)(\text{相应地},\ f(u) \leqslant f(u_o)) \tag{A.7.1}$$

则称泛函 $f(u)$ 在 $u=u_o$ 处达到（局部）极小值（相应地,（局部）极大值）. 极小值与极大值统称为极值 .

定理 A.7.1 设 $K \subset \mathbf{X}$, u_o 是 K 的内点，K 上定义的泛函 f 在 u_o 处 Gateaux 可微 . 如果 f 在 u_o 处取得极值，则 u_o 必是 f 的驻点，即 $\mathrm{Grad}f(u_o)=0$.

证 任取 $h \in \mathbf{X}$, 考虑 $\varphi(t)=f(v_o+th)$, 因为 u_o 是 K 的内点，所以在 $t=0$ 的某一邻域中，φ 是有定义的 . 又 f 在 u_o 处 Gateaux 可微，有 φ 在 $t=0$ 处可微：

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(u_o+th)-f(u_o)}{t}=\mathrm{D}f(u_o)h$$
$$=\langle \mathrm{Grad}f(u_o),h\rangle$$

由定义知如果 f 在 u_o 处取得极值，则 φ 在 $t=0$ 处也取得极值，从而 $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=0$, 由此得出 $\langle \mathrm{Grad}f(u_o),h\rangle=0$.

又由 h 的任意性，有 $\mathrm{Grad}f(u_o)=0$. 证毕 .

定理 A.7.1 给出了泛函 f 在 u_o 取得极值的必要条件是 $\mathrm{Grad}f(u_o)=0$, 当然如果 $u_o \in \partial K$, 即不是 K 的内点，这个结论一般不再成立 .

在定理 A.1.4 及定理 A.2.1 中，已经给出泛函取得极值的充

要条件，下面进一步讨论这个问题．

定理 A.7.2 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间，$K\subset\mathbf{X}$ 是闭凸非空子集．设 f: $K\to\mathbf{R}$ 是 Gateaux 可微，且 $\mathrm{Grad}f$ 单调的．如果

(1) K是有界的.

(2) $\mathrm{Grad}f(u)$是强制的.

则集合 $M=\{u\in K:\ f(u)\leqslant f(v),\ \forall v\in K\}$ 是非空的，凸的和闭的，且 $u\in M$ 的充要条件是

$$\langle \mathrm{Grad}f(u),v-u\rangle\geqslant 0,\quad \forall v\in K \tag{A.7.2}$$

由定理 A.6.1，定理 A.6.2，引理 A.6.1 及定理 A.2.2 可得 M 是非空的．构造 $M_v=\{u\in K:\ f(u)\leqslant f(v)\}$，则 M_v 是闭的、凸的．所以它们的交集也是闭的、凸的．

设 $u\in M$，由极值条件和 f 是 G— 可微，可推出 (A.7.2) 式．反之，如果 (A.7.2) 式成立，则由定理 A.6.1 推出 $u\in M$.

定理 A.7.3 设 K 为凸集，f: $K\to\mathbf{R}$ 是严格凸的，则 f 在 K 上取得极值的点不多于一个．

证 如不然，存在 $u_1,u_2\in K$，满足 $u_1\neq u_2$ 及 $f(u_1)=f(u_2)=\inf\{f(u),u\in K\}$. 由 K 的凸性知$\frac{1}{2}(u_1+u_2)\in K$，又由 f 是严格凸的，有

$$f(\frac{1}{2}(u_1+u_2))<\frac{1}{2}f(u_1)+\frac{1}{2}f(u_2)=\inf\{f(u),u\in K\}$$

由此得出矛盾.证毕.

定理 A.7.4 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间，T: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ 是位势算子，其位势为 f.如果 f 满足

(1) $f(u)/\|u\|_{\mathbf{X}}\to\infty$，当$\|u\|_{\mathbf{X}}\to\infty$时一致成立;

(2) f在$\mathbf{X}$上弱下半连续.

则 $\forall \xi \in \mathbf{X}'$ 算子方程 $T(u)=\xi$ 至少有一个解 $u \in \mathbf{X}$.

证 作泛函 $\varphi(u)=f(u)-\langle \xi,u \rangle$, $\forall u \in \mathbf{X}$, 则 $\mathrm{Grad}\,\varphi(u) = \mathrm{Grad} f(u)-\xi = T(u)-\xi$, 从而 φ 的驻点就是算子方程 $T(u)=\xi$ 的解. 由 (1) 知对于充分大的 $\|u\|_{\mathbf{X}}$, 有

$$\varphi(u)=f(u)-\langle \xi,u\rangle \geqslant \tau(u)\|u\|_{\mathbf{X}}-\|u\|_{\mathbf{X}}\|\xi\|_{\mathbf{X}'}$$

$=(\tau(u)-\|\xi\|_{\mathbf{X}'})\|u\|_{\mathbf{X}}$, 这里当 $\|u\|_{\mathbf{X}} \to \infty$ 时, 有 $\tau(u) \to \infty$. 故 φ 具有增性质. 又由 (2) 知 φ 也是弱下半连续. 故由定理 A.2.1 知 φ 存在极小值. 证毕.

定理 A.7.5 设 $\mathbf{X}$ 是自反的 Banach 空间, T: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ 是位势算子, 满足

(1) 强制性, 即

$$\frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|_{\mathbf{X}}} \to +\infty, \text{ 当} \|u\|_{\mathbf{X}} \to \infty \text{时一致成立;}$$

(2) T是单调算子.

则 $\forall \xi \in \mathbf{X}$, $T(u)=\xi$ 在 $\mathbf{X}$ 中至少有一个解.

此外, 如将 (2) 改为 :T 是严格单调的. 则有 $\forall \xi \in \mathbf{X}'$, $T(u)=\xi$ 在 $\mathbf{X}$ 中有唯一的解.

证 我们证明由本定理的条件 (1), (2), 可推出定理 A.7.4. 的条件. 从而可应用定理 A.7.4.

(1) 设 f 为位势算子 T 的位势, 由 (A.4.2) 式有 $f(u) = f(0)+\int_0^1 \langle T(su),u\rangle ds$. 记 $h(u)=\langle Tu,u\rangle / \|u\|_{\mathbf{X}}$, 则对充分大的 $\|u\|_{\mathbf{X}}$, 有

$$\frac{f(u)}{\|u\|_{\mathbf{X}}}=\frac{f(0)}{\|u\|_{\mathbf{X}}}+\int_0^1 h(su)ds \geqslant \frac{f(0)}{\|u\|_{\mathbf{X}}}+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(su)ds$$

由中值定理知存在 $\sigma \in (\frac{1}{2},1)$, 使得

$$\frac{f(u)}{\|u\|_{\mathbf{X}}} \geqslant \frac{f(0)}{\|u\|_{\mathbf{X}}} + \frac{1}{2} h(\sigma u)$$

这里 σ 可能依赖 u，但是对于 $\sigma > \frac{1}{2}$，当 $\|u\|_{\mathbf{X}} \to \infty$ 时，$h(\sigma u) \to +\infty$，从而当 $\|u\|_{\mathbf{X}} \to \infty$ 时，有 $\frac{f(u)}{\|u\|_{\mathbf{X}}} \to +\infty$.

(2) 由定理 A.6.2 知由 T 的单调性可得其位势 f 是弱下半连续.

而定理的最后一部分可由严格单调算子 T 的定义 $\langle Tu - Tv, u - v\rangle = 0 \Rightarrow u = v$ 得出．证毕．

上面给出了单调位势算子满映射的条件．

下面考虑，如果 u 是位势算子 T 的零点，即 $Tu = 0$，则 u 必然是位势 f 的驻点，即 $\mathrm{Grad} f(u) = 0$. 但 f 是否在 u 处取得极值呢？

定理 A.7.6 设算子 $T: \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ 是位势的，其位势 $f: \mathbf{X} \to R$. 如果 T 是单调的，即

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in \mathbf{X}$$

则算子方程，求 $u \in \mathbf{X}$，使得 $Tu = 0$ (A.7.3)

与极小值问题，求 $u \in \mathbf{X}$，使得 $f(u) = \inf\limits_{v \in \mathbf{X}} f(v)$ (A.7.4)

是等价的.

证 只须证明 (A.7.3)⇒(A.7.4). 由于 T 是单调的，由定理 A.6.1 知 f 是凸的以及

$$f(v) - f(u) \geqslant \langle \mathrm{Grad} f(u), v - u\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbf{X}$$

故 $f(u) = \inf\limits_{v \in \mathbf{X}} f(v)$.证毕.

§ A.8 单调算子

前面已经讨论过自反的 Banach 空间中位势型单调算子的性质，现在讨论更为一般的单调算子.

引理 A.8.1 设 $\mathbf{X}$ 是 Banach 空间，$K\subset \mathbf{X}$ 是一个凸集. 算子 T: $K\to \mathbf{X}'$ 是单调的和 $\mathbf{H}$ - 连续的. 则对任一固定的 $u_o\in K$ 和 $f_o\in \mathbf{X}'$ 下列结论是等价的：

(1) $\langle Tu_o - f_o, v-u_o\rangle \geqslant 0,\quad \forall v\in K$

(2) $\langle Tv - f_o, v-u_o\rangle \geqslant 0,\quad \forall v\in K$

证 (1)→(2): 由于T是单调的，故

$$\langle Tv - Tu_o, v-u_o\rangle = \langle Tv - f_o, v-u_o\rangle - \langle Tu_o - f_o, v-u_o\rangle \geqslant 0.$$

从而

$$\langle Tv - f_o, v-u_o\rangle \geqslant \langle Tu_o - f_o, v-u_o\rangle \geqslant 0$$

(2)→(1): $\forall w\in K$, $t\in[0,1]$, 由于 K 为凸集，有 $v=tu_o+(1-t)\ w\in K$, 但是 $v-u_o=(1-t)(w-u_o)$, 由 (2)

$$\langle T(tu_o+(1-t)w)-f_o, (1-t)(w-u_o)\rangle \geqslant 0,\ \forall w\in K$$

所以

$$\langle T(tu_o+(1-t)w)-f_o,\ w-u_o\rangle \geqslant 0,\qquad \forall w\in K$$

因为 T 是 $\mathbf{H}$ - 连续的，令 $t\to 1$, 则 (1) 成立，证毕.

定理 A.8.1 设 $\mathbf{X}$ 自反的 Barach 空间. 算子 T 是 $\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ 的单调算子，并且是 $\mathbf{H}$ - 连续和强制的，则 $\forall f\in \mathbf{X}'$; 至少有一个 $u_o\in\mathbf{X}$, 使得 $Tu_o=f$.

证 对任一固定的 $f\in\mathbf{X}'$, 由于 T 是强制的，故存在 $r>0$, 使得

$$\langle Tu-f,u\rangle > 0\quad \forall u\in\mathbf{X},\ \|u\|\geqslant r$$

令 $\Lambda=\{F\subset \mathrm{X}:\ \dim(F)<\infty\}$，即 X 中所有有限维子空间组成的集合．

$\forall F\in\Lambda$，由于 F 是有限维的，把 T 看作是 F 上的算子，f 为 F 上的线性泛函．这时 T 仍然是强制的，H－连续和单调的．故 T 在 F 上是连续的．而且有

$$\langle Tu-f,u\rangle>0\quad \forall u\in\mathrm{X},\ \|u\|\geqslant\sigma$$

由定理 5.4.1，可知至少有一个 $u_F\in F$, $\|u_F\|\leqslant r$,

$$\langle Tu_F,v\rangle=\langle f,v\rangle\qquad \forall v\in F$$

对任意$F_o\in\Lambda$，作

$$U_{F_o}=\{u_F:\ F\supset F_o,\ F\in\Lambda\},\qquad B=\{U_{F_o}:\ F_o\in\Lambda\}$$

那么，$\forall n>0$，$U_{F_i}\in B$，$i=1,2,\cdots,n$．由 $F_i\in\Lambda$ 知，存在 $\mathrm{H}_o\in\Lambda$，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i\subset\mathrm{H}_o$，而 H_o 仍然是有限维的，所以 $U_{H_o}\neq\Phi$．

同样地，

$$\langle Tu_{\mathrm{H}},v\rangle=\langle f,v\rangle\qquad \forall v\in\mathrm{H}_o$$

当然有

$$\langle Tu_{\mathrm{H}},v\rangle=\langle f,v\rangle\quad \forall v\in F_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

故 $u_{\mathrm{H}}\in\bigcup_{F_i}$ $i=1,2,\cdots,n$．且 $\Phi\neq\mathrm{U}_{H_o}\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_{F_i}$，即集合族具有限交性质：

$$\forall F\in\Lambda,\ U_F\subset S(0,r)=\{u\in\mathrm{X},\|u\|\leqslant r\}.$$

由于 X 是自反的 Banach 空间，$S(0,r)$ 是弱列紧的，故存在 $u_o\in\mathrm{X}$，使得 $u_o\in\bigcap\limits_{F\in\Lambda}U_F^{W_o}$，这里 $U_F^{W_o}$ 是 U_F 的弱闭包，即 u_o 属于任意 U_F 的弱闭包．$\forall F\in A$．设 $u_n\in U_F$，$u_n\to u_o$（弱），而 $\langle Tu_n,v\rangle=\langle f,v\rangle$，$\forall v\in F$，从而有

$$\langle Tu_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$\langle Tu_n - f, u - u_n \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in F$$

由引理 A.8.1, 有

$$\langle Tu - f, u - u_n \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in F$$

令 $n \to \infty$, 有 $\langle Tu - f, u - u_o \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in F$.

由于 F 是任意的, 故有

$$\langle Tu - f, u - u_o \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in F, \ \forall F \in \Lambda$$

因为 $\forall v \in \mathbf{X}, \{v\} \subset \Lambda$, 故 $\langle Tu - f, v - u_o \rangle \geqslant 0$. 再利用引理 A.8.1. 有

$$\langle Tu_o - f, u - u_o \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in \mathbf{X}.$$

故得 $Tu_o = f$. 证毕.

推论 A.8.1 设 T 是 Banach 空间上严格单调算子, 则 $Tu = f$. $\forall f \in \mathbf{X}'$ 的解是唯一的.

推论 A.8.2 自反的 Banach 空间 X 上 H－连续的强单调算子 T 是 X 到 X′ 上的满射.

定义 A.8.1 设 T 是自反的 Banach 空间 X 到 X′ 上的算子, $\{u_n\} \subset \mathbf{X}$ 且 $u_n \to u_o$ (弱). 如果由

$$\lim_{n \to \infty} \langle Tu_n - Tu, u_n - u \rangle = 0$$

可以推出 $u_n \to u$, 则称 T 为 $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ 的拟单调算子.

定理 A.8.2 设 X 为可分的自反 Banach 空间. 算子 T 是 $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ 的 D－连续、强制算子, 并且把 X 中的有界集映到 X′ 中的有界集, 如果 T 是拟单调算子, 那么算子方程

$$Tu = f \qquad \forall f \in \mathbf{X}'$$

在X上有解.

证 设 $f \in \mathbf{X}'$, 由 T 的强制性, 存在 $r > 0$, 使得

$$\langle Tu - f, u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in \mathbf{X}, \|u\| \geqslant r$$

设 $\{\varphi_i\}(i = 1,2,\cdots)$ 是 X 的基函数系，F_n 为 $\{\varphi_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 展成的 n 维子空间．而 $\Lambda = \{F_n, n = 1,2,\cdots\}$. 考虑到在有限维子空间上，D－连续与 H－连续的等价性以及

$$\forall F_n \in \Lambda, \langle Tu - f, u \rangle > 0 \quad \forall u \in F_n, \|u\| > r.$$

知存在 $u_n \in F_n$，使得

$$\langle Tu_n, v \rangle = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in F_n$$

且 $\|u_n\| \leqslant r$，$n = 1,2,\cdots$ 因此由 X 的自反性，知存在 $\{u_n\}$ 的一个子序列 $\{u_m\}$，它弱收敛于 $u_o \in \mathbf{X}$, 另一方面 ,$\{u_m\}$ 是有界的，从而 Tu_m 也是有界的．考察

$$\langle Tu_m - Tu_o, u_m - u_o \rangle = \langle Tu_m, u_m \rangle - \langle Tu_m, u_o \rangle$$
$$- \langle Tu_o, u_m - u_o \rangle$$

由 $u_m \to u_o$（弱），有 $\langle Tu_o, u_m - u_o \rangle \to 0$，当 $m \to \infty$ 时．又因为 $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}_n$，$\forall m \leqslant n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$. 故

$$\lim_{m\to\infty} \langle Tu_m, v \rangle = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in \mathbf{X}$$

显然也有 $\lim\limits_{m\to\infty} \langle Tu_m, u_o \rangle = \langle f, u_o \rangle$.

另一方面，从 $\langle Tu_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle$ 知

$$\lim_{m\to\infty} \langle Tu_m, u_m \rangle = \langle f, u_o \rangle.$$

因而
$$\lim_{m\to\infty} \langle Tu_m - Tu_o, u_m - u_o \rangle = 0.$$

由 T 的拟单调性，可推出 $u_m \to u_o$. 又因为 T 是次连续的，可知 $Tu_m \to Tu_o$（弱）. 从而由

$$\lim_{m\to\infty}\langle Tu_m, v\rangle=\langle f, v\rangle \qquad \forall v\in \mathrm{X}$$

得

$$\langle Tu_o, v\rangle=\langle f, v\rangle \qquad \forall v\in \mathrm{X}$$

从而$Tu_o=f$.证毕.

定理 A.8.3 设 T 满足定理 A.8.2 条件．如果 $Tu=f$ 的解是唯一的，则由定理 A.8.2 中的所构造的有限维逼近序列 $\{u_n\}$ 整体收敛于解 u_o.

证 用反证法．如 $\{u_n\}$ 不是整体收敛于解 u_o，则存在 $\varepsilon_o>0$ 及 u_k，使得 $\|u_k-u_o\|\geqslant\varepsilon_o$，当 $k\to\infty$ 时．又因 $\|u_k\|\leqslant M$．故可选出弱收敛的子序列 $u_{k'}$，即 $u_{k'}\to u_o'$(弱)．和定理 A.8.3 证明一样，必有 $Tu_o'=f$ 且 $u_o'\neq u_o$，从而与唯一性矛盾．证毕．

定理 A.8.4 设 T 是可分的自反的 Banach 空间 $\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ 的强单调算子，且是 H 连续的．则方程 $Tu=f$ 的有限维逼近解序列整体收敛于真解．

证 应用推论 A.8.2 和定理 A.8.3 即可得．证毕．

附录B 紧算子的Riesz-Schauder理论

很多算子均可表示成为一个恒等算子和一个紧算子之和，所谓从线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的线性算子 T 是紧的，当且仅当对任何有界序列 $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$，它的象序列 $\{Tx_n\} \subset \mathbf{Y}$ 有收敛子序列．

引理 B.1 线性紧算子一定是连续算子．

值得注意的是，如果 T 是非线性的，那么紧的不一定是连续的，由此，引入了全连续算子，即如果算子 T: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是紧的和连续的，则称 T 为全连续算子．

定理 B.1 设 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 是三个赋范向量空间，T: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是线性和紧的．S: $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ 是线性和连续的，那么 ST: $\mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ 是紧的．如果 R: $\mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ 是线性和连续的，那么 TR: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ 是紧的．

设 T: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$ 是线性有界算子，如果复数 λ 使得 $\lambda I - T$ 在 X 上有有界逆，那么称 λ 为正则值．而复平面上 T 的所有正则值的补集，称为 T 的谱．

对于复数 λ，如存在一个非零元素 $x \in \mathbf{X}$，使得 $Tx = \lambda x$，则称 λ 为 T 的特征值．而使得 $Tx = \lambda x$ 成立的非零元素的全体，称为对应于特征值 λ 的特征向量．

由于 λ 是正则值的必要条件是，$\lambda I - T$ 是双射的．而如果 λ 是一个特征值，那么 $\lambda I - T$ 就不是一对一的，故特征值必定属于谱．

引理 B.2 设 λ, μ 是线性算子 T 的两个不同的特征值，那么它们对应的特征函数是线性独立的．

我们知道，算子 T: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 的零空间和值空间定义为

$$N(T) = \{x \in \mathbf{X}:\ Tx = 0\},\quad R(T) = \{y \in \mathbf{Y}:\ y = Tx, \forall x \in \mathbf{X}\}$$

引理 B.3 设 T 是 Banach 空间 $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 的线性紧算子，那

么 $N(T-\lambda I)$ 是 $\mathbf{X}$ 的闭的有限维线性子空间；$R(T-\lambda I)$ 是 $\mathbf{X}$ 的闭的线性子空间.

引理 B.4 设 n 是所有非负整数，T 是 $\mathbf{X}$ 上的线性紧算子，则 (1) $N_n=N((T-\lambda I)^n)$ 是闭的有限维线性子空间，并且存在一个非负整数 γ，使得

$$N_n \subset N_{n+1},\quad N_n \neq N_{n+1},\qquad \forall 1 \leqslant n < \gamma$$

$$N_n = N_{n+1},\qquad \forall n \geqslant \gamma$$

(2) $R_n=R((T-\lambda I)^n)$ 是闭的线性子空间，并且存在一个非负整数 μ，使得

$$R_n \supset R_{n+1},\ R_n \neq R_{n+1},\qquad \forall 0 \leqslant n \leqslant \mu-1$$

$$R_n = R_{n+1}\qquad \forall n \geqslant \mu$$

(3) 上述非负正整数 μ, γ 是相等的，设它们的公共值为 $r=\mu=\gamma$，如果 λ 是 T 的特征值，称 γ 为 λ 的 Riesz 指标，记为 $r=\text{Riesz index}(\lambda)$

定理 B.2 设 T 是 $\mathbf{X}$ 上线性紧算子，那么

(1) $\mathbf{X}=N((T-\lambda I)^r)\oplus R((T-\lambda I)^r)$,

(2) 记 $N_r=N((T-\lambda I)^r)$, $R_r=R((T-\lambda I)^r)$, 那么 N_r, R_r 是 T 的左不变子空间：$T(N_r)\subset N_r$, $T(R_r)\subset R_r$.

(3) $T-\lambda I$ 在 R_r 上有有界逆，换而言之，$T-\lambda I$ 在 R_r 上的限制 $(T-\lambda I)|_{R_r}$ 是可逆的. 特别是 $r=0$ 时，$T-\lambda I$ 在 $\mathbf{X}$ 上有界可逆.

由此可知，当 λ 不属于 T 的谱值时，$T-\lambda I$ 在 $\mathbf{X}$ 上有有界逆：如果 λ 是 T 的特征值，那么 $T-\lambda I$ 在 R_r 上有有界逆.

定理 B.3 设 T 是 $\mathbf{X}$ 上线性紧算子，$S_p(T)$ 为 T 的谱值.

设 λ 是某个特征值，那么算子 T 在 N_r 上的限制 $T|_{N_r}$ 只有一个特征值 λ，而 T 在 Rr 上的限制 $T|_{Rr}$ 的所有特征值就是除 λ 之外，T 在 X 上所有的特征值．即

$$S_p(T|_{N_r}) = \{\lambda\},\quad S_p(T|_{Rr}) = S_p(T)\setminus\{\lambda\}$$

定理 B.4 设 T 是 X 上线性紧算子．则有

(1) $S_p(T)$ 要么是有限集，要么是以零为聚点的可数集；

(2) 如果T在X上不可逆，则$0\in S_p(T)$；

(3) $S_p(\tau)$中任何一个非零点，必是特征值．

设 λ 是 T 的特征值，那么 $N(T-\lambda I)$ 称为 λ 的本征空间，而 $N((T-\lambda I)^{r(\lambda)})$ 称为 λ 的广义本征空间，这里 $r(\lambda)$ 为 λ 的 Riesz 指标．另外

$m_a = \dim(N_r)$称为λ的代数重数；

$m_g = \dim(N)$称为λ的几何重数，且$m_a \geqslant m_g$；

$i = m_a - m_g$为Fredholm指标．

定理 B.5 设 T 是 X 上线性紧算子，那么

(1) 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为 T 的 k 个不同特征值，则

$N_{r(\lambda i)} = N((T-\lambda_i I)^{r(\lambda_i)})$是闭的有限维子空间，且

$$T(N_{r(\lambda i)}) \subset N_{r(\lambda i)}$$

(2) $\mathrm{X} = N_{r(\lambda 1)} \oplus N_{r(\lambda 2)} \oplus \cdots \oplus N_{r(\lambda k)} \oplus M$，这里 M 是 X 的无限维闭子空间，且 $T(M)\subset M$．

(3) 算子 T 在有限维子空间

$$\mathrm{V} = \mathrm{N}_{r(\lambda 1)} \oplus N_{r(\lambda 2)} \oplus \cdots \oplus N_{r(\lambda k)}$$

上的限制，只要适当地选择 V 的基，就可以表示为 Jordan 正则形式的矩阵．

定理 B.6 设 T 是 $\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ 的线性紧算子，那么其共轭算子 $T^*: \mathbf{X}'\to\mathbf{X}'$ 也是线性紧算子.

定理B.7 $\forall\lambda\in C$

$$\dim(N(T-\lambda I))=\dim(N(T^*-\lambda I^*))$$

而 $I^*: \mathbf{X}'\to\mathbf{X}'$ 是 I 的共轭算子，设 A,B 分别是 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}'$ 非空子集. 记

$$A^{\perp}=\{x^*\in\mathbf{X}': \langle x,x^*\rangle=0,\quad \forall x\in A\}$$

$$^{\perp}B=\{x\in\mathbf{X}: \langle x,x^*\rangle=0,\quad \forall x^*\in B\}$$

称 $A^{\perp}$, $^{\perp}B$ 分别为 A,B 的零化子 (annihilator)

引理B.5 $A^{\perp}$, $^{\perp}B$, 分别是$\mathbf{X}'$和$\mathbf{X}$的闭线性子空间

引理 B.6 算子 T 和 T^* 有相同的非零特征值，以及对同一个特征值有相同的特征向量.

定理 B.8 (Fredholm 两择性定理) 设 $\mathbf{X}$ 是线性赋范空间，考察方程

$$Tx-\lambda x=f \qquad \text{在}\mathbf{X}\text{上} \tag{B.1}$$

和

$$T^*y^*-\lambda y^*=g^* \qquad \text{在}\mathbf{X}'\text{上} \tag{B.2}$$

那么成立下列两个结论之一:

(1) 要么，对任何 $f\in\mathbf{X}$ 和 $g^*\in\mathbf{X}^*$，方程 (B.1) 和 (B.2) 分别存在唯一解.

(2) 要么齐次方程

$$Tx-\lambda x=0 \tag{B.3}$$

和

$$T^*y^*-\lambda y^*=0 \tag{B.4}$$

分别有有限个相同数目的线性独立的解，这时对应的非齐次方

程 (B.1) 和 (B.2) 有解的充要条件是

$$f \in {}^{\perp}N(T^{*} - \lambda I^{*}), \quad g^{*} \in N(T - \lambda I)^{\perp}$$

注意，这个定理的部分内容也可表示为

$$R(T - \lambda I) = {}^{\perp}N(T^{*} - \lambda I^{*})$$

即 $R(T - \lambda I) = \{x \in \mathbf{X}: \langle x, x^{*} \rangle = 0, \ \forall x^{*} \in N(T^{*} - \lambda I^{*})\}$

$$R(T^{*} - \lambda I^{*}) = N(T - \lambda I)^{\perp}$$

即 $R(T^{*} - \lambda I^{*}) = \{x^{*} \in \mathbf{X}^{*}: \langle x, x^{*} \rangle = 0, \ \forall x \in N(T - \lambda I)\}$

我们知道，在 $\mathbf{X}$ 上线性算子 P 是投影算子的充要条件是 $P^2 = P$

引理 B.7 设 P 是 $\mathbf{X}$ 上的投影算子，$Q = I - P$，那么

(1) Q 也是 $\mathbf{X}$ 上的投影算子；

(2) $R(P) = \{x \in \mathbf{X}, \ Px = x\}$；

(3) $R(p) = N(Q)$；

(4) $\mathbf{X} = R(P) \oplus R(Q)$；

(5) 如果 P 是有界的，那么 $R(P)$ 和 $R(Q)$ 都是闭的；

定理 B.9 设 $\mathbf{X}$ 是 Banach 空间，$\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$ 为 $\mathbf{X}$ 的两个闭子空间，$\mathbf{X} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$，那么存在唯一的投影算子 P，使得

$$R(P) = \mathbf{M}, \ R(Q) = \mathbf{N}, \ Q = I - P$$

定理 B.10 设 T 是 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 上线性紧算子，$\lambda \in \mathbf{C}$. 那么存在唯一的投影算子 P，使得 $Q = I - P$

$$R(P) = N((T - \lambda I)^{r(\lambda)}), \ R(Q) = R((T - \lambda I)^{r(\lambda)}).$$

同时，$\forall x \in \mathbf{X}$，有

$$TPx = PTx, \qquad TQx = QTx$$

参考文献

[1] R.A.Adams: *Sobolev Space*, New York, Academic press, 1975

[2] S.Agmon: *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, princeton, N.T.Van, Nostrand, Math.Studies,No2, 1965

[3] I.Babuska, A.K.Aziz: *Survey Lectures on the Mathematical Fundament of the Finite Element Method*,New York, 1972

[4] H.Ju.M.berezanskii: Expansions in Eigenfunction of Self Adjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, Vol,17.*Americal Mathematical Society* , Providence, R.I.1968

[5] P.Constantin, C.Foias :*Navier-Stokes Equations*,University of Chicago Press, Chicago, 1988

[6] 陈文嶸:《非线性泛函分析》, 甘肃人民出版社, 1982

[7] K.Deimling: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985

[8] P.G.Ciarlet: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland Publishing Company, 1978

[9] J.Chazarain, A.Priori: *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equation*, North-Holland Publishing Company, 1981

[10] G.Duvant, J.Lions: *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976

[11] C.Foias, O. Manley, R.Temam: Attractors for the Benard problems : Existence and Physical Bounds of their Fractal Dimension, *Nonlinear Analysis, Theory,*

Methods and its Applications, Bos.11, No.8, P938～967, 1987

[12] A.Fiedman: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Pintice-Hill 1964

[13] V.Giraut, P.A.Raviart: *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1985

[14] 郭大钧:《非线性分析》，山东科技出版社，1985

[15] L.Hoermander: *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963

[16] H. Jeggle: *Nichtlineare Funktionalanalysis*, B.G. Teubner Stuttgart, 1979

[17] 李立康，郭敏驹:《索伯列夫空间引论》，上海科学技术出版社，1981

[18] 李开泰，马逸尘:《数学物理方程Hilbert空间方程法(上)，广义函数和Соболев空间》，西安交通大学出版社，1990

[19] J. Lions, E. Magenes: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, 1972

[20] V.G. Mazja: *Sobolev Space*, Springer-Verlag, 1985

[21] J.T.Oden, J.N.Reddy: *Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons, 1976

[22] A.Pazy: *Semigroups of Linear operator and Application to Partial Differential Equations*, New York, Springer-Verlag, 1983

[23] R.E.Showalter: *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman Publishing, 1977

[24] R.Temam: *Navier-Stokes Equations*, North-Holland,

Amsterdam, New York, 1984

[25] R.Temam: Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, *Applied Math. Sciences Series*, Vol .68.Springer-Verlag, Berlin, 1988

[26] N.M.Temme: *Nonlinear Analysis* , Springer-Verlag, 1978

[27] F.Treves: *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1975

[28] M.Sermane, R.Temam: *Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations, Comm, Pure, Appl. Math*, Vol XXXIV, P635～664, 1984

[29] K.Yosida: *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1974

[General Information]
书名=数理方程HILBERT空间方法 （下）
作者=李开泰 马逸尘
页数=508
SS号=10236754
DX号=
出版日期=1992年02月第1版
出版社=西安交通大学出版社